R. B. Bird
W. E. Stewart
E. N. Lightfoot

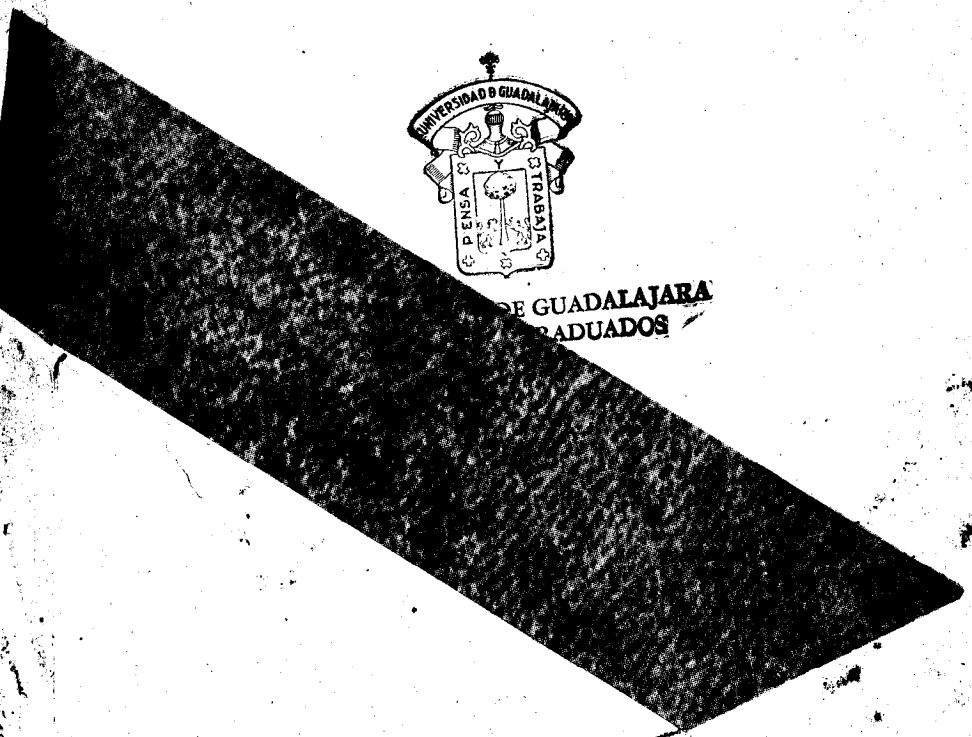
fenómenos de transporte

ediciones REPLA, S. A.

621.0867
BIR
F-77
F-77 I

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
BIBLIOTECA DE POSGRADO

FENÓMENOS DE TRANSPORTE



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
PIENSA TRABAJA
DE GUADALAJARA
ADUADOS

R. BYRON BIRD · WARREN E. STEWART · EDWIN N. LIGHTFOOT

Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Wisconsin

FENÓMENOS DE TRANSPORTE

UN ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LOS FUNDAMENTOS DEL TRANSPORTE DE MATERIA, ENERGÍA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

CLASSICOX
DE LOS MILES

ediciones REPLA, s. a.

INSTITUTO
- DE -
BIBLIOTECAS

No. de Clasificación _____
No. de Adquisición _____
No. de Ejemplares _____
Fecha _____

Título de *la* obra *original*
TRANSPORT PHENOMENA

Editada por
John **Wiley & Sons,** Inc., Nueva York

Versión española por el
Prof. Dr. Fidel Mato **Vázquez,**
Catedrático de Química Técnica
de la Universidad de Salamanca

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Encarnación, 86.
Barcelona (24)

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
UNIDAD DE BIBLIOTECAS
CUCEI
No. ADQUISICION 21836
CLASIFICACION
FACTURA
FECHA
V.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este titulo de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Derechos reservados:
© 1992 Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España.
© 1987 Ediciones Repla, S.A.
General Francisco Murguía 7
06170 México, D.F.

ISBN 968-6165-02-9
ISBN 84-291-7050-2 (Editorial Rever-té, S.A.)

Impreso en México Printed in Mexico

B.D. (U.A.N.L.)
660.2842
C1R

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
BIBLIOTECA DE POSGRADO

PRÓLOGO

En este libro se intenta presentar una introducción al tema de los fenómenos de transporte para estudiantes de ingeniería y ciencia aplicada, mediante el estudio del transporte de cantidad de movimiento (flujo viscoso), transporte de energía (conducción del calor, convección y radiación), y transporte de materia (difusión). Se considera siempre que los medios en los que tienen lugar los fenómenos de transporte son continuos, y apenas si se hace referencia a la explicación molecular de los procesos. Tal tratamiento a base de un medio continuo presenta un interés más inmediato para los estudiantes de ingeniería, pero es preciso tener en cuenta, sin embargo, que ambos puntos de vista (continuo y molecular) son necesarios para adquirir un completo dominio del tema.

Es evidente que se hacía notar la necesidad de un libro de este tipo, puesto que en la enseñanza ingenieril existe un interés creciente por el conocimiento de los principios físicos fundamentales, en vez de la utilización de un ciego empirismo. La materia objeto de estudio es sin duda lo suficientemente básica como para abarcar diversas disciplinas clásicas. Indudablemente nos ha guiado en nuestro propósito el convencimiento de que el tema de los fenómenos de transporte, al igual que la termodinámica, la mecánica y el electromagnetismo, constituyen una de las claves de las «ciencias ingenieriles». Bien sabido es que el conocimiento de las leyes básicas del transporte de cantidad de movimiento, energía y materia, es importante, si no indispensable, en el análisis ingenieril; por otra parte, el contenido de este libro puede resultar también interesante para los que se dedican a química física, física del suelo, meteorología y biología.

Reconociendo que el tema de los fenómenos de transporte no ha sido considerado hasta ahora como una materia con personalidad propia, nos ha parecido oportuno informar al lector acerca de la forma en que se ha organizado el material. Optamos, después de estudiar diversos métodos de clasificación en colaboración con nuestros colegas de departamento, por seguir el esquema que se indica en la Tabla I. En dicha tabla se puede apreciar que a cada tema se le ha asignado una casilla, siguiendo una ordenación bidimensional, con el fin de hacer resaltar la relación con los demás temas pertenecientes a la misma fila o columna. Según esto, la división del material en columnas, tituladas transporte de cantidad de movimiento, energía y materia, da lugar a un método de clasificación basado en el ente que se transporta. También es posible adoptar otra forma de clasificación, siguiendo las distintas filas, basada en el tipo de transporte que tiene lugar. A la vista de este

esquema resulta evidente que se puede organizar un curso de fenómenos de transporte en cualquiera de éstas dos formas: siguiendo las columnas (Capítulos 1, 2, 3, 4, 5, etc.), o las filas (Capítulos 1, 8, 16, 2, 9, 17, 3, etc.). De hecho, el material del libro está ordenado de tal forma que puede utilizarse uno u otro método. El método de las «columnas» es probablemente más conveniente para principiantes, mientras que para estudiantes adelantados resulta más adecuado el de las «filas».

Dentro de cada capítulo se presentan algunos ejemplos que sirven para ilustrar la utilización de diversas técnicas o proceder a una ampliación del texto. Inmediatamente después de cada capítulo se propone una serie de cuestiones para discutir, cuyo objeto es considerar el tema desde distintos puntos de vista; los problemas que aparecen al final de los capítulos se han agrupado en cuatro clases (representadas mediante un subíndice colocado a continuación del numero del problema):

Clase 1: Problemas consistentes en una aplicación numérica directa de fórmulas del texto.

Clase 2: Problemas que requieren un análisis elemental de las situaciones físicas, basado en la materia expuesta en el capítulo considerado.

Clase 3: Problemas que requieren un análisis algo más elaborado, siendo a veces preciso utilizar información procedente de varios capítulos, o materia que no se trata específicamente en el texto.

Clase 4: Problemas que requieren un análisis matemático en el que intervienen funciones de Bessel, ecuaciones entre derivadas parciales, transformaciones de Laplace, variable compleja y análisis tensorial.

Ciertamente que en ninguno de los problemas de las tres primeras clases 'es preciso un conocimiento matemático más allá de las ecuaciones diferenciales ordinarias y resultan adecuados para un curso de iniciación. Aun para un curso de este tipo es evidente que se puede utilizar más material del libro. De acuerdo con esto y en un intento de servir de guía a los profesores de fenómenos de transporte, se señalan con un asterisco (*) aquellas secciones que resultan adecuadas para exponer en un curso dedicado a estudiantes no graduados. Otras cuestiones que se abordan en el libro resultarán útiles a los estudiantes adelantados y servirán, además, para indicar a los no graduados que los «límites del curso» no coinciden con los «límites del tema».

A lo largo del texto se sigue una notación uniforme y al final se incluye una tabla de la misma. Ocurre, sin embargo, que desgraciadamente no es posible adoptar una notación que esté de acuerdo con la que utilizan todos los lectores, ya que el tema comprende diversos campos que se han desarrollado independientemente. A este respecto conviene aclarar que nuestra notación representa un término medio entre la utilizada por los físicos y los ingenieros.

Ha sido en 1957 cuando, después de una meditada deliberación, el Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Wisconsin decidió inaugurar un curso semestral sobre fenómenos de transporte. Ocurrió entonces que, al no dis-

TABLA 1. DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE LA ORGANIZACIÓN DE LOS FENÓMENOS DE TRANSPORTE

Ente transportado → / Tipo de transporte ↓	Cantidad de movimiento	Energía	Materia
TRANSPORTE DEBIDO **AL MOVIMIENTO MOLECULAR**	1. **VISCOSIDAD** μ **Ley de Newton** de la viscosidad **Variación** de μ con la temperatura, presión y composición. **Teoría** cinética de μ	8. **CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA** k **Ley de Fourier** de la conducción del calor Variación de k con la temperatura, presión y composición. **Teoría** cinética de k	16. **DIFUSIVIDAD** $\mathscr{D}_{AB}$ **Ley** de Fick de la difusión **Variación** de $\mathscr{D}_{AB}$ con la temperatura, presión y composición. **Teoría** cinética do $\mathscr{D}_{AB}$
TRANSPORTE EN **FLUJO LAMINAR** 0 **EN SÓLIDOS,** EN UNA **DIMENSIÓN**	2. **BALANCES** DE **CANTIDAD DE MOVIMIENTO** APLICADOS A "NA **ENVOLTURA** **Perfiles** de velocidad Velocidad media **Densidad** de flujo de cantidad de movimiento en superficies.	9. **BALANCES** DB **ENERGÍA APLICADOS A** UNA **ENVOLTURA** **Perfiles** de temperatura Temperatura media **Densidad** de Rujo de enerpla en superficies.	17. BALANCES DE **MATERIA APLICADOS A** UNA **ENVOLTURA** **Perfiles** de concentración Concentración media **Densidad** de **flujo** de materia en superficies.
TRANSPORTE EN UN MEDIO CONTINUO **ARBITRARIO**	3. ECUACIONES DE VARIACIÓN **(ISOTÉRMICAS)** **Ecuación** de continuidad **Ecuación** de movimiento **Ecuación** de energía (isotérmica)	10. ECUACIONES DE **VARIACIÓN** (NO **ISOTÉRMICAS)** **Ecuación** de continuidad **Ecuación** de movimiento para conveccion libre y forzada **Ecuación** de energía (no isotérmica)	18. **ECUACIONES DE VARIACIÓN (VARIOS COMPONENTES)** **Ecuación** de continuidad para cada especie **Ecuación** de movimiento para convección libre y forzada **Ecuación** de energía (varios componentes)
TRANSPORTE EN FLUJO LAMINAR 0 EN SÓLIDOS, CON DO.9 **VARIABLES INDEPENDIENTES**	4. **TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO** CON **DOS VARIABLES INDEPENDIENTES** **Flujo viscoso** en estado no estacionario Flujo viscoso bidimensional **Flojo bidimensional ideal** **Transporte** de cantidaddemovimiento de capa límite	11. **TRANSPORTE** D E **ENERGÍA** CON DOS **VARIABLES** INDEPENDIENTES **Conducción** del calor en estado no estacionario **Conducción** del calor en flujo viscoso **Conducción** bidimensional del calor en sólidos **Transporte** de energía de capa límite	19. **TRANSPORTE** DE MATERIA CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES **Difusión** en estado no estacionario **Difusión** en flujo viscoso. **Difusión** bidimensional en sólidos **Transporte** de materia de capa límite
TRANSPORTE EN FLUJO **TURBULENTO**	5. **TRANSPORTE TURBULENTO DE CANTIDAD** D I **MOVIMIENTO** Ajuste de tiempo de las ecuaciones de variación **Viscosidad** de remolino **Perfiles** turbulentos de velocidad	12 TRANSPORTE TURBULENTO 20. TRANSPORTE **TURBULENTO** DE ENERGÍA Ajuste de tiempo de las ecuaciones de variación **Conductividad** calorífica de remolino Perfiles turbulentos de temperatura	20. TRANSPORTE **TURBULENTO** DE MATERIA Ajuste de tiempo de las ecuaciones de variación **Difusividad** de remolino **Perfiles** turbulentos de concentración
TRANSPORTE ENTRE DOS FASES	6. **TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE INTERFASE** **Factor** de fricción f **Correlaciones** adimensionales	13. **TRANSPORTE DE ENERGÍA DE INTERFASE** **Coeficiente** de transmisión de calor h **Correlaciones** adimensionales (convección libre y forzada)	21. TRANSPORTE DE **MATERIA DE** INTERFASE Coeficiente de transferencia de materia k_c **Correlaciones** adimensionales (convección libre y forzada)
TRANSPORTE POR RADIACIÓN	Los *números* se *refieren* a los *capítulos del* libro	14. **TRANSPORTE** DE **ENERGÍA RADIANTE** **Ley de Planck** do la radiación. **Ley de Stefan-Boltzmann** Problemas geométricos **Radiación** a través de medios absorbentes	*Este libro se puede estudiar siguiendo las «columnas» o las «filas»*
TRANSPORTE EN **SISTEMAS** DE **FLUJO GRANDES**	7. **BALANCES MACROSCÓPICOS (ISOTÉRMICOS)** **Balance** de materia **Balance** de cantidad de movimiento Balance de energía **mecánica** (ecuación de Bernoulli)	15. **BALANCES MACROSCÓPICOS** (NO **ISOTÉRMICOS)** Balance de materia Balance de cantidad de movimiento **Balance de energía** mecánica y total	22. **BALANCES MACROSCÓPICO (VARIOS COMPONENTES)** **Balance de materia** para cada especie **Balance de** cantidad de movimiento **Balance de energía mecánica** y total

poner de texto, se prepararon unas notas a multicopista para los estudiantes, y en el otoño de 1958 se publicaron bajo el título de ***Notes on Transport Phenomena.*** Utilizadas también estas notas por otras universidades, nos hemos beneficiado enormemente de los comentarios que nos han enviado estudiantes y profesores.

Genéricamente, este libro es el resultado de una revisión exhaustiva de las Notes ***on Transport Phenomena.*** El texto se ha redactado de nuevo, se han reorganizado totalmente algunos capítulos y se han añadido muchos problemas y ejemplos. Numerosos han sido los cambios introducidos, la mayor parte de los cuales obedecen a un intento de proporcionar un texto más asequible a los estudiantes no iniciados.

Madison, Wisconsin

R. BYRON BIRD
WARREN E. STEWART
EDWIN N. LIGHTFOOT

AGRADECIMIENTOS

A la realización de este libro han contribuido directa o indirectamente muchas personas, algunas de tas cuales queremos mencionar especialmente:

Nuestro agradecimiento al Profesor 0. A. Hougen y al Decano W. R. Marshall, Jr., de la Universidad de Wisconsin, por su perseverante interés en el campo de los fenómenos de transporte y su entusiasmo por incrementar la enseñanza de esta materia.

El Profesor R. A. Ragatz, Chairman del Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Wisconsin, nos ha ayudado en la resolución de los problemas administrativos inherentes a la introducción de este curso en el nuevo plan de estudios de ingeniería química, y nos ha permitido disponer de algún tiempo adicional para la preparación del manuscrito.

Nuestros colegas, los Profesores R. J. Altpeter, C. C. Watson, W. K. Neill y E. J. Crosby, que han colaborado con nosotros en el desarrollo, del curso sobre fenómenos de transporte para estudiantes no graduados, nos han proporcionado sugerencias muy valiosas.

El Profesor J. E. Powers y sus alumnos de la Universidad de Oklahoma, así como el Profesor J. Dranoff y sus alumnos de la Northwestern University nos han enviado detalladas revisiones de las ***Notes on Transport Phenomena.***

El Profesor Eric Weger (Johns Hopkins University) y el Profesor K. M. Watson (Illinois Institute of Technology) nos han brindado también sus comentarios acerca de su experiencia en la enseñanza con las ***Notes on Transport Phenomena.***

Muchos de nuestros estudiantes han leído ciertos capítulos del manuscrito de este libro y han contribuido a la exactitud del texto final: Donald R. Woods, Allyn J. Ziegenhàgeń, David 0. Edwards, Paul F. Korbach, Donald W. McEachern, Rosendo J. Sánchez Palma, James P. Hutchins, Raffi M. Turian, Davis W. Hubbard, Boudewijn van Nederveen, Willam A. Hunt, John P. Lawler. Por otra parte, los siguientes estudiantes han comprobado los enunciados y soluciones de todos los problemas de las Clases 1 y 2: Vipin D. Shah, Thomas J. Sadowski, Richard H. Weaver, Gary F. Kuether.

Los Profesores J. 0. Hirschfelder y C. F. Curtiss de la Universidad de Wisconsin, con quienes hemos mantenido una agradable relación durante muchos años, han orientado nuestro departamento de ingeniería química hacia el tema de los fenómenos de transporte, con la introducción hace unos diez años de un curso de fenómenos de transporte para estudiantes graduados. En cierto modo, el curso actual desciende directamente del suyo.

El Profesor H. Kramers (Technische Hogeschool. Delft, Holanda), preparó en 1956 unas notas de clase tituladas *Physische Transportverschijnselen*, que representan el primer intento que conocemos acerca de la enseñanza de fenómenos de transporte a estudiantes de ingeniería. Uno de nosotros (R. B. Bird) ha tenido el placer de pasar un semestre en el laboratorio del Profesor Kramers como Fulbright Lecturer y Guggenheim Fellow, durante el cual se ha beneficiado mucho de las discusiones sobre la enseñanza de los fenómenos de transporte.

La señorita Jeanne 0. Lippert merece nuestro mejor agradecimiento por haber mecanografiado la mayor parte del manuscrito y algunas de sus partes varias veces. También estamos en deuda con Mr. Stuart E. Schreiber por su incansable esfuerzo en la copia y disposición del conjunto original de notas. Finalmente, deseamos agradecer a la señorita Ellen Gunderson la asistencia que nos ha prestado en la preparación del manuscrito.

K. B. B.
W. E. S.
E. N. L.

INDICE GENERAL

PRIMERA PARTE. TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

capítulo 1. **Viscosidad y mecanismo del transporte de cantidad de movimiento.. . .** 1-3

*§1.1. Ley de Newton de la viscosidad. 1-3

Ejemplo 1.1-1. Cálculo de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, 1-7

*§1.2. Fluidos no-newtonianos 1-10

*§1.3. Influencia de la presión y la temperatura sobre la viscosidad.. 1-16

Ejemplo 1.3-1. Estimación de la viscosidad a partir de lás propiedades críticas, 1-19

Ejemplo 1.3-2. Efecto de la presión sobre la viscosidad de los gases, 1-19

51.4. Teoría de la viscosidad de los gases a baja densidad. 1-20

Ejemplo 1.4-1. Cálculo de la viscosidad de un gas a baja densidad, 1-25

Ejemplo 1.4-2. Predicción de la viscosidad de una mezclagaseosa a baja densidad, 1-26

§1.5. Teoría de la viscosidad de los líquidos 1-27

Ejemplo 1.5-1. Estimación de la viscosidad de un liquido puro, 1-30

Capítulo 2. **Distribuciones de velocidad en flujo laminar.. . . . . 2-1**

*§2.1. Balances envolventes de cantidad de movimiento: condiciones limite.. 2-2

* 52.2. Flujo de una película descendente.. 2-4

Ejemplo 2.2-1. Cálculo de la velocidad de película, 2-8

Ejemplo 2.2-2. Película descendente con viscosidad variable, 2-9

* 82.3. Flujo, a través de un tubo circular.. 2-10

Ejemplo 2.3-1. Determinación de la viscosidad a partir de datos de flujo en un capilar, 2-15

Ejemplo 2.3-2. Flujo de Bingham en un tubo capilar, 2-16

*§2.4. Flujo a través de una sección de corona circular.. 2-18

§2.5. Flujo adyacente de dos fluidos inmiscibles.. 2-22

* §2.6. Flujo reptante alrededor de una esfera sólida. 2-25

Ejemplo 2.6-1. Determinación de la viscosidad a partir de la velocidad final de caida de una esfera, 2-28

Capítulo 3. **Las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos 3-1**

*§3.1. La ecuación de continuidad.. 3-4

*§3.2. La ecuación de movimiento.. 3-6

§3.3. La ecuación de energía mecánica.. 3-12

*§3.4. Las ecuaciones de variación en coordenadas curvilíneas.. 3-13

*§3.5. Utilización de las ecuaciones de variación para el planteamiento de problemas de flujo estacionario.. 3-23

*Ejemplo 3.5-1. Flujo tangencial de un fluido newtoniano en tubos concéntricos, 3-25

*Ejemplo 3.5-2. Forma de la superficie de un líquido que gira, 3-28

Ejemplo 3.5-3. Relaciones del par y distribución de velocidad en el viscosímetro de plato y cono, 3-30

83.6. Las ecuaciones de variación para flujo no-newtoniano incompresible . . 3-33

Ejemplo 3.6-1. Flujo tangencial de un plástico de Bingham en tubos concéntricos, 3-35

Ejemplo 3.6-2. Componentes del tensor de densidad de flujo de cantidad de movimiento, para el flujo radial no-newtoniano entre dos discos paralelos, 3-38

*§3.7. Análisis dimensional de las ecuaciones de variación.. 3-38

*Ejemplo 3.7-1. Predicción de la profundidod del vórtice en un tanque agitado, 3-40

Capítulo 4. Distribuciones de velocidad coa más de una variable independiente 4-1

*§4.1. Flujo viscoso no estacionario.. 4-1

*Ejemplo 4.1-1. Flujo en las proximidades de una pared que se pone súbitamente en movimiento, 4-2

Ejemplo 4.1-2. Flujo laminar no estacionario, en un tubo circular, 4-4

§4.2. Flujo viscoso estacionario con dos componentes de la velocidad que no desaparecen: la función de corriente.. 4-8

Ejemplo 4.2-1. «Flujo reptante» alrededor de una esfera, 4-10

$54.3. Flujo potencial bidimensional en estado estacionario.. 4-12

Ejemplo 4.3-1. Flujo alrededor de un cilindro, 4-14

Ejemplo 4.3-2. Flujo en un canal rectangular, 4-16

$4.4. Teoría de la capa límite 4-19

Ejemplo 4.4-1. Flujo en las proximidades de una pared que se pone bruscamente en movimiento, 4-19

Ejemplo 4.4-2. Flujo en las inmediaciones del borde de ataque de una ldmina plana, 4-21

Capítulo 5. Distribución de velocidad ea flujo turbulento.. 5-1

*§5.1. Fluctuaciones y magnitudes de tiempo ajustado.. 5-2

*§5.2. Ajuste de tiempo de las ecuaciones de variación para un fluido incompresible 5-6

*§5.3. Expresiones semiempíricas para los esfuerzos de Reynolds.. 5-8

*Ejemplo 5.3-1. Deducción de la ley de distribución logarítmica para el flujo en un tubo (lejos de la pared), 5-10

*Ejemplo 5.3-2. Distribución de velocidad para el flujo en un tubo (cerca de la pared), 5-11

*Ejemplo 5.3-3. Valor relativo de la viscosidad molecular y la viscosidad de remolino, 5-13

$5.4. El tensor de correlación de segundo orden y su propagación (la ecuación de von Kármán-Howarth) 5-14

Ejemplo 5.4-1. Calda de turbulencia detrás de una rejilla, 5-22

Capitulo 6. Transporte de interfase en sistemas isotérmicos 6-1

*§6.1. Definición de factores de fricción 6-2

*§6.2. Factores de fricción para el flujo en tubos.. 6-3
*Ejemplo 6.2-1. Diferencia de presión necesaria para una determinada velocidad de flujo, 6-9
*Ejemplo 6.2-2. Velocidad de flujo para una determinada diferencia de presión, 6-10
*§6.3. Factores de fricción para el flujo alrededor de esferas.. 6-11
*Ejemplo 6.3-1. Determinación del didmetro de una esfera descendente, 6-16
§6.4. Factores de fricción para columnas de relleno.. 6-17

Capítulo 7. Balances macroscópicos en sistemas isotérmicos 7-1
*§7.1. Balance macroscópico de máteria 7-2
*§7.2. Balance macroscópico de cantidad de movimiento.. 7-3
*§7.3. Balance macroscópico de energía mecánica (ecuación de Bernoulli). . . . 7-4
Ejemplo 7.3-1. Deducción del balance de energía mecánica para flujo estacionario incompresible, 7-6
*§7.4. Estimación de las pérdidas por fricción 7-7
*Ejemplo 7.4-1. Potencia necesaria para el flujo en una conducción, 7-11
*§7.5. Utilización de los balances macroscópicos para el planteamiento de problemas de flujo estacionario.. 7-12
*Ejemplo 7.5-1. Aumento de presión y perdidas por fricción en un ensanchamiento brusco, 7-12
*Ejemplo 7.5-2. Eficacia de un eyector liquido-liquido, 7-14
*Ejemplo 7.5-3. Fuerza que actúa sobre la curvatura de una tubería, 7-16
'Ejemplo 7.5-4. Flujo isotérmico de un liquido a través de un orificio, 7-18
§7.6. Utilización de los balances macroscópicos para plantear problemas de flujo no estacionario.. 7-20
Ejemplo 7.6-1. Tiempo de vertido para el flujo en un embudo, 7-20
Ejemplo 7.6-2. Oscilaciones de un manómetro amortiguado, 7-23

SEGUNDA PARTE. TRANSPORTE DE ENERGÍA

Capítulo 8. Conductividad calorífica y mecanismo del transporte de energía 8-3
*§8.1. Ley de Fourier de la conducción del calor.. 8-3
*Ejemplo 8.1-1. Medida de la conductividad calorífica, 8-8
*§8.2. Variación de la conductividad calorífica de gases y líquidos con la temperatura y la presión 8-10
*Ejemplo 8.2-1. Efecto de la presión sobre la conductividad calorífica, 8-12
§8.3. Teoría de la conductividad calórifica de los gases a baja densidad. 8-14
Ejemplo 8.3-1. Cálculo de la conductividad calorífica de un gas monoatómico a baja densidad, 8-19
Ejemplo 8.3-2. Estimación de la conductividad calorífica de un gas poliatómico a baja densidad, 8-20
Ejemplo 8.3-3. Prediccidn de la conductividad calorífica de una mezcla gaseosa a baja densidad, 8-20
§8.4. Teoría de la conductividad calorífica de líquidos.. 8-21
Ejemplo 8.4-1. Prediccidn de la conductividad calorifica de un líquido, 8-23
§8.5. Conductividad calorífica de sólidos 8-23

Capítulo 9. **Distribución de temperatura en sólidos y en el flujo laminar.** 9-1

*§9.1. Balance de energía aplicado a una envoltura: condiciones límite.. 9-2
*§9.2. Conducción del calor con un manantial calorífico de origen eléctrico.. 9-3

Ejemplo 9.2-1. Voltaje necesario para producir un determinado aumento de temperatura en un alambre calentado por una corriente eléctrica, 9-7
Ejemplo 9.2-2. Calentamiento eléctrico de un alambre en el que varian las conductividades calorífica y eléctrica con la temperatura, 9-8

§9.3. Conducción del calor con un manantial calorífico de origen nuclear.. . 9-10
* 59.4. Conducción del calor con un manantial calorífico de origen viscoso.. . . . 9-14
§9.5. Conducción del calor con manantial calorífico de origen químico.. . . . 9-16
*§9.6. Conducción del calor a través de paredes compuestas: suma de resistencias 9-21

Ejemplo 9.6-1. Paredes cilíndricas compuestas, 9-24

09.7. Conducción de calor en una aleta de enfriamiento.. 9-26

Ejemplo 9.7-1. Error en la medida de un termopar, 9-29

* §9.8. Convección forzada 9-31
*§9.9. Convección libre.. 9-36

capítulo 10. **Las ecuaciones de variación para sistemas no isotérmicos** **10-1**

• 0001. Las ecuaciones de energía. 10-2
*§10.2. La ecuación de energía en coordenadas curvilíneas **10-9**
'010.3. Las ecuaciones de movimiento para convección forzada y convección libre en el fluio no isotérmico 10-9
*§10.4. **Resumen de** las **ecuaciones** de variación.. . . . . **10-13**
Uso de las ecuaciones de variacibn en los problemas de **transmisión** de calor en estado estacionario.. 10-13

Ejemplo 10.5-1. Flujo tangencial en tubos concéntricos con generación de calor origen viscoso. 10-17
Ejemplo 10.5-2. Flujo estacionario de una película no isotérmica, 10-19
Ejemplo 10.5-3. Enfriamiento por transpiración, 10-20
Ejemplo 10.5-4. Transmisión de calor por convección libre desde una lámina vertical, 10-23
Ejemplo 10.5-5. Flujo compresible unidimensional: gradientes de velo- - cidad, temperatura-y presión en una onda de choqueestacionaria, 10-26
Ejemplo 10.5-6. Procesos adiabáticos sin fricción para un gas ideal, 10-30

*§10.6. **Análisis** dimensional de las ecuaciones **de variación** **10-31**

Ejemplo 10.6-1. Transmisión de calor por convección forzada en un tanque agitado, 10-32
Ejemplo 10.6-2. Temperatura de la superficie de una espiral de calentamiento eléctrico, 10-34

Capítulo 11. **Distribuciones de temperatura con más de una variable independiente** **11-1**

*§11.1. Conducción no estacionaria del calor en sólidos.. 11-1

Ejemplo 11.1-1. Calentamiento de una lámina semiinfinita, 11-2
Ejemplo II. 1-2. Calentamiento de una lámina finita, 11-3
Ejemplo 11.1-3. Enfriamiento de una esfera que está en contacto con un fluido fuertemente agitado, 11-7

§11.2. **Conducción** del calor en estado estacionario para el flujo laminar de un fluido viscoso. 11-10

Ejemplo 11.2-1. Flujo laminar en un tubo con densidad de flujo de calor constante en la pared, 1 1-1 1
Ejemplo 11.2-2. Flujo laminar en un tubo ron densidad de flujo de calor constante en la pared: Solución asintótica para distancias pequeñas, 11-12

§11.3 Flujo potencial bidimensional estacionario de calor en sólidos. 11-14
Ejemplo 11.3-1. Distribución de temperatura en la pared, 1 1-1 5
811.4. Teoría de la capa límite. ll-16
Ejemplo 11.4-1. Transmisión de calor por convección forzada en el flujo laminar a lo largo de una lámina plana calentada, ll-16

capítulo 12. **Distribuciones de temperatura en flujo turbulento.** 12-1
*§12.1. Fluctuaciones de temperatura y temperatura de tiempo ajustado. 12-1
*§12.2. Ajuste de tiempo de; la ecuación de energía. 12-3
*§12.3. Expresiones semiempuicas para la densidad de flujo turbulento de energía, 12-5
**Ejemplo 12.3-1. Perfiles de temperatura para el flujo turbulento estacionario en tubos circulares lisos,* 12-6
$12.4. La doble correlación de temperatura y su propagación: ecuación de Corrsin 12-11
Ejemplo 12.4-1. Ecuación de decaimiento para la doble correlación de temperatura, 12-13

Capítulo 13. **Transporte de interfase en sistemas no isotérmicos** , ... 13-1
*§13.1. Definición del coeficiente de transmisión de calor. 13-2
**Ejemplo 13.1-1. Cálculo de coeficientes de transmisión de calor a partir de datos experimentales,* 13-6
*§13.2. Coeficientes de transmisión de calor para convección forzada en tubos. . 13-8
**Ejemplo 13.2-1. Diseño de un calentador tubular,* 13-18
*§13.3. Coeficiente de transmisión de calor para convección forzada alrededor de objetos sumergidos. 13-20
813.4. Coeficientes de transmisión de calor para convección forzada a través de lechos de relleno. . . . . 13-24.
*§13.5. Coeficientes de transmisión de calor para convección libre. 13-25
**Ejemplo 13.5-1. Pérdida de calor por convección libre desde una tubería horizontal. 13-28*
§13.6. Coeficientes de transmisión de calor para condensación de vapores puros sobre superficies sólidas. 13-29
Ejemplo 13.6-1. Condensación de vapor de agua sobre una superficie vertical, 13-32

capítulo 14. **Transporte de energía por radiación.** 14-1
*§14.1. El espectro de radiación electromagnética. 14-2
*§14.2. Absorción y emisión en superficies sólidas. 14-4
*§14.3. Ley de distribución de Planck, ley de desplazamiento de Wien, y la ley de Stefan-Bohzmann. 14-8
**Ejemplo 14.3-1. Temperatura y emisión de energía radiante del Sol,* 14-12
*14.4. Radiación directa entre cuerpos negros en el vacío que están a diferente temperatura. 14-13
**Ejemplo 14.4-1. Estimación de la constante solar,* 14-19
**Ejemplo. 14.4-2. Transmisión de energía radiante entre discos, 14-19*
‘14.5. Radiación entre cuerpos no negros que están a distinta temperatura . . 14-20
**Ejemplo 14.5-1. Escudos de radiación, 14-22*
**Ejemplo 14.5-2. Pérdidas de calor por radiación y convección libre en una tuberia horizontal, 14-24*
Ejemplo 14.5-3. Convección y radiación combinadas, 14-24

§14.6. Transporte de energía radiante en medios absorbentes.. 14-25
Ejemplo 14.6-1. Absorción de un rayo de radiación monocromática, 14-27

Capítulo 15. Balances macroscópicos en sistemas no isotérmicos 15-1

§15.1. El balance macroscópico de energía 15-2
*§15.2. El balance macroscópico de energía mecánica (Ecuación de Bernoulli). 15-4
*§15.3. Resumen de los balances macroscópicos para fluidos puros.. 15-8
*§15.4. Utilización de los balances macroscópicos para la resolución de problemas de estado estacionario.. 15-8
*Ejemplo 15.4-1. Enfriamiento de un gas ideal, 15-8
*Ejemplo 15.4-2. Cambiadores de calor de corrientes paralelas y en contracorriente, 15-11
*Ejemplo 15.4-3. Potencia necesaria para bombear un fluido compresible a través de una tubería de grandes dimensiones, 15-13
Ejemplo 15.4-4. Mezclo de dos corrientes de gases ideales, 15-15
*Ejemplo 15.4-5. Flujo de fluidos compresibles a través de orificios, 15-17
§15.5. Utilización de los balancea macroscópicos para la resolución de problemas de estado no estacionario. 15-19
Ejemplo 15.5-1. Cakntamiento de un líquido en wi tanque agitado, 15-19
Ejemplo 15.5-2. Operación de un sistema sencillo de control de temperatura, 15-22
Ejemplo 15.5-3. Expansión libre de una carga de un fluido compresible, 15-26

TERCERA PARTE. TRANSPORTE DE MATERIA

Capítulo 16. Difusividad y mecanismos del transporte de materia 16-3

*§16.1. Definiciones de concentraciones, velocidades y densidades de flujo de materia 16-4
Ejemplo 16.1-1. Relaciones entre las densidades de flujo molares, 16-9
*§16.2. Ley de Fick de la difusión.. 16-10
*§16.3. Variación de la difusividad con la presión y la temperatura.. 16-13
*Ejemplo 16.3-1. Estimacidn de ka difusividad a baja densidad, 16-15
*Ejemplo 16.3-2. Estimación de la difusividad a alta densidad, 16-16
§16.4. Teoría de la difusión ordinaria en gases a baja densidad.. 1616
Ejemplo 16.4-1. Cálculo de la difusividad a baja densidad, 16-21
016.5. Teoría de la difusión ordinaria en líquidos.. 16-22
Ejemplo 16.5-1. Estimación de la difusividad para una mezcla líquida binaria, 16-24

Capítulo 17. Distribuciones de concentración en sólidos y en flujo laminar 17-1

*§17.1. Balances de materia aplicados a una envoltura: condiciones límite.. 17-3
● §17.2. Difusión a través de una película gaseosa estancada. 71-4
*Ejemplo 17.2-1. Determinación de la difusividad, 17-8
Ejemplo 17.2-2. Difusión a través de una película esférica no isotérmica, 17-9
*§17.3. Difusión con reacción química heterogénea 17-11
● lSjemplo 17.3-1. Difusión con reacción heterogénea lenta, 17-13

*§17.4. Difusión con reacción química homogénea 17-14
*Ejemplo 17.4-1. Absorcidn de un gas con reacción química en un tanque agitado, 17-16.

*§17.5. Difusión en una película líquida descendente: transferencia de materia por convección forzada 17-20
*Ejemplo 17.5-1. Absorción de burbujas ascendentes de un gas, 17-24

§17.6. Difusión y reacción química en el interior de un catalizador poroso: El «factor de eficacia» 17-25

Capítulo 18. Las ecuaciones de variación para sistemas de varios componentes 18-1

*§18.1. Las ecuaciones de continuidad para una mezcla binaria 18-1
*§18.2. La ecuación de continuidad de A en coordenadas curvilíneas 18-6
§18.3. Las ecuaciones de variación para sistemas de varios componentes en función de las densidades de flujo 18-6
§18.4. Las densidades de flujo para sistemas de varios componentes en función de las propiedades de transporte 18-11
§18.5. Utilización de las ecuaciones de variación para el planteamiento de problemas de difusión 18-20
Ejemplo 18.5-1. Transferencia simultánea de calor y materia, 18-20
Ejemplo 18.5-2. Difusión térmica, 18-22
Ejemplo. 18.5-3. Difusión de presión, 18-24
Ejemplo 18.5-4. Difusión forzada, 18-25
Ejemplo 18.5-5. Difusión ordinaria en un sistema de tres componentes con reaccidn química heterogénea, 18-27
*§18.6. Análisis dimensional de las ecuaciones de variación para una mezcla isotérmica de dos fluidos 18-
*Ejemplo 18.6-1. Mezcla de fluidos miscibles, 18-30

Capítulo 19. Distribuciones de concentración con más de una variable independiente . . 19-1
§19.1. Difusión en estado no estacionario 19-3
Ejemplo 19.1-1. Evaporación en estado no estacionario, 19-3
Ejemplo 19.1-2. Difusión en estado no estacionario con reacción de primer orden, 19-7
Ejemplo 19.1-3. Absorción gaseosa con reaccidn química rápida, 19-8
§19.2. Teoría de la capa límite: método aproximado de von Kármán 19-11
Ejemplo 19.2-1. Evaporación en estado no estacionario en el seno de una mezcla de varios componentes, 19-11
Ejemplo 19.2-2. Difusión y reaccidn química en el flujo laminar isotérmico a lo largo de una lámina plana soluble, 19-15
§19-3. Teoría de la capa límite: soluciones exactas para transferencia simultanea de calor, materia y cantidad de movimiento 19-18
Ejemplo 19.3-1. Cálculo de la velocidad de transferencia de materia, 19-30

Capítulo 20. Distribuciones de concentración en flujo turbulento 20-1
*§20.1. Fluctuaciones de concentración y la concentración de tiempo ajustado. 20-1
*§20.2. Ajuste de tiempo de la ecuación de continuidad de A 20-2
§20.3. Expresiones semiempíricas para la densidad de flujo turbulento de materia. 20-3
Ejemplo 20.3-1. Perfiles de concentración para el flujo turbulento en tubos circulares lisos, 20-5
Ejemplo 20.3-2. Evaporación de amoniaco en una columna de pared mojada, 20-5

§20-4. La doble correlación de concentración y su propagación: ecuación de Corrsin..... 20-8

Capitulo 21. Transporte de interfase en sistemas de varios componentes.. 21-1

*§21.1. Definición de coeficientes binarios de transferencia de materia en una sola fase..... 21-2

*§21.2. Corielaciones de coeficientes binarios de transferencia de materia en una sola fase para bajas velocidades de transferencia de materia.. 21-8

*Ejemplo 21.2-1. Evaporación de una gota que cae libremente, 21-14

*Ejemplo 21.2-2. El psicrómetro de bulbo húmedo y seco, 21-15

*§21-3. Definición de coeficientes binarios de transferencia de materia en dos fases para bajas velocidades de transferencia de materia.. 21-18

*§21.4. Definición de los coeficientes de transferencia para elevadas velocidades de transferencia de materia.. 21-22

§21.5. Coeficientes' de transferencia para elevadas velocidades de transferencia de materia: Teoría de película. . . . . ..*..... 21-24

Ejemplo 21.5-1. Evaporación rápida de un liquido puro, 21-33

Ejemplo 21.5-2. Utilización de factores de corrección en la evaporación de una gotita, 21-34

Ejemplo 21.5-3. Comportamiento del bulbo húmedo a altas velocidades de transferencia de materia, 21-34

§21.6. Coeficientes de transferencia para altas velocidades de transferencia 'de materia: Teoría de penetración..... 21-36

§21.7. Coeficientes de transferencia para altas velocidades de transferencia de materia: Teoría de capa límite..... 2140

Ejemplo 21.7-1. Evaporación rápida desde una superficie plana, 21-45

§21.8. Coeficientes de transferencia en sistemas de varios componentes.. 21-45

Ejemplo 21.8-1. Transferencia de materia en un reactor catalítico de lecho fijo, 21-47

Capítulo 22. Balances macroscópicos en sistemas de varios componentes.. 22-1

*§22.1. Los balances macroscópicos de materia.. 22-1

* Q2.2. El balance macroscópico de cantidad de movimiento.. 224

'$22.3. El balance macroscópico de energía.. 224

*§22.4. El balance macroscópico de energía mecánica. 22-5

*§22.5. Utilización de los balances macroscópicos para resolver problemas de estado estacionario.. . . . . 22-6'

*Ejemplo 22.5-1. Balance de energía en un convertidor de dióxido de azufre, 22-6

*Ejemplo 22.5-2. Altura de una torre de absorción de relleno, 22-8

Ejemplo 22.5-3. Expansión de una mezcla gaseosa reactiva a través de una boquilla adiabática sin fricción, 22-13

$22.6. Utilización de los balances macroscópicos para la resolución de problemas de estado no estacionario.. 22-17

Ejemplo 22.6-1. Puesta en marcha de un reactor químico, 22-17

Ejemplo 22.6-2. Operación de una columna de relleno en estado no estacionario, 22-18

Epílogo..... A-1

Apéndice A. **Resumen** de **notación** vectorial y **tensorial** A-3

§A.1. Las operaciones vectoriales desde un punto de vista **geométrico**..... A-4
§A.2. Las operaciones vectoriales desde un punto de vista analítico..... A-1
Ejemplo A.2-1. Comprobación de una identidad vectorial, A-10

§A.3. Operaciones diferenciales con vectores..... A-11
8A.4. Tensores de segundo orden..... A-15
Ejemplo A.4-1. Comprobación de una identidad tensorial, A-20

§A.5. Teoremas integrales para vectores y tensores..... A-20
BA.6. Componentes de vectores y tensores en coordenadas **curvilíneas**..... A-22
Ejemplo A.6-1. Características de transformación de los productos de vectores y tensores, A-25

§A.7. Operaciones diferenciales en coordenadas curvilíneas..... A-26
Ejemplo A.7-1. Deducción de diversas operaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas, A-26

Apéndice B. Tablas para la predicción de propiedades de transporte..... A-33

§B.1. **Parámetros** de fuerza **intermolecular** y constantes críticas A-34
§B.2. Funciones para la predicción de propiedades de transporte de **gases a** baja densidad A-36

Apéndice C. Constantes y factores de conversión..... A-37

§C.1. Constantes matemáticas A-37
§C.2. Constantes físicas A-37
§C.3. Factores de **conversión** A-38

Notación..... A-47

Indice alfabético de autores..... A-57

Indice alfabético de materias..... A-61

PRIMERA PARTE

Transporte de cantidad de movimiento

CAPÍTULO 1

VISCOSIDAD Y MECANISMO DEL TRANSPORTE DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La primera parte de este libro trata del flujo de fluidos viscosos. La propiedad física que caracteriza la resistencia al flujo de los fluidos sencillos *es* la ***viscosidad.*** Cualquiera que haya' adquirido aceite lubrificante de automóvil sabe que unos aceites son mas «viscosos» que otros, y que, ademas, la viscosidad varía con la temperatura. En este primer capítulo se estudian las viscosidades de gases y líquidos desde un punto de vista cuantitativo. Esta información será necesaria de forma inmediata en el Capítulo 2, para la resolución de problemas de flujo viscoso.

Se comienza en § 1 .l por establecer la ley de Newton de ,la viscosidad, presentando algunos valores numéricos, para indicar como varia ésta con las condiciones y naturaleza del fluido. En § 1.2 se estudian brevemente los fluidos no-newtonianos, a los que no es aplicable la ley de la viscosidad de Newton. La influencia de la temperatura y la presión sobre la viscosidad de gases y líquidos se resume en § 1.3. Finalmente, en §§ 1.4 y 1.5 se estudia la viscosidad desde el punto de vista de los procesos moleculares, y se comparan los mecanismos del transporte de cantidad de movimiento en gases y líquidos.

§ 1 .l LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

Consideremos un fluido (líquido o gas) contenido entre dos grandes laminas planas y paralelas, de área A, separadas entre sí por una distancia muy pequeña Y (véase Fig. 1.1 — 1). Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo, pero que al cabo del tiempo $t = 0$, la lamina ipferior se pone en movimiento en la dirección del eje x, con una velocidad constante V. A medida que transcurre el tiempo *el fluido gana cantidad de movimiento, y, finalmente se establece el per51 de velocidad en régimen estacionario, que se indica en la Fig. 1.1 — 1. Una vez alcanzado dicho estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante F para conservar el movimiento de la lámina inferior. Esta fuerza viene dada por la siguiente expresión (suponiendo que el flujo es laminar) :

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \qquad (1.1\text{–}1)$$

Es decir, que la fuerza por unidad de área es proporcional a la disminución de la velocidad con la distancia Y. La constante de proporcionalidad μ se denomina *viscosidad* del fluido.

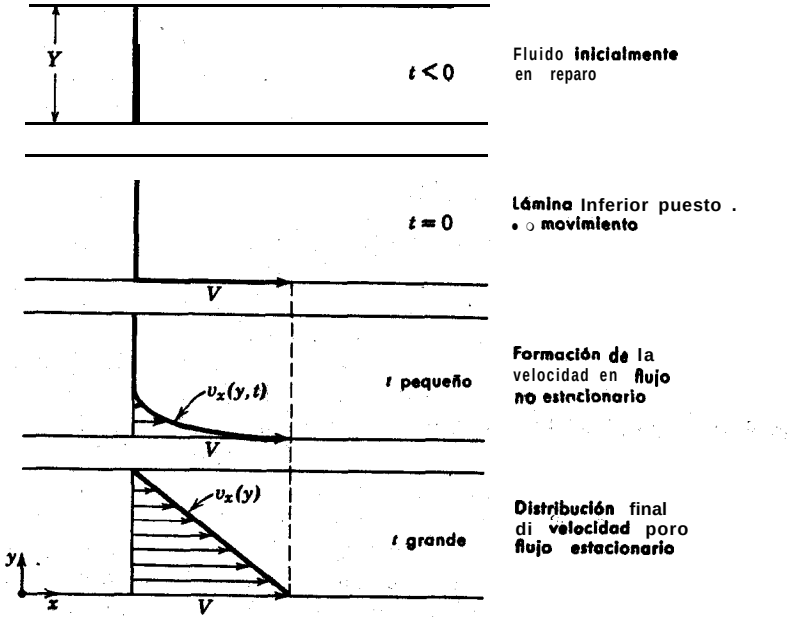


Fig. 1.1-1. Formación del perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido contenido entre dos láminas.

Para la posterior utilización de la Ec. 1.1 — 1 es conveniente expresarla en una forma más explícita. El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección x sobre la superficie de un fluido, situada a una distancia constante y, por el fluido existente en la región donde y es menor, se designa por τ_{yx}, y el componente x del vector 'de velocidad del fluido, por v_x. Téngase en cuenta que v_x no es igual a $\partial v/\partial x$; en este libro no se utilizan subíndices para expresar la diferenciación de los componentes de la velocidad. De acuerdo con estos símbolos, la Ec. 1.1 — 1 queda de la siguiente forma'

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \tag{1.1-2}$$

[1] La equivalencia entre estas dos ecuaciones resulta más evidente si se tiene en cuenta que la Ec. 1.1-1 puede expresarse así:

$$\frac{F}{A} = -\mu \frac{v_0 - v}{Y - 0} \tag{1.1-1a}$$

Es decir, que la fuerza de cizalla por unidad de área es proporcional al gradiente negativo de la velocidad local. *Ésta es* la ley *de Newton de la viscosidad,* y los fluidos que la cumplen se denominan ***fluidos newtonianos.*** Todos los gases y la mayor parte de los líquidos sencillos, se comportan de acuerdo con la Ec. 1.1-2. Los fluidos que no obedecen a esta ley sencilla (esencialmente pastas, suspensiones y polímeros de elevado peso 'molecular) se estudian en § 1.2.

Resulta también conveniente interpretar la Ec. 1.1-2 en esta otra forma. En las inmediaciones de la superficie que se (mueve, donde $y = 0$, el fluido adquiere una determinada cantidad de movimiento en la dirección del eje x. Este fluido comunica, a su vez, parte de su cantidad de novimiento a la «capa» adyacente de líquido, dando lugar a que se mantenga en movimiento en la dirección x. Por lo tanto, tiene lugar una transmisión de cantidad de movimiento x a través del fluido en la dirección y, y, por consiguiente, τ_{yx} puede interpretarse también como la densidad de flujo[2] viscoso de cantidad de movimiento x en la dirección y. Esta interpretación esta en íntima relación con la naturaleza de los procesos de transporte de cantidad de movimiento, y se corresponde con el tratamiento que se da más adelante para el transporte de materia y energía. Por otra parte, la densidad de flujo de cantidad de movimiento resulta más conveniente para considerar el signo de τ_{yx}.

De acuerdo con la Ec. 1.1-2, se deduce que la densidad de flujo viscoso de cantidad de movimiento sigue la dirección 'del gradiente negativo de velocidad[3]; es decir, que sigue la dirección de velocidad decreciente. En otras palabras, la cantidad de movimiento' va «cuesta abajo», en el sentido de que desciende de una región de velocidad alta a otra de baja velocidad, de la misma forma que un trineo se deslii desde un lugar elevado hasta otro más bajo, y el calor fluye de una zona caliente hacía otra mas fría. El gradiente de velocidad puede considerarse, por consiguiente, como una «fuerza impulsora» del transporte de cantidad de movimiento.

En los párrafos que siguen nos referiremos a la ley de Newton de la Ec. 1.1-2, unas veces en términos de fuerzas (lo que pone de manifiesto la naturaleza esencialmente mecánica del tema que estamos considerando), y otras; en términos de transporte de cantidad de movimiento (con el fin de resaltar las analogías con el transporte de materia y energía). Este doble punto de vista no crea una dificultad especial, y en cambio, en algunos casos resulta extraordinariamente útil.

En algunas fórmulas que aparecen en los últimos capítulos del libro, resulta conveniente disponer de un símbolo para representar la viscosidad del fluido dividida por su densidad (masa por unidad de volumen), ν con este fin vamos a definir ν

---

[2] La densidad de flujo representa la «velocidad de flujo por unidad de área». La densidad de flujo de cantidad de movimiento tiene, por tanto, las unidades de cantidad de movimiento por unidad de área y unidad de tiempo. El lector podrá comprobar que corresponde a una fuerza por unidad de área.

[3] Una ligera consideración de § 8.1 pone de manifiesto que el comportamiento es el mismo que en la conducción del calor, donde la densidad de flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de temperatura.

$$\nu = \mu/\rho \tag{1.1-3}$$

que es la denominada ***viscosidad cinemática.***

Dedicaremos unas líneas a considerar las unidades de algunas magnitudes que ya hemos definido. El caso más sencillo corresponde al sistema cgs, para el cual[4]

$$\begin{aligned} \tau_{yx}\ [=]\ &\text{dina}\ \mathbf{cm^{-2}} \\ v_x\ [=]\ &\text{cm}\ \mathbf{seg^{-1}} \\ \text{Y}\ [=]\ &\mathbf{cm} \end{aligned} \tag{1.1-4}$$

Puesto que los dos miembros de la Ec. 1 .l -2 han de corresponderse, tanto en sus unidades como en el valor numbico, se pueden deducir las unidades de μ en el sistema cgs, de la siguiente forma:

$$\mu = -\tau_{yx}\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^{-1}\ [=]\ (g_m\,\mathbf{cm^{-1}\ seg^{-2}})\ (\text{cm}\ \mathbf{seg^{-1}\,cm^{-1}})^{-1}$$

$$[=]\ g_m\ \text{cm-t}\ \mathbf{seg^{-1}} \tag{1.1-5}$$

Análogamente,

$$\text{v} = \mu/\varrho\ [\ =]\ \mathbf{cm^2\ seg^{-1}} \tag{1.1-6}$$

La unidad g $\mathbf{cm^{-1}\ seg^{-1}}$, en el sistema cgs, se denomina ***poise;*** la mayor parte de los datos de viscosidad están expresados en esta unidad o en **centipoises** (1 cp = 0,01 poise). La serie análoga de unidades en el sistema Giorgi es

$$\begin{aligned} \tau_{yx}\ [=]\ &\text{newton}\ \mathbf{m^{-2}} \\ v_x\ [=]\ &\text{m}\ \mathbf{seg^{-1}} \\ y\ [=]\ &\mathbf{m} \\ \mu\ [=]\ &\text{kg,}\ \mathbf{m^{-1}\ seg^{-1}} \\ \text{v}\ [\ =]\ &\mathbf{m^2\ seg^{-1}} \end{aligned} \tag{1.1-7}$$

La consistencia de estas unidades viene dada por la Ec. 1.1-2. Pero, como habitualmente no se utiliza el newton como unidad de fuerza, es preferible expresar la Ec. 1.1-2 en esta otra forma:

$$g_c\tau_{yx} = -\mu\frac{dv_x}{dy} \tag{1.1-8}$$

[4] El símbolo [=] debe de leerse «tiene las unidades de»,

en la que

$$\begin{aligned} &\tau_{yx}\ [=]\ \text{kg, m}^{-2} \\ &v_x\ [=]\ \text{m seg}^{-1} \\ &y\ [=]\ \text{m} \\ &\mu\ [=]\ \text{kg,, m}^{-1}\,\text{seg}^{-1} \\ &g_c\ [=]\ (\text{kg}_m/\text{kg}_f)\ (\text{m seg}^{-2})\ \text{o newton/kg}_f \end{aligned} \qquad (1.1\text{-}9)$$

El valor numérico de g_c «el factor gravitacional de conversión», expresado en estas unidades, vale 9,8067. Obsérvese que en la Ec. 1.1-8, $g_c\,\tau_{yx}$ tiene las unidades de newton m^{-2}, y que al dividir por g_c, se obtiene τ_{yx} expresado en kg_fm^{-2}.

Aquí se procederá de acuerdo con la Ec. 1 .l-2, y se sobreentenderá que las unidades utilizadas son las que se han indicado en las Ecs. 1.1—4 ó 1 . 1 — 7. Sin embargo, sería conveniente que el lector utilizase fórmulas en uno y otro sistema, ya que ambos se emplean con frecuencia en la bibliografía técnica. En todos los cálculos prácticos es preciso realizar una minuciosa comprobación de la consistencia dimensional.

Ejemplo 1.14. Cálculo de la densidad de flujo de cantidad de movimiento

Teniendo en cuenta la Fig. 1.1 — 1, calcular la densidad de flujo de cantidad de movimiento en estado estacionario, τ_{yx}, expresada en $\text{kg}_f\ \text{m}^{-2}$, cuando la velocidad V de la lámina inferior, en la dirección positiva del eje x, es 0,3 m/seg, la distancia entre las láminas Y 0,0003 m, y la viscosidad del fluido μ 0,7 cp.

Solución. Puesto que se desea obtener τ_{yx} en $\text{kg}_f\ \text{m}^{-2}$, pasaremos primeramente todos los datos a las unidades de kg_f-m-seg.

$$\begin{aligned} \mu &= (0{,}7\ \text{cp})\ (1{,}0194\times 10^{-4}) \\ &= 7{,}14\times 10^{-5}\ \text{kg}_f\ \text{seg}\ \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Como el perfil de velocidades es lineal,

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\text{AY}} = \frac{-\ 0{,}3\ \text{m seg}^{-1}}{0{,}0003\ \text{m}} = -\ 1000\ \text{seg}^{-1}$$

Substituyendo en la Ec. 1.1—2, queda

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= -\ \mu\,\frac{dv_x}{dy} = -\ (7{,}14\times 10^{-5})\ (-\ 1000) \\ &= 7{,}14\times 10^{-2}\ \text{kg, m}^{-2} \end{aligned}$$

Si se utiliza la Ec. 1.1-8, se convierte μ de la siguiente forma:

$$\mu = (0{,}7\ \text{cp})\ (10^{-3}) = 7\times 10^{-4}\ \text{kg, seg}^{-1}\ \text{m}^{-1}$$

Substituyendo en la Ec. 1.1-8,

$$\tau_{yx} = -\frac{\mu dv_x}{g_c\, dy} = -\frac{7\times 10^{-4}}{9{,}81}(-1000)$$

$$= 7{,}14 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg_f\ m^{-2}}$$

que **coincide con el resultado obtenido a partir de la Ec. 1.1-2.**

En las Tablas 1 .l —1, 1.1-2 y 1.1-3, se presentan algunos datos experimentales de viscosidad de fluidos puros a 1 atm de presións. Obsérvese que, a temperatura ambiente, μ vale aproximadamente 1 cp para el agua' y 0,02 cp para el aire. Véase' también como para los gases a baja densidad, la viscosidad ***aumenta*** con la temperatura, mientras que en el caso de los ***líquidos,*** la viscosidad generalmente ***disminuye*** al aumentar la temperatura. Este diferente comportamiento frente a la temperatura se estudia en § 1.4 y § 1.5 desde un punto de vista molecular; aquí indicaremos tan sólo, que en el caso de los gases (en los que las moléculas recorren distancias grandes entre las colisiones), la cantidad de movimiento se transporta esencialmente por las moléculas que se desplazan libremente, míentias que en los líquidos (en los que las moléculas recorren solamente distancias muy cortas entre las colisiones), el mecanismo principal del transporte de cantidad de movimiento consiste en el choque efectivo de las moléculas.

TABLA 1.1—1

VISCOSIDADES DEL AGUA Y EL AIRE A 1 ATM DE PRESIÓN

	Agua (líq.)[a]		Aire[b]	
Temperatura T(°C)	Viscosidad μ (cp)	Viscosidad cinemática v x 10^2(cm^2 seg^{-1})	Viscosidad μ (cp)	Viscosidad cineinática v X 10^2 (cm* seg^{-1})
0	1,787	1,787	0,01716	13,27
20	1,0019	1,0037	0,01813	15,05
40	0,6530	0,6581	0,01908	16,92
60	0,4665	0,4744	0,01999	18,86
80	0,3548	0,3651	0,02087	20,88
100	0,2821	0,2944	0,02173	22,98

[a] **Calculada a partir de los resultados de R. C. HARDY y R. L. COTTINGTON, *J. Research Nat. Bar. Standards, 42, 573-578* (1949), y J. F. SWINDELLS, J. R. COE, Jr., y T. B. GODFREY, *J. Rescarch Nat. Bar. Standards, 48,* 1-3 1 (1952).**

[b] **Calculada de «Tables of Thermal Properties of Gases», *Nat. Bar. Standards Circ.* 464 (1955), capítulo 2.**

[5] **Datos muy completos se encuentran en: LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Physikochemische Tabellen.***

TABLA 1.1-2

VISCOSIDADES DE ALGUNOS GASES Y **LÍQUIDOS** A LA PRESIÓN **ATMOSFÉRICA**[a]

Substancia	Temperatura T(°C)	Viscosidad μ (cp)	Substancia	Temperatura T (°C)	Viscosidad μ (cp)
Gases			Líquidos		
$i\text{-}C_4H_{10}$	23	0,0076	$(C_2H_5)_2O$	20	0,245
CH_4	20	0,0109[b]	C_6H_6	20	0,647
H_2O	100	0,0127	Br_2	26	0,946
CO_2	20	0,0146[b]	C_2H_5OH	20	1,194
N_2	20	0,0175[b]	Hg	-20	1,547
O_2	20	0,0203[b]	H_2SO_4	25	19,15
Hg	380	0,0654	Glicerina	20	1069

[a] Valores tomados de *N.* A. LANCE, *Handbook of Chemistry*, McGraw-Hill, Nueva York (1956), novena edición, pp. 1658-1664.
[b] H.' L. JOHNSON y K. E. McKloskey, *J. Phys. Chem., 44, 1038 (1940).*

En §§ 1.3; 1.4, y 1.5, se estudia el cálculo de viscosidades de gases y líquidos. Antes de esto, sin embargo, indicaremos brevemente los tipos de desviaciones conocidas que puede presentar la Ec. 1.1-2.

TABLA 1.1-3

VISCOSIDAD DE ALGUNOS METALES **LÍQUIDOS**[a]

Metal	Temperatura T(°C)	Viscosidad μ (cp)
Li	183,4	0,5918
	216,0	0,5406
	285,5	0,4548
Na	103,7	0,686
	250	0,381
	700	0,182
K	69,6	0,515
	250	0,258
	700	0,136

Aleación Na-K	103,7	0,546
56% de Na y 44%	250	0,316
de K en peso	700	0,161
Hg	-20	1,85
	20	1,55
	100	1,21
	200	1,01
Pb	441	2,116
	551	1,700
	844	1,185

[a] Datos tomados de *The Reactor Handbook*, vol. 2, Atomic Energy Comission AECD-3646, U. S. Government Printing Office, Washington D. C. (Mayo 1955), pp. 258 y ss.

§ 1.2. FLUIDOS NO-NEWTONIANOS [1]

De acuerdo con la ley de la viscosidad de Newton (Ec. 1.1-2), al representar gráficamente τ_{yx} frente a $-(dv_x/dy)$ para un fluido determinado, debe de obtenerse una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, y cuya pendiente es la viscosidad del fluido a una cierta temperatura y presión (véase Fig. 1.1-2). En efecto, la experiencia demuestra que para todos los gases y los líquidos homogéneos no polimerizados τ_{yx} es directamente proporcional a $-(dv_x/dy)$. Sin, embargo, existen algunos materiales industrialmente importantes que no se comportan de acuerdo *con* la Ec. 1.1-2. Se conoce a estas substancias con el nombre de fluidos *no-newtonianos.*

El tema del flujo no-newtoniano constituye actualmente una parte de otra ciencia más amplia que es la *reología,* es decir, «la ciencia del flujo y la deformación», que estudia las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, substancias asfálticas y materiales cristalinos. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra. La región comprendida entre ellas corresponde a la deformación y flujo de todos los tipos de materiales pastosos y suspensiones,

El comportamiento reológico, en estado estacionario, de la mayor parte de los fluidos que se indican en la Fig. 1.1 — 1 puede establecerse mediante una forma generalizada[2] de la Ec. 1.1-2

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \tag{1.2-1}$$

en la que η puede expresarse a su vez en función de dv_x/dy o de τ_{yx} indistintamente.

[1] M. REINER, *Deformation, Strain, and Flow*, Interscience, Nueva York (1960); W. PHILIPPOFF, *Viskosität der Kolloide*, Steinkopff, Leipzig (1942).

[2] Para un tratamiento más completo, véase § 3.6.

En las regiones en que η disminuye al aumentar el gradiente de velocidad $(-dv_x/dy)$, el comportamiento se denomina *pseudoplástico; y dilatante* en las que η aumenta con dicho gradiente. Si η resulta independiente del gradiente de velocidad, el fluido se comporta como newtoniano, y entonces $\eta = \mu$ (véase Ec. 1.1–2).

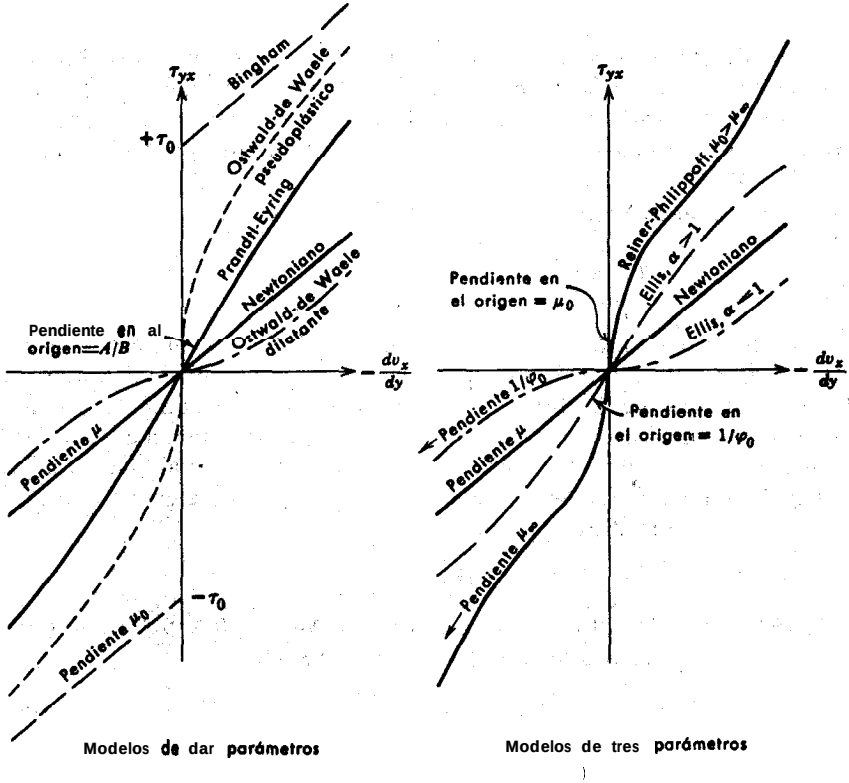


Fig. 1.2-1. Resumen de modelos no-newtonianos en estado estacionario (con fines comparativos se indica también el modelo newtoniano).

Se han propuesto ‘numerosas ecuaciones empíricas o «modelos» para expresar la relación que existe, en estado estacionario, entre τ_{yx} y dv_x/dy. A continuación se presenta ‘un resumen de cinco modelos representativos. Todas las ecuaciones contienen parámetros empíricos positivos, cuyo valor numérico puede determinarse correlacionando los datos experimentales de τ_{yx} frente a dv_x/dy a temperatura y presión constantes.

Modelo de Bingham

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 \qquad \text{si } |\tau_{yx}| > \tau_0 \tag{1.2-2a}$$

$$\frac{dv_x}{dy} \qquad \text{si } |\tau_{yx}| < \tau_0 \qquad (1.2\text{–}2b)$$

La Ec. 1.2−2a se utiliza con signo + si τ_{yx} es positivo, y con signo − si es negativo. Toda substancia que se comporta de acuerdo con este modelo de dos parámetros se denomina ***plástico de Bingham:*** permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es menor de un determinado valor τ_0, por encima del cual se comporta de forma semejante a un fluido newtoniano. Este modelo resulta suficientemente exacto para muchas pastas y suspensiones finas. En la Tabla 1.2− 1 se indican los parámetros de Bingham para suspensiones de partículas de combustibles nucleares en agua pesada.

Modelo de Ostwald-de Waele

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy} \qquad (1.2\text{-}3)$$

Esta ecuación de dos parámetros se conoce también con el nombre de ley ***de la potencia.*** Para $n = 1$ se transforma en la ley de la viscosidad de Newton, siendo $m = \mu$; por consiguiente, la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano. Cuando n es menor que uno el comportamiento es pseudoplltico, mientras que para valores superiores a la unidad es dilatante. En la Tabla 1.2−2 se dan algunos valores aproximados de m y n para distintos fluidos.

TABLA 1.2-1

PARAMETROS DEL PLÁSTICO DE BINGHAM PARA *SUSPENSIONES DE COMBUSTIBLES NUCLEARES"

Material suspendido	Distribución de tamaños de las partículas		$k_1 = \frac{\tau_0}{\phi^4}$	$k_2 = \frac{\ln \mu_0/\mu_w}{\phi}$
	D (micrones)	σ (adimensional)	(dina cm^{-2})	(adimensional)
UO_2	1,4	1,7	7,2 x 10^4	18
U_3O_8	1,3	2,0	11,0 x 10^4	22
$UO_3.H_2O$	1,2	1,9	20,6 x 10^4	22
			$k_3 = \frac{\tau_0}{\phi^3}$	$= \frac{\ln \mu_0/\mu_w}{\phi}$ k_4
			(dina cm^{-2})	(adimensiónal)
ThO_2	0,030	2,7	52,7 x 10^4	24
	0,75	2,8	26,3 × 10^4	14
	1,6	1,5	4,8 x 10^4	12
	2.4	1.7	1.6 x 10^4	12

D = diámetro de la partícula de masa media
σ = desviación standard del ln (diámetro de la partícula) respecto de ln (D)
ϕ = fracción del volumen de sólidos en suspensión
μ_0, τ_0 = parámetros de Bingham para la suspensión
μ_w = viscosidad del agua a la misma presión y temperatura

[a] Tomados de *Fluid Fuel Reactors,* editado por J. A. LANE, H. G. MCPHERSON, y F. MASLAN, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1958). El Dr. D. G. THOMAS ha cooperado en § 4.4. A su amabilidad se deben los valores corregidos de k_2.

Modelo de Eyring

$$\tau_{yx} = A \operatorname{arcsenh}\left(-\frac{1}{B}\frac{dv_x}{dy}\right) \tag{1.2-4}$$

Este modelo de dos parámetros deriva de la teoría cinética de los líquidos, de Eyring[3], que se estudia en § 1.5. El modelo de Eyring predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de τ_{yx}, y tiende asintóticamente a la ley de la viscosidad de Newton cuando τ_{yx} tiende hacia cero, siendo en este caso $\mu = A/B$.

TABLA 1.2-2

PARAMETROS DEL MODELO DE LA POTENCIA PARA VARIOS FLUIDOS A TEMPERATURA AMBIENTE[a]

Composición del fluido (% en peso)	m (dina seg^n cm^{-2})	n (adimensional)
23,3 % de arcilla amarilla de Illinois en agua	55,5	0,229
0,67 % de CMC[b] en agua	3,04	0,716
1,5 % de CMC en agua	31,3	0,554
3,0 % de CMC en agua	92,9	0,566
33 % de cal en agua	71,8	0,171
10 % de napalm en keroseno	42,8	0,520
4 % de pasta de papel en agua	200	0,575
54,3 % de cemento en agua	25,1	0,153

[a] A. B. METZNER, *Advances in Chemical Engineering,* vol. 1, Academic Press, Nueva York (1956), p. 103.
[b] Carboximetilcelulosa

[3] Véase Ec. 1.5–7; para modelos más complejos véase F. H. REE, T. REE, y H. EYRING, *Ind. Eng. Chem.*, *50,* 10364040 (1958).

TABLA 1.2-3

PARÁMETROS DE ELLIS PARA SOLUCIONES DE CARBOXIMETIL CELULOSA EN AGUA"

Concentración de la solución (% en peso)	Temperatura T(°C)	Parámetros de la Ec. 1.2-5: a (adimensional)	φ_0 (cm* seg^{-1} dina^{-1})	φ_1 (cm$^{2\alpha}$ seg^{-1} dina$^{-\alpha}$)	Intervalo experimental del esfuerzo cortante (dina cm^{-2})
4,0 % de CMC bajo"	29,4	1,170	0,1377	0,3211	8 a 440
5,0 % de CMC bajo	29,4	1,337	0,0000	0,0521	8 a 1010
1,5 % de CMC medio	29,4	1,185	0,4210	0,2724	6 a 300
2,5 % de CMC medio	29,4	1,412	0,0383	0,0181	17 a 720
0,6 % de CMC alto	29,4	1,707	0,289 1	0,0280	8 a 270

[a] J. C. SLATTERY, tesis doctoral, Universidad de Wisconsin (1959), p. 79a. Los valores corregidos de φ_0 y φ_1 se deben a la amabilidad del doctor Slattery.

[b] CMC bajo, medio y alto, son preparados comerciales de carboximetilcelulosa de bajo, medio y elevado peso molecular.

Modelo de Ellis

$$-\frac{dv_x}{dy} = (\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1})\tau_{yx} \qquad (1.2\text{–}5)$$

Este modelo consta de tres parámetros positivos ajustables: φ_0, φ_1 y a. Si se toma para a un valor mayor que la unidad, el modelo tiende hacia la ley de Newton para . valores bajos de τ_{yx}, mientras que si se elige para α un valor menor que la unidad, la ley de Newton se establece para valores elevados de τ_{yx}. El modelo presenta una gran flexibilidad, y en él están comprendidas, como casos particulares, tanto la ley de Newton (para $\varphi_1 = 0$), como la ley de la potencia (para $\varphi_0 = 0$). En la Tabla 1.2-3 se presentan los parámetros de Ellis para diversos fluidos.

Modelo de Reiner-Philippoff

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_\infty + \dfrac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau_{yx}/\tau_s)^2}}\right)\tau_{yx} \qquad (1.26)$$

Este modelo contiene también tres parámetros positivos ajustables: μ_0, μ_∞, y τ_s. Teniendo en cuenta que frecuentemente se ha observado que el comportamiento newtoniano se presenta, tanto para valores muy bajos como muy elevados del gradiente de velocidad, la Ec. 1.2 – 6 ha sido planteada con el fin de que se

transforme en estos dos casos límite en la ley de Newton de la viscosidad, haciéndose $\mu = \mu_0$ y $\mu = \mu_\infty$, respectivamente. La curva que resulta al representar gráficamente τ_{yx} frente a dv_x/dy muestra dos puntos de inflexión, que corresponden a valores de $\tau_{yx} = \pm\tau_s\sqrt{3\mu_0/\mu_\infty}$. En la Tabla 1.2-4 se dan valores de μ_0, μ_∞ y τ_s, para diversos fluidos.

La Fig. 1.2 — 1 es una descripción gráfica del comportamiento reológico de los modelos que hemos expuesto. Téngase presente que estas ecuaciones no son más que fórmulas empíricas de ajuste de curvas, y por consiguiente, es muy aventurado emplearlas fuera del intervalo de los datos experimentales utilizados en su obtención. Obsérvese, asimismo, que los parámetros de alguno de estos modelos son funciones de la temperatura, presión, composición, y, generalmente también, del intervalo de dv_x/dy para el que se ha ajustado la ecuación; por tanto, al dar los valores de los parámetros reológicos, es preciso especificar cuidadosamente las condiciones en que han sido determinados.

TABLA 1.2-4

PARAMETROS DE REINER-PHILIPPOFF PARA 'DIVERSOS FLUIDOS=

Substancia	Temperatura T(°C)	Parámetros de la Ec. 1.2—6 μ_0 (poise)	μ_∞ (poise)	τ_s (dina cm^{-2})	Intervalo experimental del esfuerzo cortante (dina cm^{-2})
Azufre fundido	120	0,215	0,0105	0,073	0,2 a 10
Butirato de colesterina	100	2,4	0,35	1,05	0,8 a 20
30,4 % de metanol en hexano[b]	34	0,035	0,0035	0,5	0,1 a 4
0,4 % de poliestireno en tetralina[c]	20	4,0	1,o	500	500 a 4000

[a] W. PHILIPPOFF, *Kolloid* Z., *71*, 1-16 (1935). Verlag Dr. Dietrich Steinkopff, Darmstadt. [b] Mezcla de dos fases líquidas. [c] Poliestireno de peso molecular 600.000.

En estado no estacionario pueden existir otras formas de comportamiento no-newtoniano. Por ejemplo, los fluidos que presentan una ***disminución*** limitada de η (véase Ec. 1.2— 1) con el tiempo, al aplicar repentinamente un esfuerzo cortante τ_{yx}, se denominan ***tixotrópicos***, recibiendo el nombre de ***reopécticos*** los que dan lugar a un ***aumento*** de η con el' tiempo en 'esas condiciones. Los fluidos que recobran parcialmente la forma original al cesar el esfuerzo cortante se denominan ***viscoelásticos.*** El estudio cuantitativo de estos y otros tipos, de comportamientos no-newtonianos dependientes del tiempo, es uno de los importantes campos de la mecánica de fluidos que todavía está muy poco desarrollado.

§ 1.3. INFLUENCIA DE LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA SOBRE LA VISCOSIDAD

Existen numerosos datos de viscosidad de gases y líquidos puros reseñados en la bibliografía, especialmente en las *Physikochemische Tabellen* de Landolt-Börnstein. Cuando se carece de datos experimentales y no se dispone de tiempo para obtenerlos, la viscosidad puede estimarse por métodos empíricos, utilizando otros datos de la substancia en Cuestión. En este libro se presentan dos correlaciones que permiten efectuar dicha estimación, y que a su vez proporcionan información sobre la variación de la viscosidad de los fluidos ordinarios con la temperatura y la presión. Estas correlaciones se basan en el análisis de un gran número de datos experimentales de diferentes fluidos, mediante la aplicación del principio de los estados correspondientes[1].

La Fig. 1.3 — 1 es una representación gráfica de la viscosidad reducida $\mu_r = \mu/\mu_c$, que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad correspondiente al punto crítico. En la figura se ha representado la viscosidad reducida frente a la temperatura $T_r = T/T_c$ y la presión $p_r = p/p_c$ reducidas. Se observa que la viscosidad de un gas tiende hacia un valor límite definido (el límite de baja densidad en la Fig. 1.3—1), cuando la presión tiende hacia cero a una determinada temperatura; para la mayor parte de los gases este límite se alcanza ya prácticamente a la presión de 1 atm. La viscosidad de un gas a baja densidad *aumenta* con la temperatura, mientras que la de un *líquido* disminuye al aumentar ésta.

Generalmente no se dispone de valores experimentales de μ_c, pero pueden estimarse siguiendo uno de estos dos procedimientos: (i) si se conoce el valor de la viscosidad para una cierta temperatura y presión reducidas, a ser posible en las condiciones más próximas a las que se desean, puede calcularse μ_c mediante la expresión $\mu_c = \mu/\mu_r$; (ii) si sólo se conocen los valores críticos de *p-V-T*, μ_c puede estimarse a partir de las ecuaciones.

$$\mu_c = 61{,}6(MT_c)^{1/2}(\tilde{V}_c)^{-2/3} \qquad 0 \qquad \mu_c = 7{,}70M^{1/2}p_c^{2/3}T_c^{-1/6} \qquad (1.3\text{–}1{,}2)$$

en las que μ_c está expresado en micropoises, p_c en atmósferas, T_c en °K y $\tilde{V}_c$ en cc por gramo-mol. Hougen y Watson[2] han publicado una tabla de viscosidades críticas, calculadas por el método (i) que se reproduce en el Apéndice B.

En la Fig. 1.3-2 se da una representación gráfica de $\mu^{\#} = \mu/\mu^0$, que es la viscosidad a una determinada temperatura y presión, dividida por la viscosidad a la misma temperatura y a la presión atmosférica. Esta variable se ha representado también en función de la temperatura y presión reducidas. A partir de las constantes críticas se pueden determinar p_r y T_r, y utilizar estos valores para obtener en la

[1] Para un tratamiento general del principio de los estados correspondientes, véase F. DANIELS y R. A. ALBERTY, *Physical Chemistry*, Wiley, Nueva York (1955), pp. 21-23.

[2] O. A. HOUGEN y K. M. WATSON, *Chemical Process Principles*, Part III, Wiley, Nueva York (1947), p. 873.

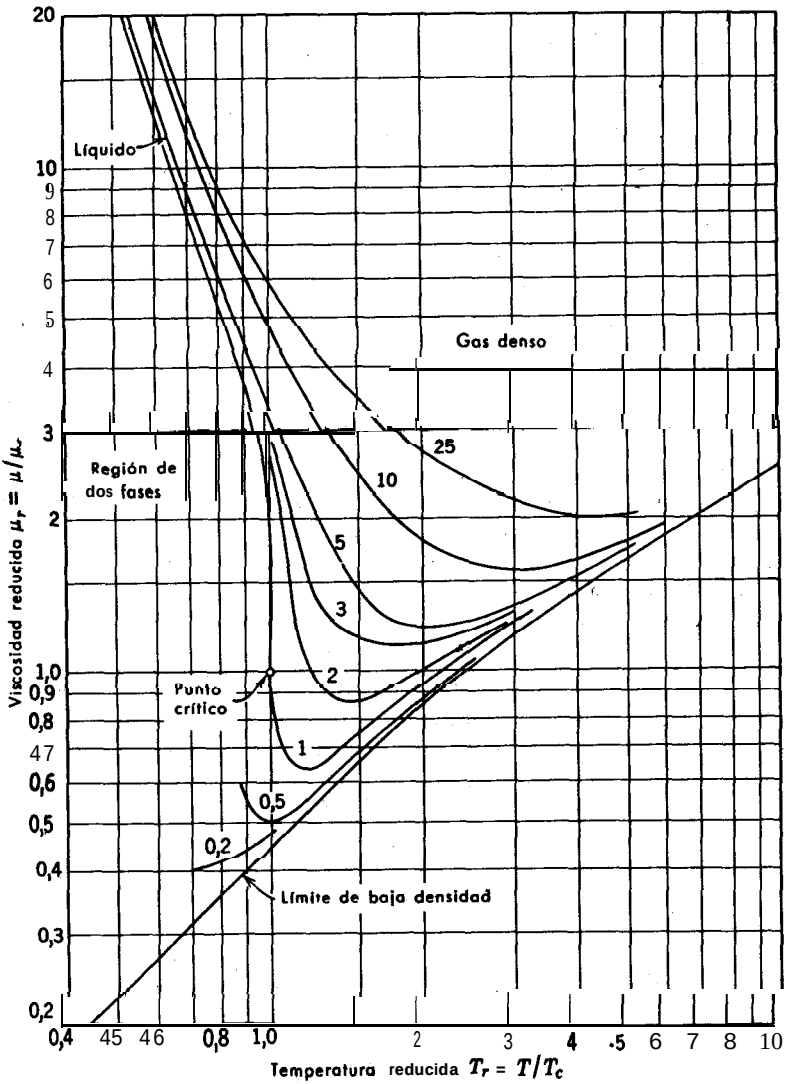


Fig. 1.3-1. Viscosidad reducida $\mu_r = \mu/\mu_c$ en función de la temperatura reducida, para distintos valores de la presión reducida $p_r = p/p_c$. [O. A. Uyehara y K. M. Watson, *Nat.* Perroleum News, *Tech. Section* 36,764 (Oct. 4, 1944); revisada por K. M. Watson (1960). Una versión a gran escala de este gráfico se inserta en 0. A. Hougen, K. M. Watson y R. A. Ragatz, C. *P. P. Charts*, Wiley, Nueva York (1960), Segunda edición.]

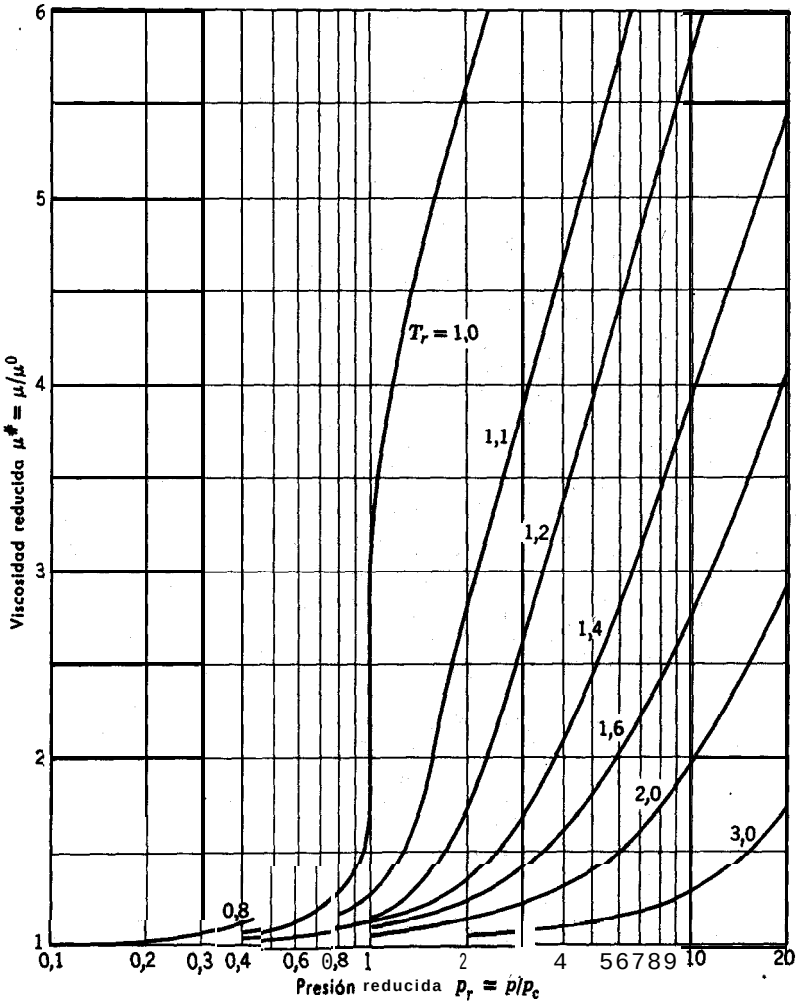


Fig. 1.3-2. Viscosidad reducida $\mu^* = \mu/\mu^0$ en función de la presión reducida $p_r = p/p_c$ y la temperatura reducida $T_r = T/T_c$. [N. L. Carr, R. Kobayashi y D. B. Burroughs, *Am. Inst. Min. & Met. Engrs., Petroleum Tech., 6, 47* (1954).]

gráfica μ/μ^0. El valor así obtenido se multiplica por μ^0, que puede ser un dato experimental o un valor calculado a partir de la teoría de los gases diluidos que se estudia en § 1.4. Los gráficos de las Figs. 1.3 — 1 y 1.3 -2 concuerdan satisfactoriamente en el intervalo de p_r y T, que es común a ambos.

La Fig. 1.3-1 puede utilizarse para calcular de forma aproxima& las viscosidades de las mezclas de los gases densos; sin embargo, en el caso de presiones

medias es preferible emplear el método de la Ec. 1.4–19. Para calcular la viscosidad de una mezcla de n componentes mediante la Fig. 1.3–1, se utilizan las propiedades pseudocríticas[3] definidas empíricamente por las ecuaciones:

$$p_c' = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{ci} \qquad T_c' = \sum_{i=1}^{n} x_i T_{ci} \qquad \mu_c' = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{ci} \qquad (1.3\text{–}3,4,5)$$

Es decir, que, en vez de p_c, T_c y μ_c, se calculan en este caso p'_c, T'_c y μ'_c, procediendo luego de igual forma que si se tratase de un fluido puro. Este método no es muy exacto si las substancias que forman la mezcla tienen distinta constitución química o sus propiedades críticas difieren notablemente[4]. Mediante el gráfico de la Fig. 1.3-2 puede seguirse un método análogo, calculando el valor de μ^0 de la mezcla a partir de la Ec. 1.4-19.

Ejemplo 1.3-1. Estimación de la viscosidad a partir de las propiedades criticas

Calcular la viscosidad del N_2 a 50°C y 854 atm, siendo M = 28,0 g/g-mol, p_c = 33,5 atm y T_c = 126,2°K.

Solución. En este caso hay que utilizar el método de Watson-Uyehara. Calculando μ_c mediante la Ec. 1.3-2, tendremos

$$\mu_c = 7{,}70\ (28{,}0)^{\frac{1}{2}}\ (33{,}5)^{2/3}\ (126{,}2)^{-1/6}$$
$$= 189 \text{ micropoises} = 189 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

Los valores de la temperatura y presión reducidas son:

$$T_r = \frac{273{,}2 + 50}{126{,}2} = 2{,}56$$

$$p_r = \frac{854}{33{,}5} = 25{,}5$$

En la Fig. 1.3-1 se lee μ/μ_c = 2,39. Por tanto, el valor estimado de la viscosidad es

$$\mu = \mu_c\ (\mu/\mu_c) = 189 \times 10^{-6} \times 2{,}39 = 452 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-1} \text{seg}^{-1}$$

El valor experimental[5] es 455×10^{-6} g cm^{-1} seg^{-1}. La concordancia es en este caso excepcionalmente buena.

Ejemplo 1.3-2. Efecto de la presión sobre la viscosidad de los gases

La viscosidad[6] del CO, a 45,3 atm y 40,3° C es 1800 x 10^{-7} poise. Estimar el valor de la viscosidad a 114,6 atm y 40,3° C. utilizando la Fig. 1.3-2.

Solución. La temperatura y presión reducidas, correspondientes a las condiciones en las que se conoce la viscosidad, son:

$$T_r = \frac{273{,}2 + 40{,}3}{304{,}2} = 1{,}03; \quad p_r = \frac{45{,}3}{72.9} = 0{,}622$$

En la Fig. 1.3 -2 se encuentra que $\mu^{\#} = 1.12$ en estas condiciones; por tanto, $\mu^0 = \mu/\mu^{\#}$ = 1610 x 10^{-7} g cm^{-1} seg^{-1}.

[3] Ibid. Part. II, p. 604.
[4] E. W. COMINGS, *High Pressure Technology*, McGraw-Hill, Nueva York (1956), p. 281.
[5] A. M. J. F. MICHELS y R. E. GIBSON, *Proc. Roy. Soc.* (Londres), *A134, 288* (1931).
[6] E. WARBURG y L. v. BABO, *Wied. Ann.*, 17, 390 (1882).

La presión reducida en las condiciones deseadas es $p_r = \frac{114,6}{72,9} = 1,57$ y T_r es la misma de antes. En la Fig. 1.3-2 se lee $\mu^{\#} = 3.7$; por tanto, el valor de la viscosidad a 114,6 atm y 40,3° C es $\mu = 3,7 \times 1610 \times 10^{-7} = 6000 \times 10^{-7}$ g cm^{-1} seg^{-1}. El valor experimental[6] es 5800×10^{-7} g cm^{-1} seg^{-1}.

§ 1.4 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS GASES A BAJA DENSIDAD

Las viscosidades de los gases a baja densidad se han estudiado ampliamente, tanto en el aspecto experimental como en el teórico. Con el fin de ilustrar el mecanismo del transporte de cantidad de movimiento, vamos a comenzar con una deducción simplificada de la viscosidad desde el punto de vista molecular.

Consideremos un gas puro constituido por moléculas esféricas, rígidas y que no se atraen, de diámetro d y masa m, con una concentración de n moléculas por unidad de volumen. Supongamos que n es suficientemente pequeño, de forma que la distancia media entre las moléculas sea mucho mayor que su diámetro. Al alcanzarse el equilibrio en un gas en estas condiciones, la teoría cinética[1] establece que las velocidades moleculares relativas a la velocidad[2] v, del fluido, siguen direcciones al azar y tienen un valor medio $\bar{u}$, que viene dado por la expresión

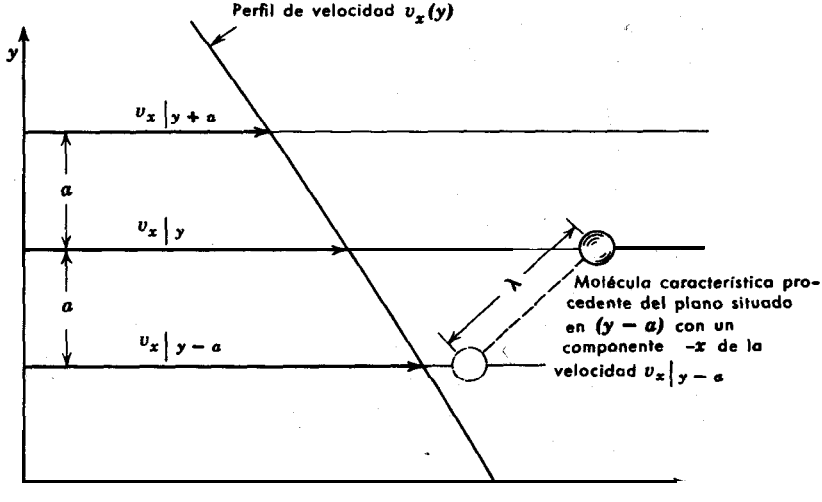


Fig. 1 A-l. Transporte molecular de cantidad de movimiento x desde el plano $(y-a)$ al plano y.

[1] Las cuatro primeras ecuaciones que se exponen aquí se dan sin demostración. Un tratamiento adecuado puede encontrarse en la mayor parte de los libros de teoría cinética, p. e., E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, Nueva York (1938), capítulos II y III.

[2] Aquí v es el vector velocidad del fluido, que representa la media de las velocidades moleculares en las inmediaciones de un determinado punto.

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}} \tag{1.4-1}$$

en la que κ es la constante de Boltzmann. La frecuencia del bombardeo molecular por unidad de área, que actúa sobre una cara de una superficie estacionaria en contacto con el gas, viene dada por:

$$Z = \tfrac{1}{4} n\bar{u} \tag{1.42}$$

El recorrido[3] libre medio λ, es la distancia que recorre una molécula 'entre dos colisiones consecutivas, siendo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \tag{1.4-3}$$

Las moléculas que llegan a un plano han efectuado, como promedio, sus últimas colisiones a una distancia a de este plano, siendo

$$a = \tfrac{2}{3}\lambda \tag{1.4-4}$$

Para determinar la viscosidad de este gas en función de las propiedades moleculares, veamos lo que ocurre cuando fluye paralelamente al eje x con un gradiente de velocidad dv_x/dy . (Véase Fig. 1.4— 1). Se supone que las Ecs. 1.4— 1, 2, 3, 4, siguen siendo válidas en esta situación de no-equilibrio, con tal de que todas las velocidades moleculares estén calculadas con relación a la velocidad media u, en la región donde la molécula considerada *ha* efectuado su última colisión. La densidad de flujo de cantidad de movimiento-x a través de un plano situado a una distancia constante y, se obtiene sumando las cantidades de movimiento-x de las moléculas que cruzan en la dirección y positiva, y restando las cantidades de movimiento-x de las que cruzan en el sentido opuesto. Por lo tanto

$$\tau_{yx} = Zmv_x|_{y-a} - Zmv_x|_{y+a} \tag{1.4-5}$$

Al expresar esta ecuación se ha supuesto que todas las moléculas tienen velocidades representativas de la región en la que han, efectuado su última colisión, y que el perfil de velocidad v,(y) es esencialmente lineal en una distancia de varias veces el recorrido libre medio. Teniendo en cuenta esta última suposición, se puede escribir,

$$v_x|_{y-a} = v_x|_y - \frac{2}{3}\lambda\frac{dv_x}{dy}$$
$$v_x|_{y+a} = v_x|_y + \frac{2}{3}\lambda\frac{dv_x}{dy} \tag{1.4-6}$$

[3] El recorrido libre medio es un recurso intuitivo, que solamente es válido para las moléculas que no ejercen entre sí fuerzas demasiado grandes. El concepto es fácilmente aplicable a las moléculas tipo «bola de billar» que estamos considerando, pero no a la moderna teoría cinética que se estudia después en esta sección.

Combinando las Ecs. 1.4-2, 5 y 6, tendremos

$$\tau_{yx} = -\frac{1}{3} nm\bar{u}\lambda \frac{dv_x}{dy} \tag{1.47}$$

Esta ecuación corresponde a la ley de la viscosidad de Newton (Ec. 1.1—2), siendo la viscosidad

$$\mu = \tfrac{1}{3} nm\bar{u}\lambda = \tfrac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda \tag{1.4-8}$$

La Ec. 1.4-8 fue obtenida por Maxwell en 1860.

Combinando las Ecs. 1.4— 1, 3 y 8, se obtiene

$$\mu = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{m\ \kappa T}}{d^2} \tag{1.4-9}$$

que corresponde a la viscosidad de un gas a baja densidad, constituido por esferas rígidas. Obsérvese que es preciso conocer un valor experimental de μ para determinar el diámetro de colisión d, a partir del cual se puede predecir μ en otras condiciones.

La deducción anterior proporciona una descripción cualitativamente correcta de la transferencia de cantidad de movimiento en un gas a baja densidad. La predicción de ía Ec. 1.4-9 de que μ es independiente de la presión esta en buena concordancia con los resultados experimentales para presiones de hasta unas 10 atm (véanse Figs. 1.3— 1, 2). En cambio, la dependencia con respecto a la temperatura es menos satisfactoria; los datos experimentales de varios gases indican que μ varía más rápidamente de lo que corresponde a $T^{0,5}$, y que además, esta variación no puede representarse exactamente mediante una función potencial de T (véase Fig. 1.3— 1). Para predecir con exactitud la variación de μ con la temperatura hay que substituir el modelo de la esfera rígida por un campo de fuerzas moleculares más realista, y además, analizar más cuidadosamente la desviación respecto del comportamiento de equilibrio. A continuación se presentan los resultados de un análisis detallado del problema[4].

Antes de la primera Guerra Mundial, Chapman en Inglaterra y Enskog[5] en Suecia desarrollaron, independientemente, una teoría cinética rigurosa de los gases monoatómicos a baja densidad. La teoría de Chapman-Enskog da expresiones para los coeficientes de transporte en función de la ***energía potencial de interacción*** entre dos moléculas del gas. La energía potencial φ está relacionada con la fuerza

[4] Lo que queda de esta sección se dedica a resumir los resultados de J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids;* Wiley, Nueva York (1954), capítulos 8 y 9. En un artículo de revista sobre este tema se hacen resaltar los resultados de interés para los cálculos ingenieriles; véase R. B. BIRD, J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS, *Trans. ASME, 76,* 1011-1038 (1954).

[5] Esta teoría es tratada con detalle por S. CHAPMAN y T. G. COWLING, *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases,* Cambridge University Press (1951), segunda edición.

de interacción F mediante la ecuación $F = -d\varphi/dr$, en la que r es la distancia entre las moléculas. Si se conociese exactamente cómo varían las fuerzas entre las moléculas, en función de la distancia entre ellas, se podría substituir en las ecuaciones de Chapman-Enskog y calcular los coeficientes de transporte.

La forma exacta de la función $\varphi(r)$ no se conoce, pero afortunadamente, se ha comprobado, mediante una investigación copiosa, que una función empírica muy satisfactoria de la energía potencial es el ***potencial (6-12) de Lennard-Jones:***

$$\varphi(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \qquad (1.4\text{–}10)$$

donde σ es un diámetro[6] característico de la molécula (el «diámetro de colisión») y ϵ una energía característica de interacción ettre las moléculas (la energía de atracción máxima entre dos moléculas). Esta función se representa en la Fig. 1.4-2, que pone de manifiesto los caracteres típicos de las interacciones moleculares: débil atracción para grandes separaciones (prácticamente proporcional a r^{-6}), y fuerte repulsión para separaciones pequeñas (aproximadamente proporcional a r^{-12}). La Ec. 1.4— 10 resulta muy satisfactoria para numerosas moléculas no polares. Los valores de σ y ϵ se conocen para muchas substancias; en la Tabla B-l se presenta una relación parcial, pero pueden encontrarse más datos en la bibliografía". Si no se conocen los valores de σ y ϵ, pueden calcularse a partir de las propiedades del fluido en el punto crítico (c), de la temperatura normal de ebullición del líquido (b), o del punto de fusión del sólido (m), mediante las sigúientes ecuaciones empíricas[4]

$$\epsilon/\kappa = 0{,}77T_c \qquad \sigma = 0{,}841\ \tilde{V}_c^{1/3} \text{ o } 2{,}44\left(\frac{T_c}{p_c}\right)^{1/3} \qquad (1.4\text{–}11,12,13)$$

$$\epsilon/\kappa = 1{,}15T_b \qquad \sigma = 1{,}166\tilde{V}_{b,\text{liq.}}^{1/3} \qquad (1.4\text{–}14,15)$$

$$\epsilon/\kappa = 1{,}92T_m \qquad \sigma = 1{,}222\tilde{V}_{m,\text{sol.}}^{1/3} \qquad (1.4\text{–}16,17)$$

en las que ϵ/κ y T están en "K, σ en unidades Angström[7], $\tilde{V}$ en $cm^3\ g\text{-}mol^{-1}$, y p_c en atm.

El coeficiente de viscosidad de un gas monoatómico puro de peso molecular M, a la temperatura T, viene dado en función de los parámetros σ y ϵ por la siguiente ecuación

$$\mu = 2{,}6693 \times 10^{-5}\frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2\Omega_\mu} \qquad (1.4\text{-}18)$$

---

[6] Obdrvese que σ es diferente del diámetro molecular d utilizado anteriormente en la teoría cinética simple. Ambos términos son del mismo orden de magnitud, pero no existe una relación sencilla entre ellos.

[7] 1 unidad Angström = 10^{-8} cm = 10^{-10} m. La unidad Angström Å es la unidad normal de medida para las dimensiones moleculares.

en la que μ [=] g cm^{-1} seg^{-1}, T[=] °K, σ[=] Å, y Ω_μ es una función ligeramente decreciente del número adimensional $\kappa T/\epsilon$, cuyos valores se dan en la Tabla **B-2.** Aunque esta fórmula se ha deducido para los gases monoatómicos, se ha encontrado que resulta también muy adecuada para los gases poliatómicos. La variación de μ con la temperatura que predice esta ecuación concuerda satisfactoriamente con la línea de baja -densidad en la gráfica de viscosidad reducida de la Fig. **1.3**— 1. Obsérvese ***de*** nuevo que la ***viscosidad de los gases a baja densidad aumenta con la temperatura,*** aproximadamente con la potencia **0,6** a **1,0** de dicha variable. Recuérdese también que para el intervalo de baja densidad, la viscosidad es independiente de la presión.

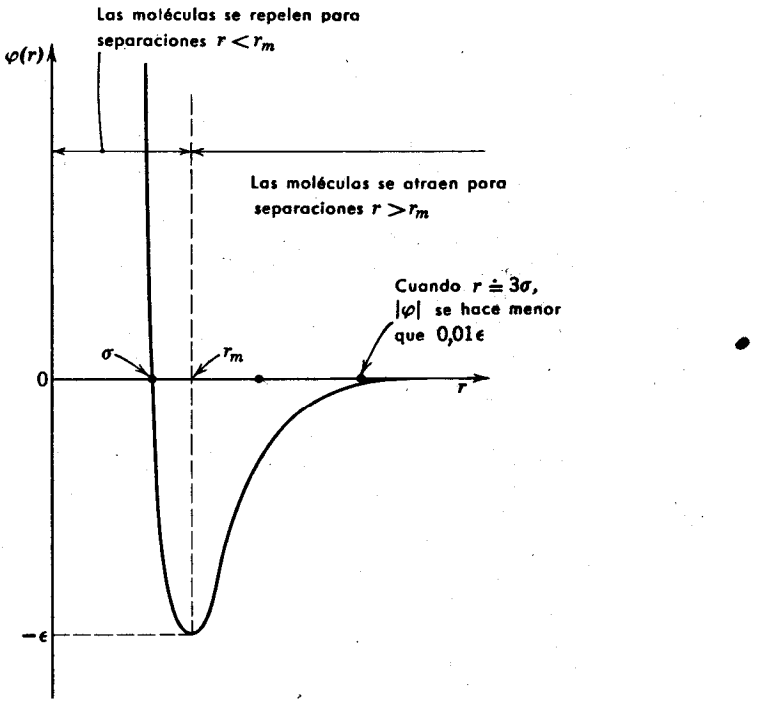


Fig. 1.4-2. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas esféricas no polares. La ecuación 1.4— 10 es una de las muchas ecuaciones empíricas propuestas para el ajuste de esta curva.

Si el gas estuviese constituido por esferas rígidas de diámetro σ (en vez de moléculas reales con fuerzas atractivas y repulsivas), Ω_μ valdría la unidad. Por lo tanto, la función Ω_μ puede interpretarse como la desviación respecto del comportamiento de la esfera' rígida.

La teoría de Chapman-Enskog ha sido ampliada por Curtiss y Hirschfelder[8], para incluir las mezclas gaseosas de varios componentes. En la mayor parte de los casos resulta muy adecuada la ecuación empírica de Wilke[9]:

$$\mu_{\text{mezc.}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_{ij}} \tag{1.4-19}$$

en la que

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2 \tag{1.4-20}$$

En estas ecuaciones, n es el número de especies químicas existentes en la mezcla; x_i y x_j son las fracciones molares de las especies i y j; μ_i y μ_j son las viscosidades de i y j a la temperatura y presión del sistema; y M_i y M_j son los pesos moleculares correspondientes. Obsérvese que Φ_{ij} es un número adimensional, y que $\Phi_{ij} = 1$ cuando i = j. Se ha comprobado que la Ec. 1.4– 19 reproduce los valores experimentales de $\mu_{\text{mezc.}}$ con una desviación media del orden del 2 %. La variación de $\mu_{\text{mezc.}}$ con la composición es extraordinariamente no lineal para algunas mezclas, especialmente las de gases ligeros y pesados.

En resumen, las Ecs. 1.4– 18, 19 y 20 son fórmulas útiles para el calculo de viscosidades de gases no polares y mezclas gaseosas a baja densidad, a partir de valores tabulados de los parámetros de fuerza intermolecular σ y ϵ. Sin embargo, no pueden aplicarse con seguridad en el caso de gases constituidos por moléculas polares o muy alargadas, debido a que los campos de fuerza que existen entre estas moléculas dependen extraordinariamente del ángulo. Una modificaciónte de la Ec. 1.4-10, teniendo en cuenta la influencia angular, ha dado buenos resultados para vapores polares tales como H_2O, NH_3, CH_3OH, y NOC1. Por ultimo, una limitación, generalmente sin importancia, consiste en que estas ecuaciones han de modificarse en el intervalo de temperatura inferior a 100°K para tener en cuenta los efectos cuánticos[11]. Para gases más pesados que el H_2 y el He, los efectos cuánticos sobre la viscosidad pueden despreciarse, aun para temperaturas inferiores.

Ejemplo 1.41. Cálculo de la viscosidad de un gas a baja densidad.

Calcular la viscosidad del CO_2 a 1 atm y 200, 300, y 800° K.

Solución. Se utiliza la Ec. 1.4– 18. En la Tabla B-l se encuentra que las constantes

---

[8] C. F. CURTISS y J. 0. HIRSCHFELDER, *J. Chem. Phys.*, 17, 550-555 (1949).

[9] C. R. WILKE, *J. Chem. Phys.*, 18, 517-519 (1950). Véase también J. W. BUDDENBERG y C. R. WILKE, *Ind. Eng. Chem.*, 41, 1345-1347 (1949).

[10] E. A. MASON y L. MONCHICK, *J. Chem. Phys.*, 35, (1961).

[11] J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *op. cit.*, capítulo 10.

de Lennard-Jones para et CO, valen ϵ/κ = 190" K y σ = 3,996 Å. Et peso molecular del CO, es 44,010. Substituyendo los factores constantes M y σ en ta Ec. 1.4-18 se obtiene

$$\mu = 2{,}6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{44{,}010T}}{(3{,}996)^2\Omega_\mu} = 1{,}109 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{T}}{\Omega_\mu} \qquad (1.4\text{-}21)$$

en ta que $\mu[=]$ g cm^{-1} seg^{-1} y $T[=]$ "K. Los demás cálculos se indican en ta siguiente tabla

T ("K)	$\frac{\kappa T}{\epsilon} = \frac{T}{190}$	Ω_μ de ta Tabla B - 2	$\sqrt{T}$	Viscosidad calculada (Ec. 1.4−21) (g cm^{-1} seg^{-1})	Viscosidad observada [12] (g cm^{-1} seg^{-1})
200	t ,053	t ,548	14,14	1,013 x 10^{-4}	1,015 x 10^{-4}
300	t,58	t ,286	17,32	1,494 x 10^{-4}	1,495 x 10^{-4}
8 0 0	4.21	0,9595	28.28	3,269 x 10^{-4}	....

En la última columna se indican los datos experimentales con fines comparativos. Era de esperar la buena concordancia que se aprecia, ya que las constantes de Lennard-Jones de la Tabla B- l se han deducido a partir de datos de viscosidad.

Ejemplo 1. 42. Predicción de la viscosidad de ana mezcla gaseosa a baja densidad

Predecir ta viscosidad de las siguientes mezclas gaseosas a l atm y 293" K, a partir de datos de tos componentes puros a l atm y 293" K:

Substancia	Fracción molar, x	Peso molecular, M	Viscosidad, μ (g cm^{-1} seg^{-1})
1: CO_2	0,133	44,010	1462 x 10^{-7}
2: 0 ,	0,039	32,000	2031 x 10^{-7}
3: N_2	0,828	28,016	1754 x 10^{-7}

Solución. Se utilizan las Ecs. 1.4-20 y 1.4−19, por este orden. En ta siguiente tabla se indican las principales etapas del cálculo

i	j	M_i/M_j	μ_i/μ_j	Φ_{ij} (Ec. 1.4−20)	$\sum_{j=1}^{3} x_j\Phi_{ij}$
1	1	1,000	1,000	t ,000	0,763
	2	1,375	0,720	0,730	
	3	1,571	0,834,	0,727	
2	1				1,057
	2	1,000	1,000	1,000	
	3	1,142	1,158	1,006	
	2	0,876	0,864	0,993	1,049
3	3	1,000	1,000	1,000	
	1	0,727	1,389	1,994	
	2	0,876	0,864	0,993	
	3	1,000	1,000	1,000	
	1	0,727	1,200	1,370	

[12] H. L. JOHNSTON y K. E. MCCLOSKEY, *J. Phys. Chem., 44, 1038 (1940).*

La Ec. 1.4−19 da

$$\mu_{mezc.} = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^{3} x_j \Phi_{ij}}$$

$$= \frac{(0{,}133)(1462)(10^{-7})}{0{,}763} + \frac{(0{,}039)(2031)(10^{-7})}{1{,}057} + \frac{(0{,}828)(1754)(10^{-7})}{1{,}049}$$

$$= 1717 \times 10^{-7} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

El valor experimental es[13] 1793 x 10^{-7} g cm^{-1} seg^{-1}.

§ 1.5 TEORÍA DE LA VISCOSIDAD DE LOS LÍQUIDOS

El conocimiento que tenemos de la viscosidad de los líquidos es fundamentalmente empírico, ya que la teoría cinética de los líquidos se ha desarrollado tan sólo de forma parcial. No obstante, tiene interés la teoría aproximada desarrollada por Eyring y colaboradores[1], porque explica el mecanismo que tiene lugar, y permite estimar aproximadamente la viscosidad a partir de otras propiedades físicas.

En un líquido puro en reposo, las moléculas están constantemente en movimiento, pero debido al compacto empaquetamiento, el movimiento queda reducido prácticamente a la vibración de cada 'molécula dentro de una «jaula» formada por las moléculas más próximas. Esta jaula está representada por la barrera de energía potencial de altura $\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/\tilde{N}$, como se indica en la Fig. 1.5-1. Eyring sugirió que un líquido en reposo sufre reordenaciones continuas, durante las cuales una molécula escapa desde una «jaula» a un «hueco» adyacente, tal como se indica en la Fig. 1.5-1, y que de esta forma, las moléculas se mueven en ca& una de las direcciones de las coordenadas cartesianas, dando saltos de longitud a y frecuencia por molécula k, estando k dada por la ecuación de velocidad

$$k = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT} \qquad (1.5\text{–}1)$$

En esta ecuación, κ y h son las constantes de Boltzmann y Planck (véase Apéndice C), R es la constante molar de los gases, $\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}$ es la «energía libre de activación» molar del fluido estacionario.

Si el fluido circula en la dirección-x con un gradiente de velocidad dv_x/dy, la frecuencia de las reordenaciones moleculares aumenta. Este efecto puede explicarse teniendo en cuenta que la barrera de energía potencial se distorsiona a causa del esfuerzo aplicado τ_{yx} (véase Fig. 1.5−1), de forma que

$$-\Delta\tilde{G}^{\ddagger} = -\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger} \pm \left(\frac{a}{\delta}\right)\left(\frac{\tau_{yx}\tilde{V}}{2}\right) \qquad (1.5\text{-}2)$$

[13] F. HERNING y L. ZIPPERER, *Cas-und Wasserfach, 79, 49-54, 69-73* (1936).

[1] S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER y H. EYRING, *Theory of Rate Processes*, McGraw-Hill, Nueva York (1941), capítulo 9.

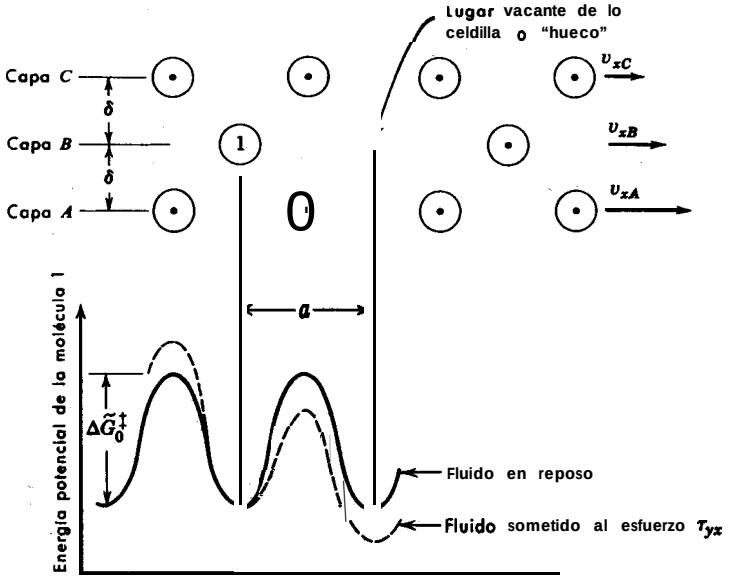


Fig. 1.5-1. Ilustración de un proceso de escape en el flujo de un liquido. La molécula 1 tiene que atravesar un estrecho «pasadizo» para alcanzar el lugar vacante.

donde $\tilde{V}$ es el volumen de un mol de líquido y $\pm(a/\delta)\tau_{xy}\tilde{V}/2$ corresponde, aproximadamente, al trabajo comunicado a las moléculas que se mueven hacia la cima de las barreras de energía, según que se muevan a favor del esfuerzo cortante aplicado (signo mas) o en contra de él (signo menos). Llamando k_f a la frecuencia de los saltos hacia adelante y k_b a la de los saltos hacia atrás, a partir de las Ecs. 1.5—1 y 1.5-2 se encuentra que

$$k_f = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT} e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \tag{1.5–3}$$

$$k_b = \frac{\kappa T}{h} e^{-\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT} e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \tag{1.5–4}$$

La velocidad neta con que las moléculas de la capa A (Fig. 1.5— 1) se ponen delante de las de la capa B, es exactamente el camino recorrido en un salto (a) multiplicado por la frecuencia *neta* de los saltos hacia adelante $(k, - k_b)$; por tanto

$$v_{xA} - v_{xB} = a(k_f - k_b) \tag{1.5–5}$$

Teniendo en cuenta que el perfil de velocidad es lineal en la pequeñísima distancia 8 comprendida entre las capas *A y B, se llega* a

$$-\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta}(k_f - k_b) \tag{1.5-6}$$

Combinando las Ecs. 1.5-3, 4, 6, se obtiene finalmente

$$-\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta}\left(\frac{KT}{h}e^{-\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT}\right)\left(e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} - e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT}\right)$$

$$= \frac{a}{\delta}\left(\frac{KT}{h}e^{-\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT}\right)\left(2\ \operatorname{senh}\frac{a\tau_{yx}\tilde{V}}{2\delta RT}\right) \tag{1.5-7}$$

Es interesante hacer notar que la Ec. 1.5-7 predice el *flujo* no-newtoniano de los líquidos en general; de hecho, esta ecuación tiene la misma forma general que el modelo de Eyring, correspondiente ala Ec. 1.2-4. Pero si $\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT$ es pequeño comparado con la unidad, la Ec. 1.5-7 concuerda con la ley de Newton de la viscosidad, siendo

$$\mu = \frac{\delta}{a}\frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}}e^{\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}/RT} \tag{1.5-8}$$

en la que $\tilde{N}$ es el numero de Avogadro. En la mayor parte de las aplicaciones se toma δ/a igual a la, unidad, pero esta simplificación no" supone una disminución de la exactitud, puesto que $\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}$ se ha determinado empíricamente para conseguir que la ecuación concuerde con los datos experimentales.

Se ha encontrado que las energías libres de activación $\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger}$,, determinadas ajustando la Ec. 1.5-7 para los datos experimentales de la viscosidad frente a la temperatura, son casi constantes para un fluido dado, y pueden correlacionarse fácilmente con la energía interna de vaporización a la temperatura normal de ebullición[2]

$$\Delta\tilde{G}_0^{\ddagger} \doteq 0{,}408\Delta\tilde{U}_{\text{vap}} \tag{1.5-9}$$

Utilizando esta información empírica, y tomando $\delta/a = 1$ (lo que está de acuerdo con los cálculos que conducen a la Ec. 1.5—9), la Ec. 1.5-8 se transforma en ,

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}}e^{0{,}408\Delta\tilde{U}_{\text{vap}}/RT} \tag{1.5-10}$$

La energía de vaporización a la temperatura normal de ebullición puede calcularse aproximadamente mediante la regla de Trouton

$$\Delta\tilde{U}_{\text{vap}} \doteq \Delta\tilde{H}_{\text{vap}} - RT_b \doteq 9{,}4RT_b \tag{1.5-11}$$

[2] J. F. KINCAID, H. EYRING y A. E. STEARN, *Chem. Revs.*, 28, 301 (1941).

Con esta última aproximación, la Ec. 1.5-10 queda

$$\mu \doteq \frac{Nh}{\tilde{V}} e^{3,8T_b/T} \tag{1.5-12}$$

Las Ecs. 1.5-10 y 1.5-12 indican que la viscosidad *disminuye* exponencialmente con la temperatura, lo que está de acuerdo con el comportamiento observado para la mayor parte de los líquidos. **Estas dos ecuaciones no son muy exactas,** dando frecuentemente errores de hasta un 30 %; son útiles especialmente para una estimación aproximada, y sirven de guía para la interpolación y extrapolación de datos incompletos de viscosidad. No deberán utilizarse, sobre todo para moléculas lineales muy largas, como, por ejemplo, n-$C_{20}H_{42}$, que se desvían notablemente de la Ec. 1.5-9. Otras fórmulas empíricas **pueden encontrarse** en la obra de Partington[3].

Ejemplo 1.5-1. Estimación de la viscosidad de un. líquido puro

Estimar la viscosidad del benceno lfquido, C_6H_6, a 20" C.

Solución. Se utiliza la Ec. 1.5-12, juntamente con los siguientes datos:

$$\tilde{N} = 6{,}023 \times 10^{23} \text{ (g-mol)}^{-1}$$
$$h = 6{,}624 \times 10^{-27} \text{ erg seg o g cm}^2 \text{ seg}^{-1}$$
$$\tilde{V} = 89{,}0 \text{ cm}^3 \text{ (g-mol)}^{-1} \text{ a } 20^\circ \text{ C}$$
$$T_b = 273{,}2 + 80{,}1 = 353{,}3^\circ \text{ K}$$
$$T = 273{,}2 + 20 = 293.2^\circ \text{ K}$$

Substituyendo en la Ec. 1.5— 12, se obtiene

$$\mu = (\tilde{N}h/\tilde{V})\, e^{3,8T_b/T}$$
$$= \frac{(6{,}023 \times 10^{23})(6{,}624 \times 10^{-27})}{(89{,}0)} e^{\frac{3,8 \times 353,2}{293,2}}$$
$$= 4{,}46 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$
$$= 0{,}45 \text{ cp.}$$

El valor experimental de la viscosidad que se da en la Tabla 1.1-2 'es 0,647 cp. Esta discrepancia pone de manifiesto el carácter aproximado de la teoría.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Comparar la ley de Newton de la viscosidad con la ley de la elasticidad de Hooke.
2. Probar que la «cantidad de movimiento por unidad de Brea y unidad de tiempor tiene las mismas dimensiones que la «fuerza por unidad de área».
3. ¿Cuáles son las unidades de viscosidad y viscosidad cinemática?

---

[3] J. R. PARTINGTON, *Treatise on Physical Chemistry*, Longmans, Green (1949). Esta obra, en varios volúmenes, contiene un estudio completo de la bibliografía fisicoquímica.

4. ¿En qué obras de referencia se pueden encontrar datos de viscosidad?

5. Comparar los valores de la viscosidad y viscosidad cinemática del aire, agua y mercurio, a 1 atm y 20° C.

6. ¿Qué quiere decir la palabra no-newtoniano ? ¿Qué tipo de substancias presentan este comportamiento?

7. ¿Qué es «reología»?

8. ¿Cómo varia la viscosidad con la temperatura y la presión?

9. ¿Qué métodos existen para calcular la viscosidad de gases densos y de liquidos?

10. ¿Qué es el potencial de Lennard-Jones y qué representa?

ll. Determinar la fuerza entre dos moléculas en función de la distancia, según el potencial de Lennard-Jones. Hallar el valor de r_m en función de σ y ϵ, utilizando la Fig. 1.4-2.

12. ¿Cuál es el significado de los parámetros σ y ϵ? Ilústrese con un esquema.

13. ¿Cómo pueden obtenerse σ y ϵ a partir de datos de viscosidad?'

14. La función de energia potencial de Lennard-Jones describe un campo esféricamente simétrico. Nombrar dos características moleculares que provocan un aumento de los campos de energía potencial y dan lugar a que no tengan simetría esférica.

15. Describir gráficamente La función de energía potencial <p(r) para moléculas esféricas rígidas que no se atraen.

16. ¿ Cuál es el significado fiiico de la función Ω_μ de la Ec. 1.4—18?

17. Las moléculas de los distintos isótopos atómicos tienen 'los mismos valores de σ y ϵ; teniendo esto en cuenta, ¿cómo calcularía usted la viscosidad del CD, a 20° C y 1 atm a partir de-la del CH, a 20° C?

18. ¿Qué diferencia de viscosidades de los gases diluidos debe esperarse para el $U^{235}F_6$ y $U^{238}F_6$?

19. ¿ Como se simplifica la ecuación de Wilke cuando $\Phi_{ij} = 1$ para' todos los i y j 'de una mezcla gaseosa? ¿Para qué tipo de mezclas gaseosas ocurre ato?

20. ¿Puede expresarse la densidad& flujo de cantidad de movimiento de un liquido mediante l a Ec. 1.4—5?

21. Un fluido A tiene una viscosidad doble que otro' B; ¿cuál de ellos cree usted que fluirá más rápidamente en un tubo horizontal de longitud L, bajo la misma diferencia de presión?

PROBLEMAS[1]

1.A$_1$. Cálculo de viscosidades de gases a baja densidad

Predecir la viscosidad del oxígeno, nitrógeno y metano moleculares, a la presión atmosférica y 20° C. Expresar todos los resultados en cp. Compare sus resultados con los valores experimentales que se indican en este capítulo.

Respuestas: 0,0203, 0.0175, 0,0109 cp.

1.B$_1$. Cálculo de viscosidades de mezclas gaseosas a baja densidad

Se conocen los siguientes datos[2] de la viscosidad de las mezclas de hidrogeno y freón-12 (diclorodifluorometano) a 25° C y 1 atm.:

---

[1] Véase el Prólogo en relación con loa tipos de problemas.

[2] J. W. BUDDENBERG y C. R. WILKE, *Ind. Eng. Chem.*, 41, 1345-1347 (1949).

x_1 Fracción molar de H_2	$\mu \times 10^6$ (g cm^{-1} seg^{-1})
0,00	124.0
0.25	128,1
0,50	131,9
0,75	135.1
1,00	88,4

Calcular y comparar los resultados obtenidos mediante las Ecs. 1.4-19 y 20 para las tres composiciones intermedias, utilizando los datos de la viscosidad de los componentes puros.

Ejemplo de respuesta: para $x_1 = 0{,}50$, $\mu = 0.01315$ cp.

1.C_1. Estimación de la viscosidad de un gas denso

Estimar la viscosidad del N_2 a 20° C y 67 atm, utilizando (*a*), la Fig. 1.3 – 1 y μ_c de la Tabla B-l ; (*b*), la Fig. 1.3-2 y μ^o de la Tabla 1.1-2. Expresar los resultados en $kg_m\ m^{-1}\ seg^{-1}$.

Respuesta: a. $1{,}93 \times 10^{-5}$ kg_m m-r seg^{-1}.

1.D_1. Estimación de la viscosidad de un líquido

Estimar la viscosidad de! agua al estado de líquido saturado a OC y 100° C, utilizando (a) la Ec. 1.5–10 y tomando para $\Delta\hat{U}_{vap} = 567{,}6$ Kcal kg_m^{-1} a 0° C y 498,6 Kcal kg_m^{-1} a 100° C; (*b*) utilizando la Ec. 1.5 -12. Comparar los resultados obtenidos con los valores de La Tabla 1.1 – 1.

Respuesta: b. 4,0 cp, 0,95 cp.

1.E_1. Velocidad molecular y recorrido libre medio

Calcular la velocidad molecular media $\bar{u}$, en cm seg^{-1}, y el recorrido libre medio λ, en cm, para el 0, a 1 atm y 273.20 K. Supóngase que $d = 3{,}0$ Å. ¿Cuál es la relación entre el recorrido libre medio y el diámetro molecular en estas condiciones? ¿ Cuál sería el arden de magnitud de la relación correspondiente en el estado líquido?

Respuesta:. $\bar{u} = 4.25 \times 10^4$ *cm* seg^{-1}, $\lambda = 9{,}3 \times 10^{-6}$ *cm.*

1.F_2.. Comparación del gráfico de Uyehara-Watson con h teoría cinética

a. Utilizar las Ecs. 1.4-11, 18 y la Tabla B-2 para construir una representación logarítmica de $\mu\sigma^2 M^{-1/2} T_c^{-1/2}$ frente a T_r, hasta valores de $T_r = 10$. Representar en este gráfico μ_r frente a T_r *para* gases a baja densidad, según la Fig. 1.3 -1. ¿Qué conclusiones se deducen al comparar la forma de las dos curvas?

b. Determinar μ_c en función de M, T_c y σ, mediante la comparación de los resultados representados en (a).

c. Combinar los resultados de (*b*) con las Ecs. 1.4-12, 13 para obtener otras dos expresiones de μ_c en función de las propiedades criticas. Compare sus resultados con las correspondientes ecuaciones de Uyehara y Watson.

1.G_2 Comparación de la teoría cinética simple con la teoría exacta para esferas rígidas

Transformar la Ec. 1.4 -9 en otra equivalente a la Ec. 1.4– 18 y compararlas numéricamente para el caso de moléculas rígidas esféricas, siendo $d = \sigma$. ¿Qué tanto por ciento de error se comete utilizando para dichas moléculas la teoría cinética simple?

1.H$_3$. Distancia media de recorrido libre en una dirección determinada

El recorrido libre medio esta definido de tal forma que $e^{-s/\lambda}$ es la probabilidad que tiene una molécula de recorrer una distancia mayor que s entre dos colisiones consecutivas. Utilizando esta definición, y el hecho de que en un gas en equilibrio las velocidades moleculares tienen direcciones al azar, determinar la distancia 6, según la dirección y, recorrida entre dos colisiones consecutivas por las moléculas que tienen una determinada v_y positiva.

1.I$_3$. Cálculo de velocidades medias a partir de la distribución de Maxwell-Boltzmann

En la deducción de la teoría cinética simplificada expuesta en § 1.4 se han hecho, sin demostración, algunas aseveraciones acerca de! comportamiento de equilibrio de un gas. En este problema y en el siguiente, se demuestra que algunas de estas afirmaciones son una consecuencia de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

La distribución de Maxwell-Boltzmann de las velocidades moleculares de *un gas en reposo*, es la siguiente:

$$f(u_x, u_y, u_z) = f(\mathbf{u}) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} e^{-mu^2/2\kappa T} \tag{1.I-1}$$

en la que $\mathbf{u}$ y sus componentes son las velocidades moleculares individuales, y $f(u_x, u_y u_z)\, du_x\, du_y\, du_z$ es la fracción de! número tota! de moléculas, que es de esperar que en un determinado instante tengan velocidades comprendidas entre u_x y $u_x + du_x$, u_y y $u_y + du_y$, u_z y $u_z + du_z$. De la Ec. 1.I–1 se deduce que la distribución de! valor de la velocidad molecular u, es

$$f(u) = 4\pi u^2 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} e^{-mu^2/2\kappa T} \tag{1.I-2}$$

a. Construir un esquema bidimensional de la distribución de velocidad en el espacio $f(\mathbf{u})$, manteniendo u_z constante, y colocando trazos sobre el plano u_x, u_y, con una concentración proporcional a $f(u_x, u_y, u_z)$.

b. Calcular el valor medio de la *velocidad* $\bar{u}$, integrando uf(u) con respecto a u:

$$\bar{u} = \frac{\int_0^\infty uf(u)\, du}{\int_0^\infty f(u)\, du} \tag{1.I-3}$$

El resultado correcto viene dado por la Ec. 1.4–1.

c. Calcular los componentes $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ y $\bar{u}_z$ de la velocidad media $\bar{u}$ integrando los componentes $uf(u)$ en todo el espacio de velocidad. La integra! que determina $\bar{u}_x$ es

$$\bar{u}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_x f(u_x, u_y, u_z)\, du_x\, du_y\, du_z}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u_x, u_y, u_z)\, du_x\, du_y\, du_z} \tag{1.I-4}$$

y las integrales para $\bar{u}_y$ y $\bar{u}_z$ son análogas. Los resultados deberán de confirmar que el gas esta en reposo.

d. Calcular la energía cinética media de una molécula, mediante la integración de $\frac{1}{2}mu^2 f(u)$ con respecto a u:

$$\frac{1}{2}m\overline{u^2} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{2}mu^2 f(u)\,du}{\int_0^\infty f(u)\,du} \qquad (1.I\text{-}5)$$

El resultado es $^1/_2\, m\overline{u^2} = {}^3/_2\, \kappa T$.

1.J$_3$. Cálculo de la frecuencia de colisión de pared a partir de la distribución de Maxwell-Boltzmann

Se desea conocer la frecuencia Z, con la que las moléculas de un gas ideal chocan por unidad de área sobre una pared de una sola cara. El gas está en reposo, en equilibrio a la temperatura T, y contiene n moléculas idénticas dé masa m por cm^3. Considerando que la pared es la superficie $y = c$ y que el fluido está en la región $y < c$, se puede demostrar que Z es sencillamente el producto del número de concentración n por el valor medio de u_y de todas las moléculas que se mueven hacia la pared. Por tanto,

$$Z = n \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u_y f(u_x, u_y, 3\, du_x\, du_y\, du_z}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u_x, u_y, u_z)\, du_x\, du_y\, du_z} \qquad (1.J\text{-}1)$$

Evaluar Z, utilizando $f(u_x, u_y, u_z)$ de la Ec.1.I-1. ¿Está de acuerdo su resultado con las Ecs. 1.4— 1 , 2?

CAPÍTULO 2

DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD EN FLUJO LAMINAR

En este capítulo vamos a estudiar cómo se pueden calcular los perfiles de velocidad laminar en algunos sistemas geométricamente sencillos. Para estos cálculos se hace uso de la definición de viscosidad y del concepto de un balance de cantidad de movimiento. En realidad, para los problemas de ingeniería no se necesita generalmente un conocimiento completo de las distribuciones de velocidad. Por el contrario, es preciso conocer la velocidad máxima, la velocidad media, y el esfuerzo cortante en una superficie. Estas magnitudes pueden deducirse fácilmente una vez que se conocen los perfiles de velocidad.

En la primera sección se hacen algunas observaciones generales acerca de los balances diferenciales de cantidad de movimiento. En las secciones que siguen después se exponen con detalle algunos ejemplos clásicos de los tipos de flujo viscoso. Estos ejemplos deberán de entenderse perfectamente, puesto que con frecuencia nos, referiremos a ellos en capítulos posteriores, El lector se dará cuenta de que estos sistemas son demasiado sencillos para tener de por sí interés en ingeniería. Si bien es cierto que representan casos muy idealizados, los resultados que se obtienen encuentran grandes aplicaciones en el estudio de numerosas cuestiones de mecánica de fluidos.

Los sistemas que se estudian en este capítulo están ordenados de forma que el lector entra a considerar gradualmente los distintos factores que intervienen en la solución de los tipos de flujo viscoso. El problema de la película descendente, que se estudia en § 2.2, proporciona información sobre el papel que juegan las fuerzas de gravedad y sobre la utilización de las coordenadas cartesianas; se indica también cómo puede llegarse a la solucionen el caso de que la viscosidad sea una función de la posición. En § 2.3 se considera el flujo en un tubo circular, que ilustra sobre el papel de la presión y las fuerzas de gravedad, a la vez que se indica el uso de coordenadas cilíndricas; se expone asimismo cómo se tratan los problemas de flujo no-newtoniano. El flujo en un anillo cilíndrico, que se estudia en § 2.4, pone de manifiesto cómo intervienen las condiciones iímite en la obtención de la solución final. En § 2.5 nos adentrarnos más en la cuestión de las condiciones límite, al discutir el flujo de dos fluidos adyacentes inmiscibles. Finalmente, en § 2.6 se considera brevemente el flujo alrededor de una esfera, con el fin de presentar un problema en

coordenadas esféricas e indicar al mismo tiempo como se opera con fuerzas normales y tangenciales.

Los métodos y problemas que aparecen en este capítulo se aplican solamente al flujo en estado estacionario. Por «estado estacionario» se entiende que las condiciones en cada uno de los puntos de la corriente no varían con el tiempo. Es decir, que una fotografía del sistema de flujo en el tiempo t sería exactamente igual a otra tomada algún tiempo después, $t + \Delta t$. En el Capítulo 3 se presentan las ecuaciones generales del flujo no estacionario.

§ 2.1 BALANCES ENVOLVENTES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO: CONDICIONES LÍMITE

Los problemas que se discuten *en* §§ 2.2 a 2.5 se estudian aplicando balances de cantidad de movimiento a una delgada «envoltura» de fluido. Para el flujo rectilíneo en *estado estacionario,* el balance de cantidad de movimiento es:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de entrada}\\ \text{de}\\ \text{cantidad de movimiento}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de salida}\\ \text{de}\\ \text{cantidad de movimiento}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{suma de las fuerzas}\\ \text{que}\\ \text{actúan sobre el sistema}\end{array}\right\} = 0 \tag{2.1-1}$$

Al sistema puede entrar cantidad de movimiento por transporte, de acuerdo con la expresión newtoniana (o no-newtoniana), de densidad de flujo de cantidad de movimiento. También puede entrar cantidad de movimiento debido al movimiento global del fluido. Las fuerzas que nos interesan son las fuerzas de presión (actuando sobre *superficies)* y las fuerzas de gravedad (que actúan sobre todo el *volumen).*

El balance de cantidad de movimiento de la Ec. 2.1—1 puede aplicarse *solamente cuando las líneas de corriente del sistema* son *líneas rectas* (es decir, para el flujo rectilíneo). El método de operación para sistemas con líneas de corriente curvas se considera en forma de ejemplos en §3.4. En realidad, el origen de la Ec. 2.1— 1 no puede comprenderse hasta que no se estudie la deducción en el Capítulo 3, y concretamente la Ec. 3.2— 10. A este respecto pedimos al lector que acepte, sin más, el principio de la Ec. 2.1— 1 y que aprenda a utilizarlo en la resolución de problemas sencillos de flujo viscoso en estado estacionario.

En general, el procedimiento a seguir para plantear y resolver problemas de flujo viscoso es el siguiente: primeramente se escribe un balance de cantidad de movimiento, de la forma de la Ec. 2.1— 1 para una envoltura de espesor finito; después se hace tender hacia cero este espesor, utilizando la definición matemática de la primera derivada con el fin de obtener la correspondiente ecuación diferencial que describe la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento. Se introduce entonces la adecuada expresión newtoniana de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, con et fin de obtener una ecuación diferencial para la distribución de velocidad. Mediante la integración de estas dos ecuaciones diferenciales

se obtienen, respectivamente, las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad en el sistema. Esta información puede utilizarse después para calcular muchas otras magnitudes, tales como velocidad media, velocidad máxima, velocidad volumétrica de flujo, perdida de presión, y fuerzas que actúan sobre las superficies límite.

En las integraciones que hemos mencionado aparecen varias constantes de integración que se evalúan utilizando las «condiciones límite», es decir, determinaciones de hechos físicos para valores concretos de la variable independiente. La mayor parte de las condiciones límite utilizadas son las siguientes:

a. En las interfases sólido-fluido, la velocidad del fluido es igual a la velocidad con que se mueve la superficie misma; es decir, que se supone que el fluido esta adherido a la superficie sólida con la que se halla en contacto.

b. En las interfases líquido-gas, la densidad de flujo de cantidad de movimiento, y por consiguiente, el gradiente de velocidad en la fase 'líquida, es extraordinariamente pequeño, y en la mayor parte de los cálculos puede suponerse igual a cero.

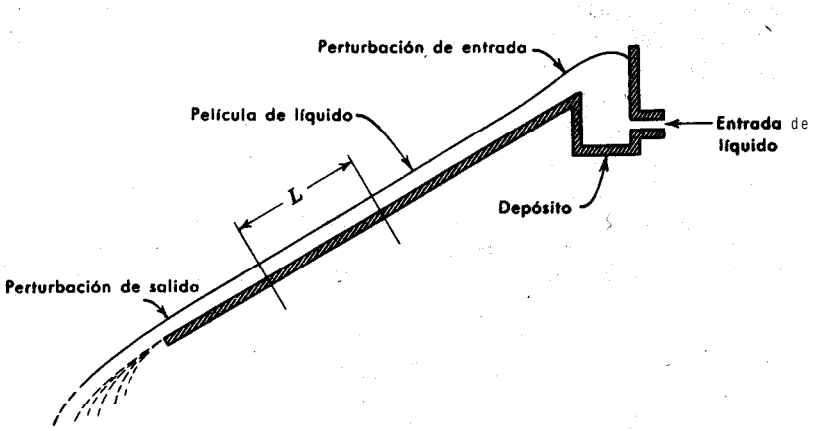


Fig. 2.2-1. Diagrama esquemático del experimento de una película descendente, con indicación de los efectos finales. En la región de Longitud *L* la distribución de velocidad está totalmente desarrollada.

c. En las interfases líquido-líquido, tanto la densidad de flujo de cantidad de movimiento como la velocidad son continuas a través de la interfase; es decir, que son iguales a ambos lados de la interfase.

En las secciones que siguen encontraremos estos tres tipos de condiciones límite.

En esta sección hemos presentado algunas reglas generales para la resolución de problemas elementales de flujo viscoso. A continuación se aclara la aplicación de estas reglas para algunos sistemas sencillos de flujo.

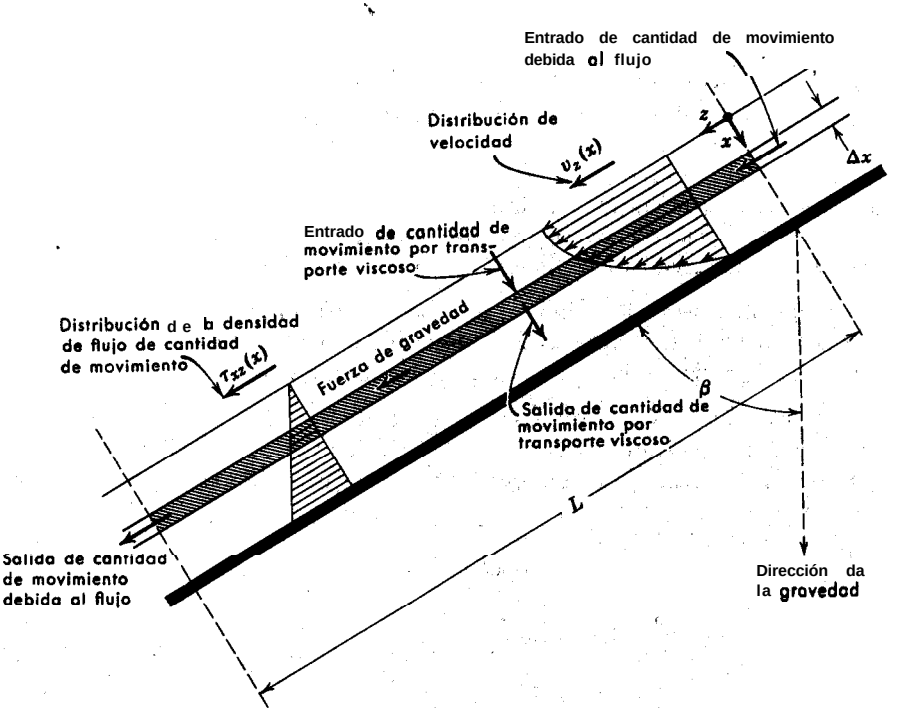


Fig. 2.2-2. Flujo viscoso isotérmico de una película de liquido bajo la influencia de la gravedad, sin formación de ondulaciones. Capa de espesor A x sobre la que se aplica el balance de cantidad de mwimiento. El eje y es perpendicular al plano del papel.

§ 2.2 FLUJO DE UNA PELÍCULA DESCENDENTE

Como primer ejemplo, consideremos una superficie plana inclinada, tal como se indica en la Fig. 2.2— 1. Estas películas se han estudiado en relación con torres de pared mojada, experiencias de evaporación y absorción de gases y aplicación de capas de pintura a rollos de papel. Se supone que la viscosidad y densidad del fluido son constantes y se considera una región de longitud L, suficientemente alejada de los extremos de la pared, de forma que las perturbaciones de la entrada y la salida no están incluidas en L; es decir, que en esta región el componente v_z de la velocidad es independiente de z.

Comenzamos aplicando un balance de cantidad de movimiento z sobre un sistema de espesor Δx, limitado por los planos $z = 0$ y z = L, y que se extiende hasta una distancia W en la dirección y. (Véase Fig. 2.2-2.) Los distintos componentes del balance de cantidad de movimiento son por tanto:

velocidad de entrada de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en x	$(LW)(\tau_{xz})\|_x$	(2.2-1)
velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $x + \Delta x$	$(LW)(\tau_{xz})\|_{x+\Delta x}$	(2.2-2)
velocidad de entra& de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en $z = 0$	$(W\Delta x\, v_z)(\rho v_z)\|_{z=0}$	(2.2-3)
velocidad de salida de cantidad de movimiento z a través de la superficie situada en z = L	$(W\Delta x\, v_z)(\rho v_z)\|_{z=L}$	(2.2-4)
fuerza de gravedad que actúa sobre el fluido	$(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta)$	(2.24)

Obsérvese que las **direcciones** de **«entrada»** y «salida» se toman siempre en **las direcciones** positivas de los ejes x, y z (en este problema coinciden con la dirección del transporte de cantidad de movimiento). La notación $|x + \Delta x$ quiere decir «evaluado para $x + \Delta x$».

Substituyendo estos términos en el balance de cantidad de movimiento de **la Ec.** 2.1-1 se obtiene

$$LW\tau_{xz}|_x - LW\tau_{xz}|_{x+\Delta x} + W\Delta x\, \rho v_z^2|_{z=0} - W\Delta x\, \rho v_z^2|_{z=L} + LW\Delta x\, \rho g \cos \beta = 0 \quad (2.2\text{-}6)$$

Como v_z **vale** lo mismo para z $=$ 0 y z $=$ L, para cada valor de x, los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la **Ec.** 2.2-6 por $LW\Delta x$ y tomando el límite cuando Δx tiende hacia cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x} \right) = \rho g \cos \beta \quad (2.2\text{-}7)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera de τ_{xz} con respecto a x. Por tanto, la **Ec.** 2.2-7 puede escribirse así

$$\frac{d}{dx}\tau_{xz} = \rho g \cos\beta \tag{2.2-8}$$

que es la ecuación diferencial para la densidad de flujo de cantidad de movimiento τ_{xz}. Al integrarla se obtiene

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta + C_1 \tag{2.2-9}$$

La constante de integración puede evaluarse aplicando la condición, límite correspondiente a la interfase líquido-gas- (véase § 2.1):

C.L. 1: para $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$ (2.2−10)

cuya substitución en la Ec. 2.2-9 conduce a $C_1 = 0$.

Por lo tanto, la, distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es

$$\boxed{\tau_{xz} = \rho g x \cos\beta} \tag{2.2-11}$$

tal como se indica en la Fig. 2.2-2.

Si el fluido es newtoniano, ya sabemos que la densidad de flujo de cantidad de movimiento está relacionada con el gradiente de velocidad mediante la expresión,

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \tag{2.2-12}$$

Substituyendo este valor de τ_{xz} en la Ec. 2.2-11 se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la distribución de velocidad ,

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos\beta}{\mu}\right) x \tag{2.2-13}$$

que puede integrarse fácilmente para obtener

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos\beta}{2\mu}\right) x^2 + C_2 \tag{2.2-14}$$

La constante de integración se evalúa a partir de la condición límite correspondiente

C.L. 2: para $x = \delta$ $v_z = 0$ (2.2-15)

Substituyendo esta condición límite en la Ec. 2.2− 14 se obtiene que $C_2 = (\rho g \cos\beta/2\mu)\delta^2$. Por consiguiente, la distribución de velocidad es

$$\boxed{v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]} \tag{2.2-16}$$

Resulta, por tanto, que el perfil de velocidad es parabólico. (Véase Fig. 2.2-2.)

Una vez que se ha obtenido el perfil de velocidad, pueden calcularse las siguientes magnitudes :

(i) La ***velocidad máxima*** $v_{z,\text{máx}}$ es evidentemente la velocidad para x = 0; por tanto

$$v_{z,\text{máx}} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \tag{2.2-17}$$

(ii) La ***velocidad media*** $\langle v_z \rangle$ en una sección transversal de la película, se obtiene mediante el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx \, dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx \, dy} \\
&= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z \, dx \\
&= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d\left(\frac{x}{\delta} \right) \\
&= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}
\end{aligned} \tag{2.2-18}$$

(iii) La ***velocidad volumétrica de flujo*** Q se obtiene a partir de la velocidad media, o por integración de la distribución de velocidad:

$$Q = \int_0^W \int_0^\delta v_z \, dx \, dy = W \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu} \tag{2.2-19}$$

(iv) El ***espesor de la película*** δ puede expresarse en función de la velocidad media, de la velocidad volumétrica de flujo, o la velocidad de flujo de masa por unidad de anchura de pared $(\Gamma = \rho \, \delta \langle v_z \rangle)$:

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g W \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \beta}} \tag{2.2-20}$$

(v) El componente-z de la ***fuerza F del fluido sobre la superficie*** se obtiene integrando ta densidad de flujo de cantidad de movimiento sobre la interfase **fluido-**solido :

$$F_z = \int_0^L \int_0^W \tau_{xz}|_{x=\delta}\, dy\, dz$$
$$= \int_0^L \int_0^W -\mu \left.\frac{dv_z}{dx}\right|_{x=\delta} dy\, dz$$
$$= (LW)(-\mu)\left(-\frac{\rho g \delta \cos\beta}{\mu}\right)$$
$$= \rho g \delta LW \cos\beta \qquad (2.2\text{-}21)$$

Es evidente que esto corresponde exactamente al componente-z del peso de todo el fluido, contenido en la película.

Los anteriores resultados analíticos son sólo válidos cuando la película desciende en flujo laminar con líneas de corriente rectas.. Estas condiciones se cumplen para el flujo lento de películas viscosas delgadas. Experimentalmente se ha encontrado que al aumentar la velocidad $\langle v_z \rangle$ de la película; al aumentar su espesor 6, y al disminuir la viscosidad 'cinemática $\nu = \mu/\rho$, varía gradualmente la naturaleza del flujo. Durante este cambio gradual se pueden observar tres tipos distintos de flujo, más 'o menos estables: (*a*) flujo laminar con líneas de corriente rectas, (*b*), flujo laminar con ondulaciones, y (c) flujo turbulento. La información cuantitativa respecto del tipo de flujo que puede esperarse para una serie determinada de condiciones físicas es sólo fragmentaria. Para paredes verticales se puede dar la siguiente información: [1,2]

flujo laminar sin ondulaciones	$\mathrm{Re} < 4$ a 25
flujo laminar con ondulaciones	4 a 25 $<$ Re $<$ 1000 a 2000
flujo turbulento	, Re $>$ 1000 a 2000

siendo $\mathrm{Re} = 4\delta\langle v_z\rangle\rho/\mu = 4\Gamma/\mu$ el *número de Reynolds* para este sistema. El porqué se utiliza este grupo adimensional como criterio del tipo de flujo se estudia más adelante en. los capítulos que siguen.

Ejemplo 2.2-1. Cálculo de la velocidad de película.

Un aceite tiene una viscosidad cinemática de 2×10^{-4} m^2 seg^{-1} y una densidad de $0{,}8 \times 10^3$ kg m^{-3}. ¿ Cuál tiene que ser la velocidad de flujo de masa de una película que , desciende por una pared vertical para que el espesor de la misma sea de 2,5 mm ?

Solución. De acuerdo *con* la Ec. 2.2-20, la velocidad de flujo de masa por unidad de anchura de pared es, (todos los valores numéricos están en unidades mks):

$$\Gamma = \frac{\delta^3 \rho g}{3\nu} = \frac{(2{,}5 \times 10^{-3})^3\ (0{,}8 \times 10^3)\ (9.80)}{3(2 \times 10^{-4})}$$
$$= 0{,}204 \text{ kg m}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

[1] *T.* K. SHERWOOD *y* R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill *Nueva* York (1952), p. 265.

[2] S. S. GRIMLEY, *Trans. Inst. Chem. Engrs.* (Londres), 23, 228-235 (1948).

Éste es el resultado que se desea si, y solamente en este caso, el flujo es realmente laminar. Para averiguar la naturaleza del flujo, vamos a calcular el número de Reynolds basado en la velocidad de flujo de masa que hemos hallado:

$$\mathrm{Re} = \frac{4\Gamma}{\mu} = \frac{4\Gamma}{\rho\nu} = \frac{4\ (0.204)}{(0{,}8 \times 10^3)\ (2 \times 10^{-4})} = 5{,}1 \quad \text{(adimensional)}$$

Este número de Reynolds es inferior al límite superior que se ha indicado anteriormente para el flujo laminar, y el valor calculado para Γ es por tanto válido.

Ejemplo 2.22. Película descendente *con* viscosidad variable

Resolver de. nuevo el problema de la película descendente para el caso de que la viscosidad dependa de la posición en la forma siguiente:

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha(x/\delta)} \tag{2.2-22}$$

en la que μ_0 es la viscosidad en ta superficie de la película, y α es una constante que expresa la rapidez con que disminuye μ al aumentar x. Una variación de este tipo 'tiene lugar en et flujo descendente del condensado en una pared, con un gradiente lineal de temperatura a través de la película. Demostrar cómo el resultado de este problema se transforma en el obtenido anteriormente para el caso límite de que $\alpha = 0$ (película de viscosidad constante).

Solución. Se procede igual que antes para establecer el balance de cantidad de movimiento y calculas la distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento de la Ec. 2.2−11. Substituyendo después la ley de Newton (con la viscosidad variable de la Ec. 2.2-22) en la Ec. 2.2-11, se obtiene:

$$-\mu_0 e^{-\alpha(x/\delta)} \frac{dv_z}{dx} = \rho g x \cos\beta \tag{2.2-23}$$

Esta ecuación diferencial puede integrarse, y evaluar la constante de integración a partir de las condiciones límite de la Ec. 2.2−15. El perfil de velocidad a que se llega es

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_0}\left[e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - e^{\alpha x/\delta}\left(\frac{x}{\alpha\delta} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \tag{2.2-24}$$

Con cl fin de hallar la velocidad para una película de viscosidad constante, damos a α el valor 0 en la Ec. 2.2−24. Al hacer esto aparece una dificultad matemática que se resuelve desarrollando en serie, por la fórmula de Taylor, las dos funciones exponenciales:

$$(v_z)_{\alpha=0} = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_0} \lim_{\alpha\to 0} \left[\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \left(1 + \frac{\alpha x}{\delta} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!\delta^2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3!\delta^3} + \cdots\right)\left(\frac{x}{\alpha\,\delta} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_0} \lim_{\alpha\to 0} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{\delta^2} + \frac{12}{3}\frac{}{\delta^3}\alpha + \cdots\right)\right]$$

$$\frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{2\mu_0}\left[1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right] \qquad (2.2\text{-}25)$$

que está de acuerdo con la Ec. 2.2-16.

A partir de la Ec. 2.2-24 puede demostrarse que la velocidad media es

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos\beta}{\mu_0}\left[e^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right) - \frac{2}{\alpha^3}\right] \qquad (2.2\text{-}26)$$

El lector puede comprobar que este resultado se transforma en la Ec. 2.2-18 cuando a = 0.

§ 2.3 FLUJO A TRAVÉS DE UN TUBO CIRCULAR

El flujo de fluidos en tubos circulares se encuentra con frecuencia en física, química, biología e ingeniería. El flujo laminar de fluidos en tubos circulares puede analizarse mediante el balance de cantidad de movimiento que se ha descrito en § 2.1. -La única modalidad nueva que se introduce aquí es el uso de coordenadas cilíndricas, que son las coordenadas naturales para describir las posiciones en una tubería circular.

Consideremos el flujo laminar en estado estacionario de un fluido de densidad constante ρ en un tubo «muy largo» de longitud L y radio R. Especificamos que el fubo sea «muy largo» porque vamos a suponer que no existen *efectos finales»; es decir, que vamos a ignorar el hecho de que a la entra& y a la salida el Aujo no será necesariamente paralelo a la superficie del tubo.

Elegimos como sistema una envoltura cilíndrica de espesor Δr y longitud L (véase Fig. 2.3—1), y comenzamos por enumerar las distintas contribuciones al balance de cantidad de movimiento en la dirección z:

velocidad de entra& de cantidad de movimiento a través de la superficie cilíndrica situada en r $\qquad (2\pi r L \tau_{rz})|_r \qquad (2.3\text{–}1)$

velocidad de salida de cantidad de movimiento a través de la superficie cilíndrica situada en $r + \Delta r$ $\qquad (2\pi r L \tau_{rz})|_{r+\Delta r} \qquad (2.3\text{–}2)$

velocidad de entrada de cantidad de movimiento a través de la superficie anular situada en z = 0

$$(2\pi r\Delta r\, v_z)(\rho v_z)|_{z=0} \qquad (2.3\text{-}3)$$

velocidad de salida de cantidad de movimiento a través de la superficie anular situada en z = L

$$(2\pi r\Delta r\, v_z)(\rho v_z)|_{z=L} \qquad (2.3\text{-}4)$$

fuerza de gravedad que actúa sobre la envoltura cilíndrica

$$(2\pi r\Delta r L)\rho g \qquad (2.3\text{-}5)$$

fuerza de presión que actúa sobre la superficie anular situada en z = 0

$$(2\pi r\Delta r)p_0 \qquad (2.3\text{-}6)$$

fuerza de presión que actúa sobre la superficie anular situada en z = L

$$-(2\pi r\Delta r)p_L\ , \qquad (2.3\text{-}7)$$

Téngase en cuenta una vez más que la «entrada» y «salida» se toma en la dirección positiva de los ejes.

Sumando las contribuciones al balance de cantidad de movimiento, se obtiene

$$(2\pi rL\tau_{rz})|_r - (2\pi rL\tau_{rz})|_{r+\Delta r} + (2\pi r\Delta r\rho v_z^2)|_{z=0}$$

$$-(2\pi r\Delta r\rho v_z^2)|_{z=L} + 2\pi r\,\Delta rL\rho g + 2\pi r\,\Delta r(p_0 - p_L) = 0 \qquad (2.3\text{-}8)$$

Como se supone que el fluido es incompresible, v_z es la misma para z = 0 y z = L, y, por tanto, los términos tercero y cuarto se anulan entre sí. Dividiendo la Ec. 2.3-8 por $2\pi L\Delta r$ y pasando al límite, cuando Δr tiende hacia cero, queda

$$\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{(r\tau_{rz})|_{r+\Delta r} - (r\tau_{rz})|_r}{\Delta r}\right) = \left(\frac{p_0 - p_L}{L} + \rho g\right)r \qquad (2.3\text{-}9)$$

El primer miembro de esta ecuación es por definición la derivada primera, y por, tanto la Ec. 2.3-9 puede escribirse así:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L}\right)r \qquad (2.3\text{-}10)$$

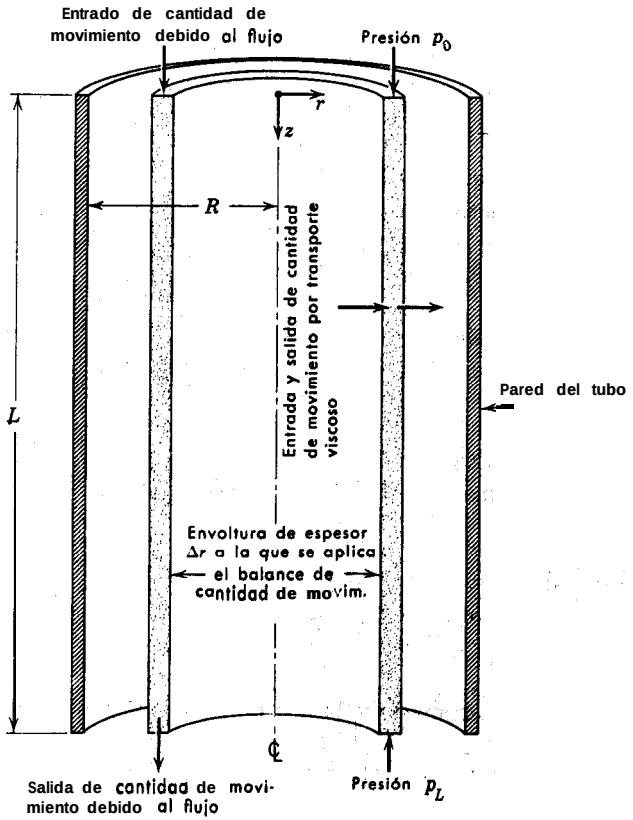


Fig. 2.3-1 Envoltura cilíndrica de un fluido sobre la cual se aplica el balance de cantidad de movimiento, para obtener el perfil de velocidad y la fórmula de Hagen-Poiseuille para la velocidad volumétrica de flujo.

en la que[1] $\mathcal{P} = p - \rho g z$. La Ec. 2.3-10 puede integrarse para obtener:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) r + \frac{C_1}{r} \tag{2.3-11}$$

La constante C_1 tiene que ser cero si la densidad de flujo de cantidad de movimiento no es infinita para $r = 0$. La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento es, por consiguiente

[1] El término $\mathcal{P}$ representa el efecto combinado de la presión estática y la fuerza de gravitación. Con el fin de permitir otras orientaciones de flujo, se puede definir Ben esta forma más general $\mathcal{P} = p + \rho g h$, siendo h la distancia medida *hacia arriba* (es decir, en sentido contrario a la gravedad) desde un plano cualquiera, que se toma como referencia.

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) r \qquad (2.3\text{–}12)$$

Esta **distribución** se indica en la Fig. 2.3-2

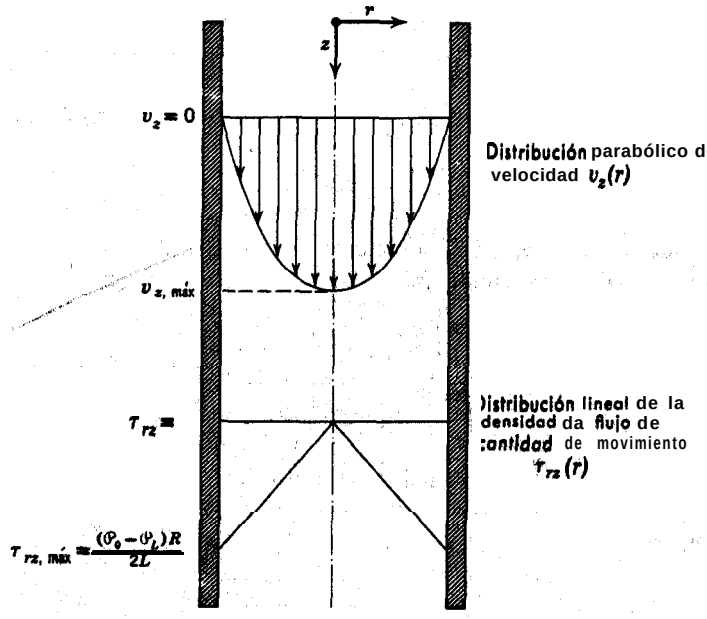


Fig. 2.3-2 **Distribuciones** de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo en tubos **cilíndricos.**

La ley de **Newton de la viscosidad** para este caso es

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \qquad (2.3\text{–}13)$$

Substituyendo este valor de τ_{rz} en la **Ec. 2.3**— 12, se obtiene para la velocidad la siguiente **ecuación** diferencial :

$$\frac{dv_z}{dr} = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L}\right) r \qquad (2.3\text{-}14)$$

Integrando, se llega **a**

$$v_z = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L}\right) r^2 + C_2 \qquad (2.3\text{-}15)$$

Teniendo en Cuenta la condición límite de **que** v_z es cero para $r = R$, se obtiene para la constante C_2 el valor $(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2/4\mu L$. La distribución de velocidad es por tanto

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \textbf{(2.3–16)}$$

Este resultado nos indica que la distribución de velocidad para el flujo laminar de un fluido incompresible en un tubo es parabólica. (Véase Fig. 2.3-2.)

Una vez que se conoce el perfil de velocidad, pueden calcularse fácilmente las siguientes magnitudes :

(i) La ***velocidad máxima,*** $v_{z,\text{máx.}}$, tiene lugar para $r = 0$, y su valor es

$$v_{z,\text{máx}} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L} \qquad (2.347)$$

(ii) ***La velocidad media*** $\langle v_z \rangle$, se calcula sumando todas las velocidades en una sección transversal y dividiendo por el área de dicha sección:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{8\mu L} \qquad (2.3\text{-}18)$$

Los detalles de la integración se dejan para el lector. Nótese que $\langle v_z \rangle = {}^1/_2\, v_{z,\text{máx.}}$

(iii) La ***velocidad volumétrica de flujo*** Q, es el producto del área por la velocidad media, por tanto

$$Q = \frac{\pi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^4}{8\mu L} \qquad (2.3\text{-}19)$$

Este último resultado es la conocida ley de Hagen-Poiseuille, en honor de los dos científicos[3],[4] que se han hecho famosos con esta fórmula. Establece la relación que existe entre la velocidad volumétrica de flujo y las fuerzas que originan dicho flujo (las fuerzas relacionadas con la caída de presión y la aceleración gravitacional).

(iv) El componente *z* de la ***fuerza del fluido que actúa sobre la superficie mojada de la tubería*** F_z, es exactamente la densidad *de flujo de cantidad de movimiento integrado sobre el área mojada:

$$F_z = (2\pi RL)\left(-\mu \frac{dv_z}{dr}\right)\Big|_{r=R} = \pi R^2(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)$$

$$= \pi R^2(p_0 - p_L) + \pi R^2 L\rho g \qquad (2.3\text{-}20)$$

[3] G. HAGEN, *Ann. Phys. Chem., 46, 423-442 (1839).*

[4] J. L. POISEUILLE, *Comptes Rendus,* **11,** *961 y* 1041 (1840); *12, 112 (1841).*

Este resultado viene a decir que la fuerza neta que actúa en el sentido de la corriente sobre el cilindro de fluido, debido a la diferencia de presión y a la aceleración gravitacional, se equilibra exactamente por la fuerza viscosa F_z, que tiende a oponerse al movimiento del fluido.

Los resultados de esta sección son válidos solamente para valores del número de Reynolds inferiores a 2100, para los que el flujo es laminar. Para este sistema se acostumbra definir el número de Reynolds por Re = $D\langle v_z\rangle\rho/\mu$, siendo $D = 2R$, el diámetro del tubo.

A continuación vamos a resumir todas las suposiciones que están implícitas en el desarrollo de la ley de Hagen-Poiseuille:

a. El flujo es laminar (Re menor que aproximadamente 2100)

b. La densidad ρ es constante («flujo incompresible»)

c. El flujo es independiente del tiempo («estado estacionario»); el problema correspondiente al estado no estacionario se trata en § 4.1.

d. El fluido es newtoniano; es decir, $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$.

e. Los efectos finales son despreciables. En la práctica se necesita una «longitud de entrada» (después de la entrada del tubo) del orden de $L_e = 0{,}035\,D\,\mathrm{Re}$ para que se formen los perfiles parabólicos. Si en la sección de la tubería de que se trata está incluida la región de entrada hay que aplicar una corrección[5]. El factor de corrección que se introduce bien sea en $\Delta\mathcal{P}$ o en Q nunca excede de L_e/L si $L > L_e$.

f. El fluido se comporta como un medio continuo. Esta, suposición es válida, excepto para los gases muy diluidos o tubos capilares muy estrechos, en los que el recorrido libre medio es comparable al diámetro del tubo (régimen de «flujo de deslizamiento»), o mucho mayor que el diámetro del tubo (régimen de «flujo de Knudsen» o de «flujo de molécula libre»)[6].

g. No hay deslizamiento en la pared. Esta suposición es muy correcta para los fluidos puros en las condiciones que se han supuesto en (f).

Ejemplo 2.3-1. Determinación de la viscosidad a partir de datos de flujo en un capilar

Por un tubo horizontal de.30 cm de longitud y 2,5 mm de diámetro interno, fluye glicerina ($CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH_2OH$) a 26,5° C. Para una caída de presión de 2,957 kg cm^{-2} la velocidad de flujo es 1,883 cm^3 seg^{-1}. La densidad de la glicerina a 26, 5° C es 1,261 g cm^{-3}. A partir de estos datos calcular la viscosidad de la glicerina en centipoises. (La medida del flujo en tubos capilares es uno de los métodos corrientes para la determinación de viscosidad; estos aparatos se denominan «viscosímetros capilares».)

---

[5] J. H. PERRY, *Chemical Engineers Handboock*, McGraw-Hill, Nueva York (1950), Tercera edición, pp. 388-389. W. M. KAYS y A. L. LONDON, *Compact Heat Exchangers*, McGraw-Hill, Nueva York (1958), p. 49.

[6] M. KNUDSEN, *The Kinetic Theory of Gases*, Methuen, Londres (1934). E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, Nueva York (1938). G. N. PATTERSON, Molecular *Flow of* Cuses, Wiley, Nueva York (1956).

Solución. A partir de la ley de Hagen-Poiseuille (Ec. 2.3−19), se obtiene:

$$\mu = \frac{\pi \Delta p R^4}{8QL}$$

$$= \frac{\pi\ (2{,}957 \times 10^3 \text{ g cm-s})\ (981 \text{ dinas g-t})\ (1{,}25)^4 \times 10^{-4} \text{ cm}^4}{8(\ 1{,}883\ \text{cm}^3\ \text{seg}^{-1})\ (30 \text{ cm})}$$

$$= 4{,}92 \text{ g cm-t seg}^{-1} = 492\text{cp} \qquad (2.3\text{-}21)$$

Es preciso comprobar que el flujo es laminar. El número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{D\langle v_z \rangle \rho}{\mu} = \frac{4}{\pi} \frac{Q}{D} \frac{\rho}{\mu}$$

$$= \frac{4(1{,}883\ \text{cm}^3\ \text{seg}^{-1})\ (1{,}261\ \text{g cm-*})}{\pi\ (0{,}25 \text{ cm})\ (4{,}92 \text{ g cm}^{-1} \text{ seg-t})}$$

$$= 2{,}46 \text{ (adimensional)} \qquad (2.3\text{-}22)$$

Por lo tanto, el flujo es evidentemente laminar. Por otra parte, la longitud de entrada, L_e, es

$$L_e \doteq 0{,}035 D\ Re = (0{,}035)\ (0{,}25)\ (2.46) = 0{,}022 \text{ cm}$$

De esto se deduce que los efectos de entrada carecen de importancia, y que el valor de la viscosidad que hemos obtenido está correctamente calculado.

Ejemplo 2.3-2. Flujo de Bingham en un tubo capilar

Un fluido cuyo comportamiento se ajusta muy aproximadamente al modelo de Bingham (vtase Ec. 1.2-2) circula por un tubo vertical en virtud de un gradiente de presión y/o la aceleración de la gravedad. El radio y la longitud del tubo son, respectivamente, R y L. Se desea obtener una relación entre la velocidad volumétrica de flujo, Q, y la combinación de las fuerzas de presión y gravedad que actúan sobre el fluido.

Solución. La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo de cualquier clase de fluido en un tubo circular, viene dada por la Ec. 2.3−12. De acuerdo con la Fig. 1.2−1, el gradiente de velocidad para un fluido de Bingham es cero mientras la densidad-de flujo de cantidad de movimiento seá menor de un cierto valor τ_0. Por lo tanto, es de esperar que exista una región de «flujo de tapón» en la parte central del tubo, tal como se ha representado en la Fig. 2.3-3. Fuera de la región de flujo de tapón, la densidad de flujo de cantidad de movimiento y el gradiente de velocidad están relacionados por la Ec. 1.2−2*a*. Substituyendo en la Ec. 2.3 − 12 la Ec. 1.2−2*a*, expresada en coordenadas cilíndricas, se obtiene

$$\tau_0 - \mu_0 \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2L}\right) r \qquad (2.3\text{-}23)$$

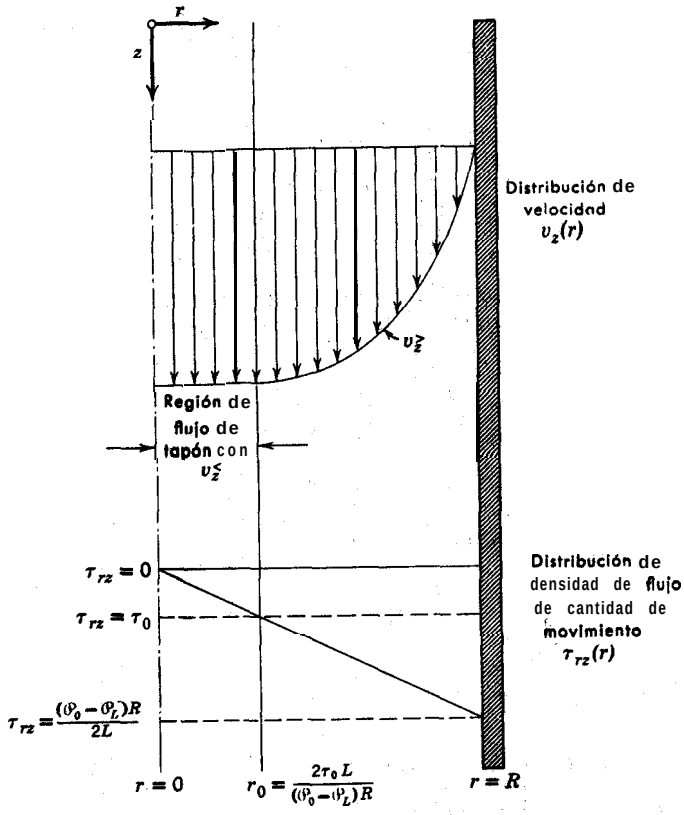


Fig. 2.3-3. **Flujo** de un fluido de Bingham en un tubo circular.

Al integrar esta ecuación diferencial **de** primer orden de variables separables, resulta

$$v_z = -\left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu_0 L}\right) r^2 + \frac{\tau_0}{\mu_0} r + C_2 \qquad (2.3\text{-}24)$$

La constante C_2 se calcula utilizando la co'ndicibn limite de que $v_z = 0$ para $r = R$. Con esto se **llega** finalmente a la siguiente distribución de velocidad:

$$v_z^> = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu_0 L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0 R}{\mu_0}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right] \quad r > r_0 \qquad (2.3\text{-}25)$$

$$v_z^< = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu_0 L}\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^2 \quad r < r_0 \qquad (2.3\text{-}26)$$

Siendo re el radio de la región de flujo de tapón, que está definido por $\tau_0 = (\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L) r_0/2L$. La Ec. 2.3 -26 se obtiene haciendo r = r_0 en la Ec. 2.3 -25 y simplificando.

La velocidad volumétrica de flujo puede calcularse de la siguiente forma:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^{r_0} v_z^{<} r\, dr + 2\pi\int_{r_0}^R v_z^{>} r\, dr \qquad (2.3\text{-}27)$$

Las integrales pueden evaluarse substituyendo en estas ecuaciones las correspondientes expresiones de $v_z^<$ y $v_z^>$. Sin embargo, resulta más sencillo integrar por partes la primera expresión de Q:

$$Q = 2\pi\left[\frac{1}{2} r^2 v_z \Big|_0^R - \frac{1}{2}\int_0^R \left(\frac{dv_z}{dr}\right) r^2\, dr\right] \qquad (2.3\text{-}28)$$

El término $r^2 v_z$ es cero para ambos límites, y además, el límite inferior de la integra1 puede substituirse por r_0 puesto que $dv_z/dr = 0$ cuando $r < r_0$.

Por lo tanto, la velocidad volumétrica de flujo es

$$Q = \pi\int_{r_0}^R (-dv_z^{>}/dr) r^2\, dr = \pi\int_{r_0}^R \left[\left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{2\mu_0 L}\right) r - \frac{\tau_0}{\mu_0}\right] r^2\, dr \qquad (2.3\text{-}29)$$

Efectuando la integración, y utilizando el símbolo τ_R para la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la pared, $\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R}{2L}$, se obtiene

$$Q = \frac{\pi(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^4}{8\mu_0 L}\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_R}\right)^4\right] \qquad (2.3\text{-}30)$$

que es la Ecuación de *Buckingham-Reiner*.[7,8,9] Cuando τ_0 es cero, el modelo de Bingham se transforma en el modelo newtoniano, y la Ec. 2.3-30 se convierte en la ecuación de Hagen-Poiseuille.

§ 2.4. FLUJO A TRAVÉS DE UNA SECCIÓN DE CORONA CIRCULAR

Vamos a considerar ahora otro problema de flujo viscoso en coordenadas cilíndricas, pero cuyas condiciones límites son diferentes. Un fluido incompresible fluye en estado estacionario a través de la región comprendida entre dos cilindros

[7] E. BUCKINGHAM, *Proc. ASTM*, **21**, 1154-1161 (1921).

[8] M. REINER, *Deformation and Flow*, Lewis, Londres (1949).

[9] M. REINER, «Phenomenological-Macrorheology», capítulo 2 de *Rheology*, F. R. Eirich (Ed.), Academic Press, Nueva York (1956). vol. 1, p. 45

circulares coaxiales de radios κR y R (véase Fig. 2.4-1). Comenzamos efectuando un balance de cantidad de movimiento sobre una fina envoltura cilíndrica, y se

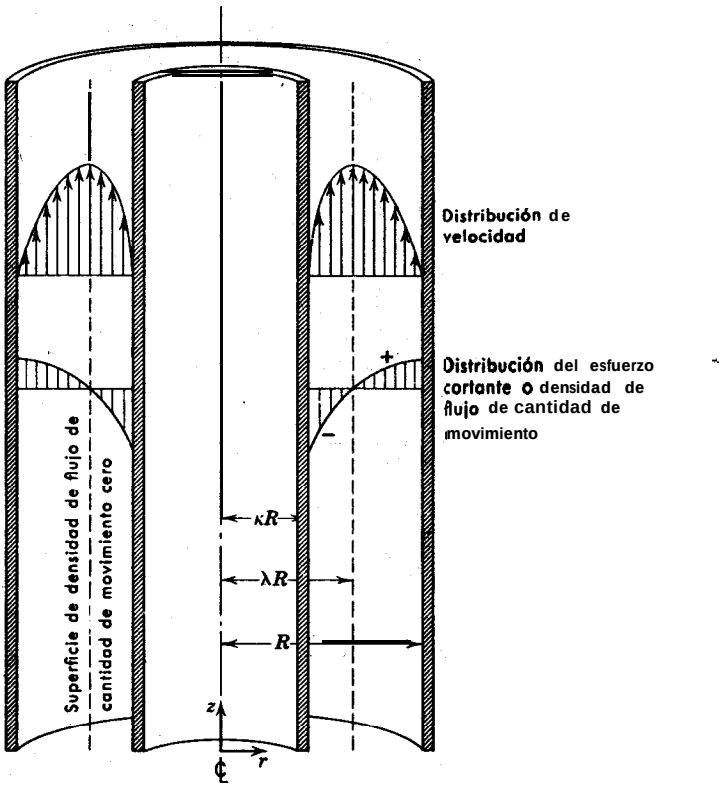


Fig. 2.4-1. Flujo ascendente a través de dos cilindros concéntricos.

llega a la misma ecuación diferencial que se ha obtenido anteriormente para el flujo en un tubo (véase Ec. 2.3-10):

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L}\right)r \tag{2.4-1}$$

Téngase en cuenta que para este problema $\mathscr{P} = p + \rho gz$, puesto que las fuerzas de presión y gravedad actúan en direcciones opuestas (es decir, que z corresponde a h en la nota 1 al pie de la página 45). Esta ecuación diferencial puede integrarse igual que antes (véase Ec. 2.3-11), para obtener

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{2L}\right)r + \frac{C_1}{r} \tag{2.4-2}$$

La constante C_1 no puede determinarse de forma inmediata, puesto que no disponemos de información acerca de la densidad de flujo, de cantidad de movimiento en ninguna de las dos superficies $r = \kappa R$ o $r = R$. Lo más que podemos decir es que ha de existir un máximo de la curva de velocidad' en un cierto plano (hasta ahora desconocido) $r = AR$, para el cual la densidad de flujo de cantidad de movimiento ha de ser cero. Teniendo esto en cuenta, puede substituirse C_1 por $-(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)(\lambda R)^2/2L$, con lo que la Ec. 2.4-2 se transforma en

$$\tau_{rz} = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad (2.4\text{–}3)$$

Nótese que λ es todavía una constante de integración desconocida. La única razón de haber substituido Cr por λ es que conocemos el significado físico de λ.

Substituyendo en la Ec. 2.4-3 la ley de la viscosidad de Newton $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$ se obtiene esta ecuación diferencial:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R}{2\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2\left(\frac{R}{r}\right)\right] \qquad (2.4\text{-}4)$$

Integrando con respecto a r:

$$v_z = -\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2\right] \qquad (2.4\text{–}5)$$

Ahora pueden evaluarse las dos constantes de integración λ y Ca, utilizando las dos siguientes condiciones límite :

C.L. 1 : para $r = \kappa R$ $\quad v_z = 0$ *(2.4-6)*

C.L. 2: para $r = R$ $\quad v_z = 0$ *(2.4-7)*

Substituyendo estas condiciones límites en la Ec. 2.4-5 se obtienen estas dos ecuaciones simultáneas

$$0 = -\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{4\mu L}(\kappa^2 - 2\lambda^2 \ln \kappa + C_2) \qquad (2.4\text{-}8)$$

$$0 = -\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{4\mu L}(1 + C_2) \qquad (2.4\text{-}9)$$

de las que se deduce el valor de las constantes C_2 y λ

$$C_2 = -1 \qquad 2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \qquad (2.4\text{–}10,11)$$

Substituyendo estos valores en las Ecs. 2.4-3 y 2.4-5 se obtienen, respectivamente, la distribución[1] de densidad de flujo de cantidad de movimiento y la distribución de velocidad, para el flujo incompresible en estado estacionario a través de dos tubos concéntricos

$$\boxed{\tau_{rz} = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R}{2L}\left[\left(\frac{r}{R}\right) - \left(\frac{1-\kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\right)\left(\frac{R}{r}\right)\right]} \tag{2.4-12}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v_z = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{1-\kappa^2}{\ln(1/\kappa)}\right)\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]} \tag{2.4-13}$$

Obsérvese que cuando κ se hace cero estas ecuaciones se transforman en las correspondientes al flujo en tubos circulares (véanse Ecs. 2.3-12 y 2.3-16). El lector deberá de habituarse a comprobar analíticamente los resultados para asegurarse de que describen adecuadamente los «casos límite».

Una vez que se conocen ya las distribuciones de velocidad y densidad de flujo de cantidad de movimiento, pueden obtenerse de forma inmediata otras magnitudes interesantes:

(i) La *velocidad máxima*

$$v_{z,\text{máx}} = v_z\Big|_{r=\kappa R} = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{4\mu L}\left\{1 - \left(\frac{1-\kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\right)\left[1 - \ln\left(\frac{1-\kappa^2}{2\ln(1/\kappa)}\right)\right]\right\} \tag{2.4-14}$$

(ii) La *velocidad media*

$$\langle v_z\rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{\kappa R}^{R} v_z r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_{\kappa R}^{R} r\, dr\, d\theta} = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{8\mu L}\left(\frac{1-\kappa^4}{1-\kappa^2} - \frac{1-\kappa^2}{\ln(1/\kappa)}\right) \tag{2.4-15}$$

(iii) *La Velocidad volumétrica de flujo*

$$Q = \pi R^2(1-\kappa^2)\langle v_z\rangle = \frac{\pi(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^4}{8\mu L}\left((1-\kappa^4) - \frac{(1-\kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)}\right) \tag{2.4-16}$$

(id, *La fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido se* obtiene sumando las fuerzas que actúan sobre los cilindros interior y exterior, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_z &= -\tau_{rz}|_{r=\kappa R} \cdot 2\pi\kappa RL + \tau_{rz}|_{r=R} \cdot 2\pi RL \\ &= \pi R^2(1-\kappa^2)(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L) \end{aligned} \tag{2.4-17}$$

[1] La distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento para el flujo no-newtoniano *no* viene dada por La Ec. 2.4-14. Véase el problema 2.9.

El lector deberá de comprobar e interpretar, como ejercicio, estos resultados.

Las ecuaciones anteriores se transforman en las fórmulas para el flujo en tubos circulares en el caso límite de que $\kappa \to 0$. De igual forma, se obtienen también las ecuaciones para el flujo en rendijas planas cuando $\kappa \to 1$. Los procesos necesarios para obtener estas últimas se tratan en los problemas 2.F (para la velocidad volumétrica de, flujo) y 2.P (para los perfiles de velocidad).

La solución que se ha obtenido es sólo válida para el flujo laminar. La transición de laminar a turbulento se produce en las inmediaciones de Re = 2000, estando el número de Reynolds definido por $\mathrm{Re} = 2R\,(1-\kappa)\langle v_z\rangle\rho/\mu$. En realidad, antes de la transición, el flujo laminar estable presenta un movimiento sinuoso[2].

§ 2.5 FLUJO ADYACENTE DE DOS FLUIDOS INMISCIBLES[1]

-Hasta aquí hemos considerado casos de flujo con superficies de separación sólido-fluido y líquido-gas. Vamos a ver ahora un ejemplo de flujo con superficie de separación líquido-líquido. (Véase Fig. 2.5— 1.)

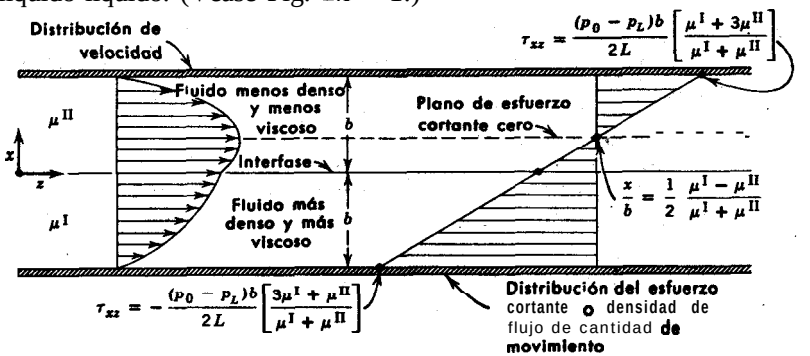


Fig. 2.5-1. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos láminas planas paralelas debido a un gradiente de presión.

Dos fluidos inmiscibles e incompresibles circulan, debido a un gradiente de presión, en la dirección z de una estrecha rendija horizontal de longitud L y anchura W. Las velocidades de los fluidos están ajustadas de tal forma que una mitad de la rendija esta llena del fluido I (la fase más densa), y la otra mitad está ocupada por el fluido II (la fase menos densa). Se de- analizar la distribución de velocidad y de densidad de 5ujo de cantidad de movimiento en este sistema.

Un balance diferencial de cantidad de movimiento conduce a la siguiente ecuación :

---

[2] R. S. PRENGLE y R. R. ROTHEUS, *Ind. Eng. Chem.*, 47, 379-386 (1955).

[1] El flujo adyacente de una capa laminar y otra turbulenta ha sido estudiado por T. J. HANRATTY y J. M. ENGEN, *A. 1. Ch. E. Journal*, 3, 399-304 (1957). El flujo anular gas-líquido en tubos ha sido tratado por. A. D. K. LAIRD, *Trans. ASME*, 76, 1005-1010 (1954). y S. CALVERT y B. WILLIAMS, *A. I. Ch. E. Journal*, 1, 78-86 (1955).

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} \tag{2.5-1}$$

Esta ecuación se obtiene tanto para la fase 1 como para la fase II. Integrando la Ec. 2.5-1 para las dos regiones, resulta

$$\tau_{xz}{}^{1} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right)x + C_1{}^{\mathrm{I}} \tag{2.5-2}$$

$$\tau_{xz}{}^{\mathrm{II}} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right)x + C_1{}^{\mathrm{II}} \tag{2.5-3}$$

Se utiliza la condición límite de que el transporte de cantidad de movimiento es continuo a través de la interfase de los dos fluidos:

C.L. 1 : para $x = 0$ $\tau_{xz}{}^{\mathrm{I}} = \tau_{xz}{}^{\mathrm{II}}$ (2.5-4)

Lo que nos indica que $C_1{}^{\mathrm{I}} = C_1{}^{\mathrm{II}}$, y, por tanto, le llamaremos simplemente constante de integración C_1.

Si se substituye la ley de Newton de la viscosidad en las Ecs. 2.5-2 y 2.5~3, se llega a

$$-\mu^{\mathrm{I}}\frac{dv_z{}^{\mathrm{I}}}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right)x + C_1 \tag{2.5-5}$$

$$-\mu^{\mathrm{II}}\frac{dv_z{}^{\mathrm{II}}}{dx} = \left(\frac{p_0 - p_L}{L}\right)x + C_1 \tag{2.5-6}$$

La integración de estas ecuaciones da

$$v_z{}^{\mathrm{I}} = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^{\mathrm{I}}L} - \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{I}}}x + C_2{}^{\mathrm{I}} \tag{2.5-7}$$

$$v_z{}^{\mathrm{II}} = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^{\mathrm{II}}L} - \frac{C_1}{\mu^{\mathrm{II}}}x + C_2{}^{\mathrm{II}} \tag{2.5-8}$$

Para determinar las tres constantes de integración, se utiliin estas tres condiciones límite adicionales

C.L. 2 : para x = 0, $v_z{}^{\mathrm{I}} = v_z{}^{\mathrm{II}}$ (2.5-9)

C.L. 3 : para x = $-b$, $v_z{}^{\mathrm{I}} = o$ (2.5—10)

C.L. 4 : para $x = +b$, $v_z{}^{\mathrm{II}} = 0$ (2.5—11)

Al establecer matemáticamente estas condiciones límite se obtiene

B.C. 2: $$C_2^{\mathrm{I}} = C_2^{\mathrm{II}} \tag{2.5-12}$$

B.C. 3: $$0 = -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{\mathrm{I}}L} + \frac{C_1 b}{\mu^{\mathrm{I}}} + C_2^{\mathrm{I}} \tag{2.5-13}$$

B.C. 4: $$0 = -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{\mathrm{II}}L} - \frac{C_1 b}{\mu^{\mathrm{II}}} + C_2^{\mathrm{II}} \tag{2.5-14}$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$C_1 = -\frac{(p_0 - p_L)b}{2L}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) \tag{2.5-15}$$

$$C_2^{\mathrm{I}} = +\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{\mathrm{I}}L}\left(\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) = C_2^{\mathrm{II}} \tag{2.5-16}$$

Por lo tanto, los perfiles de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad son:

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)b}{L}\left[\left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\right] \tag{2.5-17}$$

$$v_z^{\mathrm{I}} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{\mathrm{I}}L}\left[\left(\frac{2\mu^{\mathrm{I}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) + \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right] \tag{2.5-18}$$

$$v_z^{\mathrm{II}} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{\mathrm{II}}L}\left[\left(\frac{2\mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) + \left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} - \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right)\left(\frac{x}{b}\right) - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right] \tag{2.5-19}$$

Estas distribuciones se indican en la Fig. 2.5-1. Obsérvese que si $\mu^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{II}}$, ambas distribuciones son iguales, y los resultados se transforman en el perfil parabólico de velocidad para el flujo laminar de un fluido puro en una rendija.

La ***velocidad media*** en cada capa puede calcularse de esta forma:

$$\langle v_z^{\mathrm{I}} \rangle = \frac{1}{b}\int_{-b}^{0} v_z^{\mathrm{I}}\, dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{\mathrm{I}}L}\left(\frac{7\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) \tag{2.5-20}$$

$$\langle v_z^{\mathrm{II}} \rangle = \frac{1}{b}\int_{0}^{b} v_z^{\mathrm{II}}\, dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{\mathrm{II}}L}\left(\frac{\mu^{\mathrm{I}} + 7\mu^{\mathrm{II}}}{\mu^{\mathrm{I}} + \mu^{\mathrm{II}}}\right) \tag{2.5-21}$$

A partir de las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento y de la velocidad, que hemos obtenido anteriormente, se puede además calcular la velocidad máxima, la velocidad en la interfase, el plano de esfuerzo cortante cero y la fricción en las paredes de la rendija.

§ 2.6 FLUJO REPTANTE ALREDEDOR DE UNA ESFERA SÓLIDA[1,2]

En las secciones anteriores hemos resuelto algunos problemas elementales de flujo viscoso, mediante. la aplicación de balances diferenciales de cantidad de movimiento. En la sección inicial de este capítulo se insistió en que este método de análisis está restringido a los sistemas con líneas de corriente rectas. Puesto que el problema del flujo alrededor de una esfera implica líneas de corriente curvas, no puede resolverse por las técnicas que hemos visto en este capítulo. Sin embargo, lo trataremos aquí brevemente debido a la importancia que tiene en ingenieria el flujo alrededor de objetos sumergidos. No se pretenden deducir las expresiones para las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, de la presión y de la velocidad, sino que enunciaremos estos resultados y los utilizaremos después para deducir algunas relaciones importantes que serán necesarias en posteriores tratamientos.

Consideremos el flujo muy lento de un fluido incompresible alrededor de una esfera sólida, tal como se indica en la Fig. 2.6-1. La esfera es de radio R y diámetro D. El fluido tiene una viscosidad μ y una densidad ρ, y asciende verticalmente hacia la esfera con una velocidad uniforme v_∞ a lo largo del eje z negativo. Analíticamente se ha encontrado que para un flujo muy lento, la distribución de la densidad de flujo de cantidad de movimiento, la distribución de presión, y los componentes de la velocidad, expresados en coordenadas esféricas, son:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^4 \operatorname{sen}\theta \tag{2.64}$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta \tag{2.6-2}$$

$$v_r = v_\infty\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta \tag{2.6-3}$$

$$v_\theta = -v_\infty\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\operatorname{sen}\theta \tag{2.6-4}$$

En la Ec. 2.6-2, p_0 es la presión en el plano $z = 0$ alejado de la esfera, $-\rho g z$ es la contribución del peso del fluido (efecto hidrostático), y el termino que contiene v_∞

1 Véase C. G. STOKES, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, *9*, 8 (1850). Vtase cambien H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), Primera edición americana, § 338, pp. 602 y ss.; V. L. STREETER, *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York (1948). pp. 235-240. Un tratamiento mas minucioso puede verse en H. VILLAT, *Leçons sur les fluides visqueux*, Gauthier-Villars, París (1943). capitulo 7, en el que se considera el movimiento no estacionario de una esfera.

2 El flujo no-newtoniano alrededor de una esfera ha sido estudiado por J. C. SLATTERY, tesis doctoral, Universidad de Wisconsin (1959).

resulta como consecuencia del flujo del fluido alrededor de la esfera. Estas ecuaciones son solamente válidas para «flujo reptante», que para este sistema tiene lugar cuando el numero de Reynolds $Dv_\infty\rho/\mu$ es inferior a aproximadamente 0,1. Esta región se caracteriza por la virtual ausencia de remolinos aguas abajo de la esfera.

Obsérvese que la distribución de velocidad cumple la condición de que $v_r = v_\theta = 0$ en la superficie de la esfera. Además, puede demostrarse que v_z tiende hacia v_∞ para puntos alejados de la esfera. Por otra parte, se ve claramente que, lejos de la superficie esférica, la distribución de presión se transforma en la ecuación hidrostática $p = p_0 - \rho gz$. Por lo tanto, las ecuaciones deben de satisfacer las condiciones límite parar=Ryr= co.

Calculamos ahora la fuerza neta que el fluido ejerce sobre la esfera. Esta fuerza se calcula integrando la fuerza normal y la fuerza tangencial sobre la superficie de la esfera.

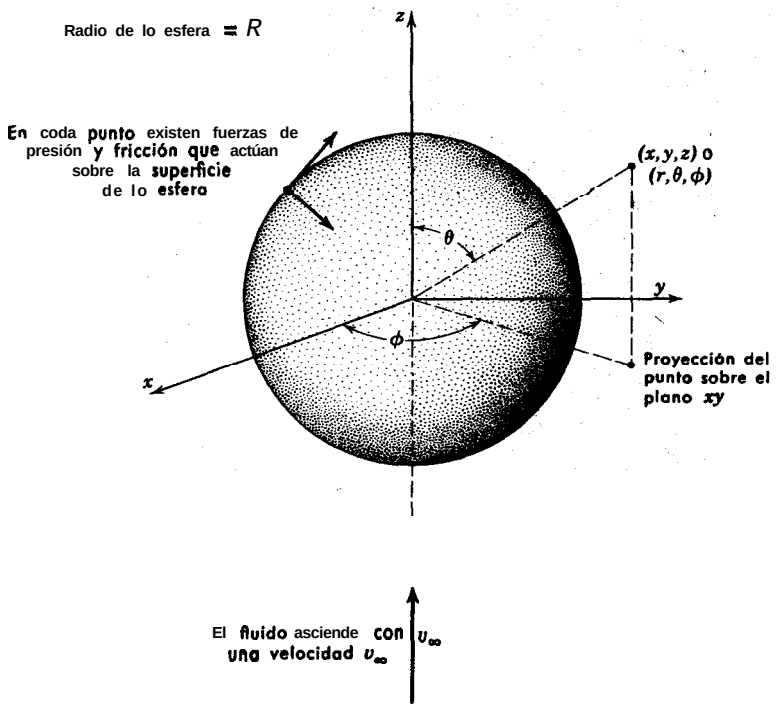


Fig. 2.6-1. Sistema coordenado utilizado para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera rígida.

Integración de la fuerza normal

En cada punto de la superficie esférica existe una presión sobre el sólido que

actúa perpendicularmente a la superficie. El componente z de esta presión es $-p\cos\theta$. Esta presión local se multiplica por el área de la superficie sobre la que actúa, $R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$, y se integra sobre la superficie esférica para obtener la fuerza resultante, en la dirección z:

$$F_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (-p|_{r=R}\cos\theta) R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (2.6\text{-}5)$$

La distribución de presión en la superficie de la esfera es

$$p|_{r=R} = p_0 - \rho g R\cos\theta - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\cos\theta \qquad (2.6\text{-}6)$$

Esta expresión se substituye en la integral de la Ec. 2.6-5. La integral que contiene p_0 se anula, la de $-\rho g R\cos\theta$ da la fuerza de flotación del fluido sobre el sólido, y la integral en que interviene la velocidad da la resistencia de forma. Por lo tanto, queda finalmente

$$F_n = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 2\pi\mu R v_\infty \qquad (2.6\text{-}7)$$

Integración de la fuerza tangencial

En cada punto de la superficie existe también un esfuerzo cortante que actúa tangencialmente. Este esfuerzo, $-\tau_{r\theta}$ es la fuerza que actúa en la dirección θ sobre la unidad de área de la superficie esférica. El componente z de esta fuerza, por unidad de área, es $(-\tau_{r\theta})(-\operatorname{sen}\theta)$. Multiplicando por $R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ e integrando sobre la superficie de la esfera, se obtiene la fuerza resultante en la dirección z:

$$F_t = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (+\tau_{r\theta}|_{r=R} \operatorname{sen}\theta) R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (2.643)$$

La distribución del esfuerzo cortante en la superficie de la esfera, de acuerdo con la Ec. 2.6-1, es

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R}\operatorname{sen}\theta \qquad (2.6\text{-}9)$$

Substituyendo esta expresión en la integral de la Ec. 2.6-8, se obtiene la «resistencia de fricción»

$$F_t = 4\pi\mu R v_\infty \qquad (2.610)$$

Por lo tanto, la fuerza total F del fluido sobre la esfera, viene dada por la suma de las Ecs. 2.6-7 y 2.6-10:

$$F = \underset{\text{(fuerza de flotación)}}{4/3\pi R^3 \rho g} + \underset{\text{(resistencia de forma)}}{2\pi\mu R\ v_\infty} + \underset{\text{(resistencia de fricción)}}{4\pi\mu\ Rv,} \qquad (2.6\text{-}11)$$

o bien

$$F = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R v_\infty \qquad (2.6\text{-}12)$$

El primer término del segundo miembro de la Ec. 2.6-12 representa el empuje y el segundo resulta como consecuencia del movimiento del fluido alrededor de la esfera. Para posteriores consideraciones, es conveniente designar estos dos términos por F_s (la fuerza que se ejerce aunque el fluido esté en reposo) y F_k (la fuerza que resulta del movimiento del fluido, o sea, la contribución «cinética»); en el caso que estamos considerando, estas fuerzas son

$$F_s = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad (2.6\text{-}13)$$

$$F_k = 6\pi\mu R v_\infty \qquad (2.6\text{-}14)$$

La Ec. 2.6— 14 es la conocida *ley de Stokes.* Se aplica en el movimiento de partículas coloidales por efecto de un campo eléctrico, en la teoría de sedimentación, y en el estudio del movimiento de partículas de aerosoles. Téngase en cuenta que la ley de Stokes es válida para números de Reynolds (basados en el diámetro de la esfera) inferiores a aproximadamente 0,1; para Re = 1, la ley de Stokes-predice una fuerza resistente que es un 10 por ciento menor. El comportamiento de este mismo sistema para números de Reynolds más elevados se estudia en el Capítulo 6. Este problema indica que cuando las líneas de corriente son curvas es preciso desarrollar una formulación más general de la mecánica de fluidos, tal como se presenta en el Capítulo 3.

Ejemplo 2.6-1. Determinación de la viscosidad a partir de la velocidad final de caída de una esfera

Deducir una relación que permita obtener la viscosidad de un fluido mediante la velocidad de caída en estado estacionario de una esfera en el seno de un fluido.

Solución. Si una esfera, inicialmente en reposo, se deja caer en un fluido viscoso, adquiere un movimiento acelerado hasta que alcanza una velocidad constante («final»). Cuando se alcanza este estado, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la esfera es cero. La fuerza de gravedad actúa sobre el sólido en la dirección de la caída, y el empuje y la fuerza debida al movimiento actúan en sentido contrario:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu v_t R \qquad (2.6\text{–}15)$$

En esta expresión, R es el radio de la esfera, ρ_s la densidad de la esfera, ρ la densidad del fluido, y v_t la «velocidad final». Despejando μ de la Ec. 2.6—15, se obtiene

$$\mu = 2R^2(\rho_s - \rho)g/9v_t \qquad (2.646)$$

Este resultado es válido solamente cuando $Dv_t\rho/\mu$ es menor que aproximadamente 0,1.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cuál es la definición de derivada primera y cómo se utiliza esta definición en relación con los balances aplicados a una envoltura?

2. Comparar la variación de τ_{rz} con r para el flujo laminar de un fluido en un tubo y en tubos concéntricos.

3. ¿Cuál es la ley de Hagen-Poiseuille y a qué se debe su importancia? Comprobar su consistencia dimensional.

4. ¿Qué es el número de Reynolds? ¿Cuáles son sus dimensiones?

5. Para el flujo en tubos concéntricos, ¿cuál de las dos paredes, interior o exterior, esta mas próxima a la superficie donde la densidad de flujo de cantidad de movimiznto es cero?

6. ¿Qué limitaciones se han hecho *en* la deducción de la fórmula que da el espesor de una película descendente?

7. ¿Cuál es el significado físico de las cuatro condiciones limite que son necesarias para determinar las cuatro constantes de integración en § 2.5?

8. ¿Cuál es el intervalo de validez de la ley de Stokes?

9. ¿Es de esperar que la ley de Stokes sea válida para el descenso de las gotitas de un líquido A en el seno de un medio liquido inmiscible *B?*

10. ¿Se cumplirá la ley de Stokes para el descenso de diminutas partículas en aire, si el di& metro de las partículas es del orden del recorrido libre medio de las moléculas del aire?

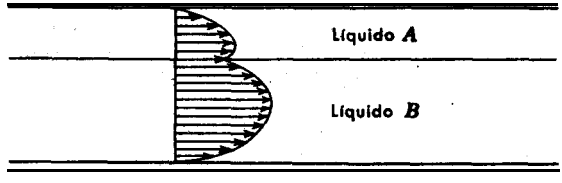
ll. En § 2.6, F_s y F_b deberían en realidad de tratarse como magnitudes vectoriales. ¿Cómo se modificaría la Ec. 2.6–12 si la dirección de flujo del fluido no fuese exactamente contraria a la aceleración de la gravedad?

12. ¿Cómo se elige la forma y la orientación del elemento de volumen utilizado para aplicar un balance de envoltura?

13. ¿ En qué lugar de la deducción efectuada en § 2.3 habría que comenzar a introducir modificaciones. si *(a)* el coeficiente de viscosidad fuese una función de r (debido a condiciones no isotérmicas, por ejemplo); (b), el fluido fuese no-newtoniano?

14. Discútanse las dificultades de medida implícitas en la determinación de viscosidades absolutas mediante la fórmula de Hagen-Poiseuille. Estúdiense los efectos relativos que sobre el resultado ejerce un *error* de un 1 por ciento en las distintas *medidas.*

15. Dos líquidos inmiscibles A y *B* fluyen con movimiento laminar entre dos láminas planas paralelas. ¿Sería posibk que los perfiles de velocidad fuesen de la siguiente forma? (Explíquense brevemente las razones de la respuesta.)



16. ¿Cuál es la velocidad final en un campo eléctrico de intensidad $\mathscr{E}$, de una partícula coloidal esférica que posee una carga e? (Admítase que se cumple la ley de Stokes.)

PROBLEMAS

2.A_1 Determinación del radio de un capilar mediante medidas de flujo

Uno de los métodos para determinar el radio de un tubo capilar consiste en medir la velocidad de flujo de un fluido viscoso a través del tubo. Hallar el radio de un capilar a partir de los siguientes datos:

Longitud del capilar	= 50,02 cm
Viscosidad cinemática del fluido	= 4,03 x 10^{-5} m^2 seg^{-1}
Densidad del fluido	= 0.9552 x 103 kg m^{-3}
Caída de presión a través del tubo capilar (horizontal)	= 4,829 x 10^5 newtons m^{-2}
	= 4,766 atm.
Velocidad de flujo de masa a través del tubo	= 2,997 x 10^{-3} kg seg^{-1}

¿Cuál es el principal inconveniente de este método? Sugiéranse algunos otros métodos de determinación del radio de tubos capilares.

Respuesta: 0.7512 mm.

2.B_1 Velocidad volumétrica de flujo a través de un anillo circular

Un anillo circular horizontal tiene una longitud de 8.23 m. El radio externo del cilindro interior es de 1,257 cm y el radio interno del cilindro exterior es de 2,794 cm. Mediante una bomba se hace circular a través del conducto anular una solución acuosa de sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$) al 60 por ciento a 20" C. La densidad del fluido es de 1,286 g cm-3 y su viscosidad 56,5 cp. ¿Cuál es la velocidad volumétrica de flujo cuando se le comunica una diferencia dé presión de 0.379 kg cm^{-2}?

Respuesta: 3.06 x 10^3 cm^3 seg^{-1}.

2.C_1 Pérdida de partículas catalíticas en un gas de escape

a. Determinar el diámetro máximo de las partículas de un catalizador constituido por microesferas. que pueden perderse en el gas que va a la chimenea en una unidad de cracking de un fluido, en las siguientes condiciones:

Velocidad del gas en el eje de la chimenea = 30,5 cm seg^{-1} (verticalmente hacia arriba)

Viscosidad del gas	= 0,026 cp
Densidad del gas	= 7,21 x 10^{-4} g cm-3
Densidad de una partícula del catalizador	= 1,2 g cm-3

Expresar el resultado en micrones (1 micrón = 10^{-6} cm)

b. ¿Se puede utilizar la ley de Stokes en el caso (*a*)?

Respuesta: $D_{máx}$ = 110 micrones; Re = 0,93.

2.D_2 Flujo de una película descendente. Otras deducciones

a. Deducir el perfil de velocidad y la velocidad media, situando el origen de coordenadas de forma que $\bar{x}$ se mida a partir de la pared (es decir. $\bar{x}$ = 0 corresponde a la pared y $\bar{x} = \delta$ a la superficie libre de la película). Demostrar que la distribución de velocidad viene dada por

$$v_z = (\rho g \delta^2/\mu) \cos\beta[(\bar{x}/\delta) - \tfrac{1}{2}(\bar{x}/\delta)^2] \qquad \text{(2.D–1)}$$

y que la velocidad media es la que se expresa en la Ec. 2.2-18. Demostrar como se puede llegar a la distribución de velocidad de la Ec. 2.D− 1 a partir de la Ec. 2.2-16.

b. En los problemas de este capítulo se ha seguido el procedimiento siguiente: (i) deducir una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de flujo de cantidad de movimiento, (i)

integrar esta ecuación. (iii) introducir en este resultado la ley de Newton con el fin de obtener una ecuación diferencial de primer orden para la velocidad, (iv) integrarla para obtener la distribución de velocidad. Otro procedimiento consiste en, (i) deducir una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de flujo de cantidad de movimiento. (ii) substituir la ley de Newton en esta ecuación con el fin de obtener una ecuación diferencial de segundo orden para la velocidad, (iii) integrar esta ecuación con el *fin* de obtener la distribución de velocidad. Aplicar este procedimiento, substituyendo la Ec. 2.2-12 en la Ec. 2.2-8, y continuar en la forma que se ha indicado. hasta obtener la distribución de velocidad.

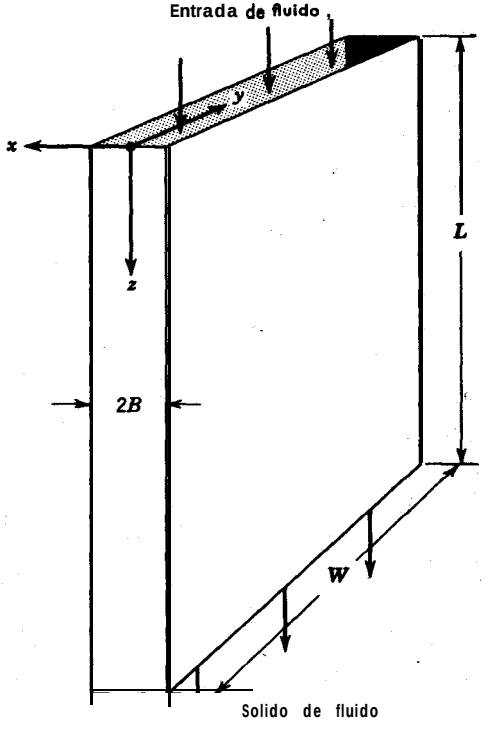


Fig. Z.E. Flujo a través de una rendija.

2.E$_2$ Flujo laminar en una rendija estrecha

Un fluido viscoso circula con flujo laminar por una rendija formada por dos paredes planas separadas una distancia $2B$. Efectuar un balance diferencial de cantidad de movimiento y obtener las expresiones para las distribuciones de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad (véase Fig. 2.E):

$$\tau_{xz} = \left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L}\right)x \tag{2.51}$$

$$v_z = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)B^2}{2\mu L}\left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2\right] \tag{2.E-2}$$

en las que $\mathscr{P} = p + \rho gh = p - \rho gz$ ¿Cuál es la relación de la velocidad media a la **máxima** en la rendija? Obtener la ecuación análoga a la de **Hagen-Poiseuille** para la rendija.

Respuesta: $\langle v_z \rangle = \frac{2}{3} v_{z,\text{máx}}$; $Q = \frac{2}{3} \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L) B^3 W}{\mu L}$

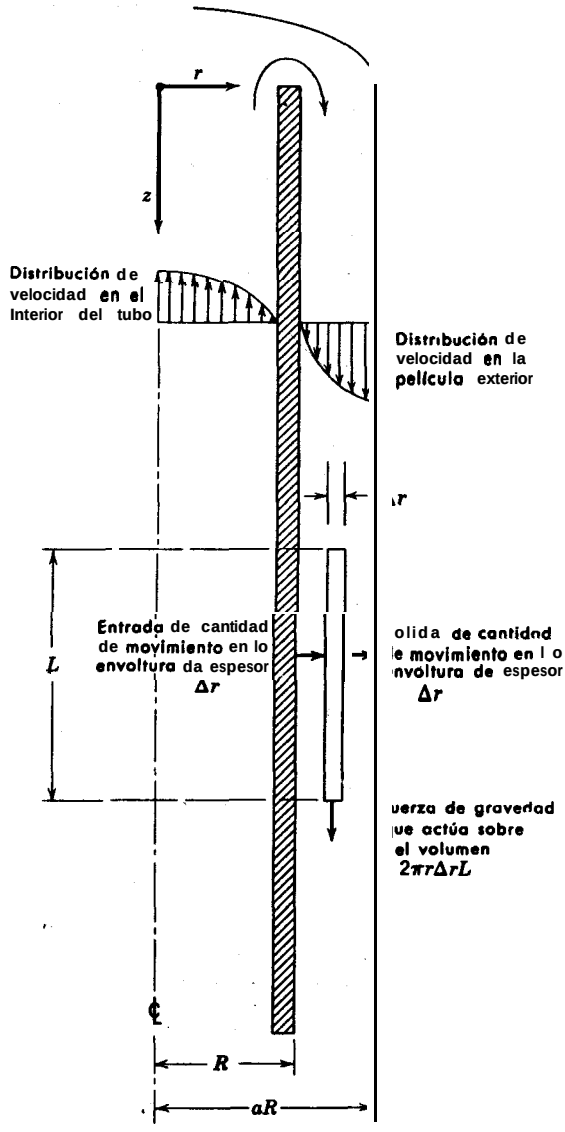


Fig. 2.G. Distribuciones de velocidad y balance de cantidad de movimiento, para una **película** que asciende por el exterior de un tubo circular.

2.F$_2$ Relación entre las fórmulas de la rendija y del anillo circular

Cuando un anillo es muy delgado puede considerarse. muy aproximadamente, como una rendija estrecha. Por consiguiente, se pueden aplicar los resultados del problema 2.E. Por ejemplo, a partir del problema 2.E. es posible obtener la velocidad volumétrica de flujo en un anillo cuyo radio de la pared externa es R y el de la interna $(1-\epsilon)R$, siendo ϵ pequeño, tomando $2B$ igual a ϵR y W igual a $2\pi R$, con lo que.

$$Q = \frac{\pi(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^4\epsilon^3}{6\mu L} \tag{2.F-1}$$

Demostrar que se obtiene el mismo resultado a partir de la Ec. 2.4-16, tomando para κ el valor 1 • y desarrollando la expresión de Q en potencias de ϵ. Esta operación requiere el uso de la serie de Taylor,

$$\ln(1-\epsilon) = -\epsilon - \tfrac{1}{2}\epsilon^2 - \tfrac{1}{3}\epsilon^3 - \tfrac{1}{4}\epsilon^4 - \cdots \tag{2.F-2}$$

y efectuar después una división. (Nora: Utilizar en la deducción los cuatro primeros términos de la serie de Taylor de la Ec. 2.F−2.)

2.G$_2$ Flujo laminar en un película que desciende por el exterior de un tubo circular

En una experiencia de absorción de gases, un fluido viscoso asciende por el interior de un pequeño tubo circular, para descender después por la parte exterior del mismo. (Véase Fig. 2.G.) Aplicar un balance de cantidad de movimiento a una envoltura de película de espesor Δr, tal como se indica en la figura. Obsérvese que las flechas de «entrada de cantidad de movimiento» y «salida de cantidad de movimiento» se toman siempre en la dirección r positiva al efectuar el balance, aun cuando en este caso ocurre que la cantidad de movimiento fluye en la dirección r negativa.

a. Demostrar que la distribución de velocidad en la película descendente (despreciando los efectos finales) es

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2a^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right] \tag{2.G-1}$$

b. Obtener una expresión de la velocidad volumétrica de flujo en la película.

c. Demostrar que el resultado de (*b*) se transforma en la Ec. 2.2 − 19 si el espesor de la película es muy pequeño.

2.H$_2$ Flujo no-newtoniano en un tubo

a. Deducir la fórmula análoga a la de Hagen-Poiseuille para el modelo de Ostwald-de Waele (ley de la potencia). Al hacer la deducción debe de eliminarse primeramente el signo del valor absoluto. Como para el flujo en un tubo dv_z/dr es siempre negativo, la ley de la potencia se transforma en este caso en

$$\tau_{rz} = -m\left|\frac{dv_z}{dr}\right|^{n-1}\frac{dv_z}{dr} = m\left|-\frac{dv_z}{dr}\right|^{n-1}\left(-\frac{dv_z}{dr}\right) = m\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n \tag{2.H-1}$$

Explicar cuidadosamente las transformaciones de la Ec. 2.H−1

b. Deducir una expresión de la velocidad volumétrica para el flujo en un tubo de un fluido de Ellis (véase Ec. 1.2-5):

$$-\frac{dv_z}{dr} = \varphi_0\tau_{rz} + \varphi_1|\tau_{rz}|^{\alpha-1}\tau_{rz} \tag{2.H-2}$$

2.I, Flujo de un fluido de Bingham en un tubo circular[1]

Un tubo vertical está lleno de un fluido de Bingham y cerrado por el extremo inferior mediante una lámina. Al separar la lámina, el fluido puede salir o no del tubo por gravedad. (Véase Fig. 2.1.) Explíquese este hecho y establézcase un criterio de flujo para este experimento.

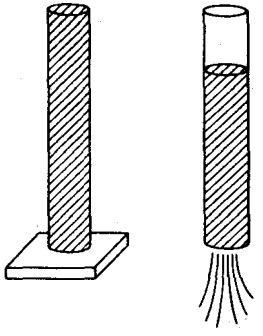


Fig. 2.L Flujo de un fluido de Bingham en un tubo circular

2.J$_2$ Flujo en tubos concéntricos con movimiento axial del cilindro interior

Considerar el sistema representado en la Fig. 2.J, en el que la varilla cilíndrica se mueve con una velocidad V. La varilla y el cilindro son coaxiales. Hallar la distribución de velocidad en estado estacionario y la velocidad volumétrica de flujo. Este tipo de problemas se presentan en el recubrimiento de alambres con barniz[2].

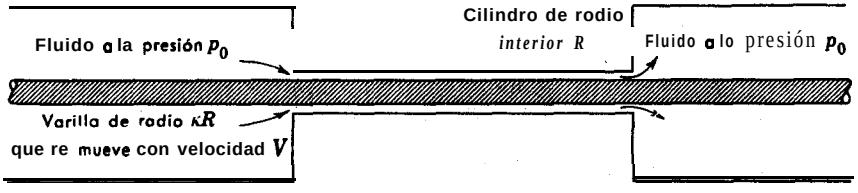


Fig. 2.J. Flujo en tubos concéntricos con movimiento axial del cilindro interior

Respuesta: $\dfrac{v_z}{V} = \dfrac{\ln (r/R)}{\ln \kappa}$; $\quad Q = \dfrac{\pi R^2 V}{2}\left(\dfrac{(1-\kappa^2)}{\ln (1/\kappa)} - 2\kappa^2\right)$

2.K$_2$ Flujo no-newtoniano de una película

Deducir una fórmula para el espesor de una película de un fluido de Bingham descendiendo por una pared plana vertical con una velocidad V (g seg^{-1} por unidad de anchura de pared)

2.L$_3$ Análisis de un medidor de flujo capilar

Determinar la velocidad de flujo (en kg hr-t) en el medidor de flujo capilar de la Fig. 2.L. El fluido que circula por el tubo capilar es agua a 20° C, y como fluido manométrico se utiliza ta

[1] Sugerido por el Prof. H. Kramers, Technische Hogeschool (Delft).

[2] J, B. PATON, P. H. SQUIRES, W. H. DARNELL, F. M. CASH y J. F. CARLEY, *Processing of Thermoplastic Materials*, E. C. Bernhardt (Ed.), Reinhold, Nueva York (1959), capitulo 4, pp. 209-301.

tracloruro de carbono (CCl_4), cuya densidad es de 1,594 $g\,cm^{-3}$. El diámetro del capilar es 0,025 cm. (Obsérvese que para calcular la velocidad de flujo basta medir H y L; es decir que no hace falta medir θ. ¿Por que?)

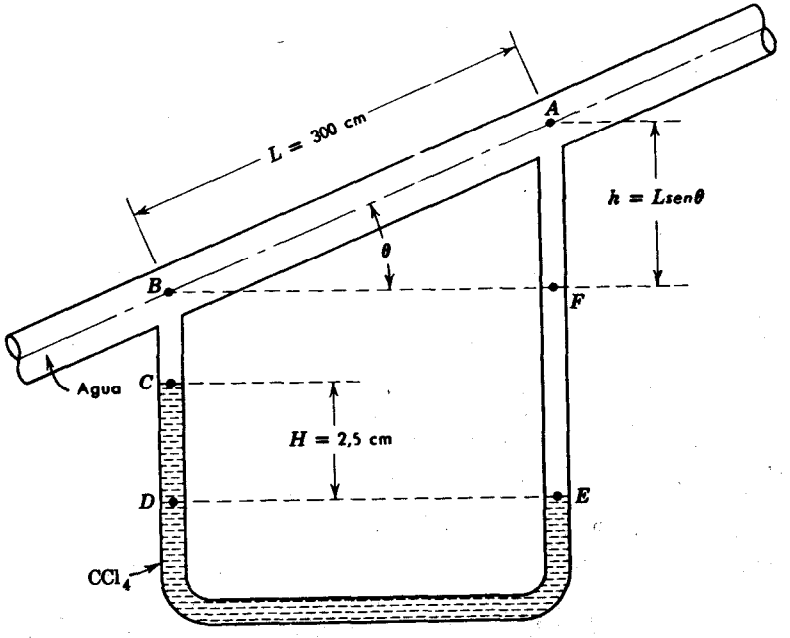


Fig. 2.L. Medidor de **flujo** capilar.

2.M$_3$ Separador electrostático de polvo

Un separador de polvo consiste en dos láminas de cargas opuestas entre las cuales fluyen gases conteniendo el polvo (véase Fig. 2.M). **Se** desea establecer un criterio de la longitud m

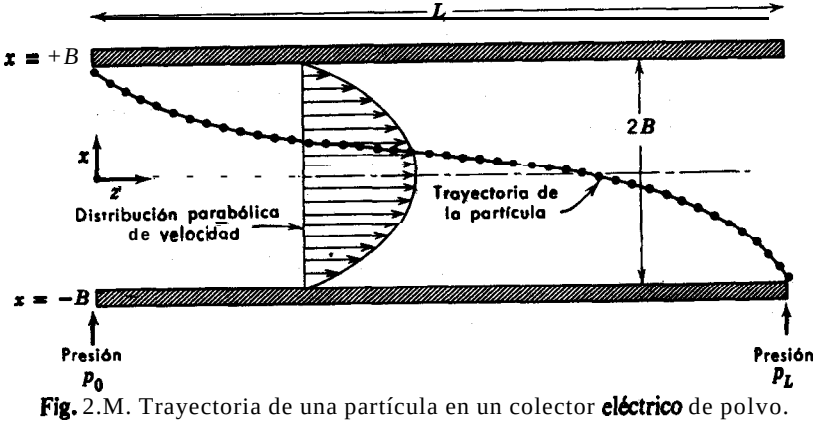


Fig. 2.M. Trayectoria de una partícula en un colector **eléctrico** de polvo.

ma de separador en función de la carga de la partícula e, la intensidad del campo eléctrico $\mathscr{E}$, la diferencia de presión $(p_0 - p_L)$, la masa de la partícula m y la viscosidad del gas μ. Es decir, ¿para qué longitud L habrá alcanzado la partícula más pequeña (masa m) la lámina inferior, exactamente antes de que pueda ser arrastrada fuera del canal? Supóngase que el flujo es laminar entre las dos placas, de forma que la Ec. 2.E–2 describe la distribución de velocidad. Supóngase también que la velocidad de la partícula en la dirección z es la misma que la del fluido en esa dirección. Admítase finalmente que tanto la resistencia de Stokes sobre la esfera, como la fuerza de gravedad que actúa sobre la partícula, que es acelerada en la dirección $-x$, pueden despreciarse.

Respuesta: $L_{\min} = [64(p_0 - p_L)^2 B^3 m/225\mu^2 e\mathscr{E}]^{1/4}$

2.N$_3$ Flujo en un tobo con deslizamiento en la pared

Obtener una modificación de la ley de Hagen-Poiseuille suponiendo que hay deslizamiento del fluido en la pared del cilindro. Es decir, que en vez de admitir que $v_z = 0$ para $r = R$, utilizar la condición límite de que

$$\beta v_z = -\mu \frac{dv_z}{dr} \qquad \text{at } r = R \tag{2.N-1}$$

en la que β es el «coeficiente de fricción deslizante». (¿Cuál es el significado físico de $\beta = \infty$?)

En la mayor parte de los problemas de flujo de fluidos el deslizamiento carece de importancia[3]. Sin embargo, se ha utilizado la solución obtenida para el flujo con deslizamiento* alrededor de esferas, en las «teorías hidrodinámicas» de difusións. Por otra parte, el deslizamiento es importante en algunos problemas de flujo no-newtonianoe.

2.O$_4$ Deducción de la ecuación de Rabinowitsch

Mediante la ecuación de Rabinowitsch [7,8], puede obtenerse una representación gráfica de la densidad de flujo de cantidad de movimiento frente al gradiente de velocidad (véase Fig. 1.2-1) para cualquier fluido, a partir de datos experimentales de la perdida de presión pára diversas velocidades de flujo, en el flujo laminar isotérmico de un fluido a través de tubos circulares. Las únicas suposiciones que es preciso hacer consisten en que el fluido es totalmente homogéneo y que no existe deslizamiento en la pared.

a. Demostrar que la integral correspondiente a la velocidad volumétrica de flujo puede integrarse por partes para obtener

$$Q = -\pi \int_0^R \frac{dv_z}{dr} r^2 \, dr \,, \tag{2.0-1}$$

b. Efectuar el siguiente cambio de variable $r/R = \tau_{rz}/\tau_R$ (siendo $\tau_R = (\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R/2L$ la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la pared, $r = R$), y escribir de nuevo la integral del apartado *(a)* en función de la variable de integración τ_{rz}.

---

3 H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), p. 576.

4 *Ibid.*, pp. 601 y ss.

5 R. B. BIRD, «Theory of Diffusion». En *Advances in Chemical Engineering*, T. B. Drew y J. W. Hoopes, Jr. (Eds.), Academic Press, Nueva York (1956), vol. 1, pp. 195-196.

6 J. G. OLDROYD, «Non-Newtonian Flow of Liquids and Solids». En *Rheology*. F. R. Eirich (Ed.), Academic Press, Nueva York (1956). vol. 1, pp. 663-664.

7 B. RABINOWITSCH, *Z. physik. Chemie*, A145, 1-26 (1929).

8 J. G. OLDROYD, *Op. cit.* cap. 16, vol. 1, pp. 662-666.

c. Diferenciar la integral del apartado (*b*) con respecto a τ_R para obtener la *ecuación de Rabinowitsch,*[9]

$$\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{\pi R^3 \tau_R^3}\frac{d}{d\tau_R}(\tau_R^3 Q) \qquad (2.O\text{–}2)$$

Explíquese cómo puede utilizarse esta ecuación para obtener la curva de τ_{rz} frente a $(-dv_z/dr)$

2.P$_4$ Relación mutua entre los perfiles de velocidad en una rendija y en **tubos concéntricos**

Demostrar que la distribución de velocidad en tubos **concéntricos, Ec.** 2.4-13, es la misma que en una rendija (véase **Ec. 2.E–2)** cuando κ se mantiene constante y *R se hace muy* grande.

2.Q$_4$ Flujo no-newtoniano en tubos **concéntricos**

Deducir la ecuación de la velocidad **volumétrica** de flujo para un fluido de Bingham que circula en un espacio anular, utilizando la notación que se ha introducido en § 2.4 y en el ejemplo 2.3-2. Utilizar los siguientes números adimensionales:

$T = 2\tau_{rz}L/(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R$ = densidad de flujo de cantidad de movimiento adimensional
$T_0 = 2\tau_0 L/(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R$ = parámetro reológico adimensional
$\phi = (2\mu_0 L/(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2)v_z$ = velocidad adimensional
$\xi = r/R$ = coordenada radial adimensional

Demostrar que la **distribución** de densidad de flujo de cantidad de movimiento y la ley **reológica**, pueden expresarse de esta forma

$$T = \xi - \lambda^3\xi^{-1} \qquad (2.Q\text{–}1)$$

$$T = \text{í}\,T\,,\ \frac{d\phi}{\&} \qquad (2.Q\text{–}2)$$

Demostrar que los límites λ_+ y λ_- de la región de flujo de tapón vienen dados por

$$\pm T_0 = \lambda_\pm - \frac{\lambda^3}{\lambda_+} \qquad (2.Q\text{–}3)$$

y que λ es justamente la media **geométrica** de λ_+ y λ_-. Obtener la distribución de velocidad para los tres intervalos:

ϕ_- para el intervalo $\kappa < \xi < \lambda_-$
ϕ_0 para el intervalo $\lambda_- \leq \xi \leq \lambda_+$
ϕ_+ para el intervalo $\lambda_+ < \xi < 1$

Integrando después sobre la distribución de velocidad, se obtiene la velocidad **volumétrica** de **flujo**[10]:

$$Q = \frac{\pi(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^4}{8\mu_0 L}[(1-\kappa^4) - 2\lambda^2(1-\kappa^2) - \tfrac{8}{3}(1+\kappa^3)T_0 + \tfrac{1}{3}(4\lambda^2 + T_0^2)^{3/2}T_0] \qquad (2.Q\text{–}4)$$

---

9 Utilizar la «**fórmula** de **Leibnitz**» para la **diferenciación** de una integral:

$$\frac{d}{dt}\int_{a_1(t)}^{a_2(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx + \left(f(a_2,t)\frac{da_2}{dt} - f(a_1,t)\frac{da_1}{dt}\right)$$

10 A. G. **FREDRICKSON y R. B. BIRD,** *Ind. Eng. Chem., SO, 347-352 (1958);* en este articulo se presenta **también** una solución para el modelo de la potencia

¿Cómo se deterinina λ? La distribución de densidad de flujo de cantidad de movimiento en tubos concéntricos, ¿es igual para el flujo no-newtoniano que para el newtoniano?

2.R$_4$ Escurrimiento de líquidos[11]

Se desea conocer la cantidad de líquido que queda retenido sobre la superficie interna de un vaso grande cuando se vacia. En la Fig. 2.R se indica lo que ocurre en las proximidades de la pared del vaso. El espesor-local de la película es una función de z y t.

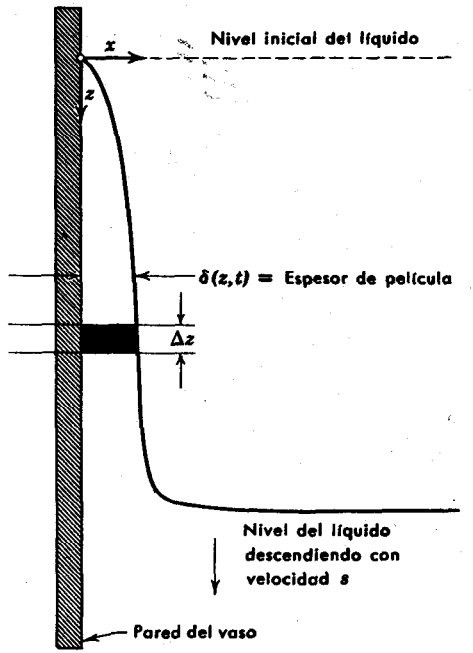


Fig. 2.R. Adherencia de un liquido viscoso a las paredes de un vaso durante el vaciado.

a. Aplicar un balance no estacionario de materia a un elemento de película comprendido entre z y-z + Δz, y demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial z}\langle v_z\rangle\delta = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \qquad \text{(2.R–1)}$$

b. Utilizar la Ec. 2.2-18 con el fin de obtener la siguiente ecuación diferencial parcial de primer orden para $\delta(z,t)$:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho g}{\mu}\delta^2\frac{\partial \delta}{\partial z} = 0 \qquad \text{(2.R–2)}$$

---

11 Para un tratamiento más amplio de este problema, véase J. J. VAN ROSSUM, *Appl. Sci. Research*, A7, 121-144 (1958).

¿Qué suposiciones son inherentes a la Ec. 2.R–2?

c. Demos-e resolviendo la Ec. 2.R–2 se obtiene

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g}\frac{z}{t}} \tag{2.R-3}$$

¿Qué restricciones deben ponerse a este resultado?

2.S$_3$ Flujo de grasas no-newtonianas a través de tubos

Se ha supuesto el siguiente modelo para el estudio del flujo de grasas no-newtonianas en tubos circulare&:

$$\tau_{rz} = a\left(-\frac{dv_z}{dr}\right) + b\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)^n$$

$$= a\gamma + b\gamma^n \tag{2.S-1}$$

Demostrar que la expresión para la velocidad volumétrica de flujo, Q, puede obtenerse por el siguiente procedimiento:

a. Demostrar que la expresión general de Q puede integrarse dos veces por partes para obtener

$$Q = \frac{\pi R^3 \gamma_R}{3} - \frac{\pi}{3}\int_0^{\gamma_R} r^3\, d\gamma \tag{2.S-2}$$

en la que $\gamma_R \equiv (-dv_z/dr)|_{r=R}$.

b. Demostrar que r puede expresarse en función de γ, de la siguiente forma[12]:

$$r = \frac{R}{\tau_R}(a\gamma + b\gamma^n) \tag{2.S-3}$$

c. Demostrar que substituyendo la Ec. 2.S–3 en la integral de la Ec. 2.S–2 y aplicando la condición limite conveniente, se obtiene finalmente

$$Q = \frac{\pi R^3 a^3 \gamma_R^4}{4\tau_R^3}\left\{1 + 4\left[\left(\frac{n+2}{n+3}\right)X + \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)X^2 + \left(\frac{n}{3n+1}\right)X^3\right]\right\} \tag{2.S-4}$$

siendo $X = (b/a)(\gamma_R^{n-1})$, y γ_R una función implícita de τ_R:

$$\tau_R = a\gamma_R + b\gamma_R^n \tag{2.S-5}$$

2.T$_3$ Una expresión integral para la distribución de velocidad en un tubo

Hemos recibido del editor de una revista profesional un trabajo para revisar. Este trabajo trata del transporte de calor para el flujo en un tubo. Los autores establecen que como han operado con flujo no isotérmico, deben de obtener una expresión «general» para la distribución de

[12] A. W. Sisko, *Znd. Eng. Chem.*, *SO*, 1789-1792 (1958).

velocidad, que puede utilizarse aun cuando la viscosidad del fluido sea una función de la temperatura (y por lo tanto de la posición). Indican que «una expresión general de la distribución de velocidad para el flujo en un tubo», es

$$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = \int_y^1 \frac{y}{\mu}\, dy \Big/ \int_0^1 \frac{y^2}{\mu}\, dy \qquad \text{(2.T–1)}$$

en la que $\langle v_z \rangle$ es la velocidad media de flujo, y es la coordenada radial reducida (esto es, r/R), y μ es la viscosidad (que puede variar con y). No deducen su fórmula ni dicen donde puede encontrarse *en* la bibliografía. Como censores del trabajo, estamos obligados a (a) deducir la fórmula que indican, y (*b*) establecer las restricciones que estén implícitas en dicha fórmula.

CAPÍTULO 3

LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS ISOTÉRMICOS

En el Capítulo 2 se han determinado las distribuciones de velocidad para varios sistemas sencillos de flujo, aplicando balances de cantidad de movimiento a una envoltura. Estas distribuciones de velocidad se utilizaron después para calcular otras magnitudes, tales como la velocidad media y la fuerza resistente. El método del balance aplicado a una envoltura se utilizó con el fin de familiarizar al principiante con la aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento en los problemas de flujo viscoso. Sin embargo, no es necesario formular un balance de cantidad de movimiento siempre que se comienza a trabajar con un nuevo problema de flujo. Es más rápido, más fácil, y más seguro, partir de las ecuaciones de conservación de la materia y la cantidad de movimiento, expresadas en la forma general, y simplificarlas con el fin de adaptarlas al problema de que se trate. Estas dos ecuaciones describen todos los problemas de flujo viscoso isotérmico de un fluido puro. Para fluidos no isotérmicos y para mezclas fluidas de varios componentes, se necesitan ecuaciones adicionales para describir la conservación de la energía (Capítulo 10) y la conservación de las especies químicas individuales (Capítulo 18). Estas distintas ecuaciones de conservación se denominan a veces «ecuaciones de variación», ya que describen la variación de la velocidad, temperatura y concentración, con respecto al tiempo y la posición en el sistema.

En § 3.1 se desarrolla la «ecuación de continuidad», mediante la aplicación de la ley de la conservación de la materia a un pequeño elemento de volumen situado en el seno de un fluido en movimiento. El principio de la conservación de la materia se ha aplicado ya, tácitamente, en el Capítulo 2; por ejemplo, mediante él se justifica la suposición de que la velocidad es independiente de la distancia axial en el problema de Hagen-Poiseuille. Ya veremos que para sistemas más complejos interesa un planteamiento más general de este principio.

En § 3.2 se introduce la segunda ecuación de variación, la «ecuación de movimiento», que es una generalización del balance de cantidad de movimiento del Capítulo 2. Con esta ecuación y la de continuidad, se pueden resolver todos los problemas del Capítulo 2, y muchos otros bastante más complicados.

En § 3.3 se utiliza la ecuación de movimiento para deducir una expresión que describe la interconversión de las- distintas formas de la energía mecánica de un

fluido en movimiento. Esta ecuación es particularmente útil para describir la degradación de la energía mecánica en energía calorífica, que acompaña a todos los procesos reales de flujo. También es la base del importante balance macroscópico de energía mecánica, o ecuación de Bernoulli, que se estudia en el Capítulo 7.

En las tres primeras secciones, las deducciones se obtienen en coordenadas rectangulares. Sin embargo, para muchos problemas resulta más conveniente utilizar coordenadas cilíndricas o esféricas. En § 3.4 se trata brevemente el tema de las coordenadas curvilíneas, a la vez que se presenta un resumen de numerosas relaciones importantes, expresadas en los tres sistemas de coordenadas. El lector podrá comprobar que esta tabulación reduce el arte de plantear problemas de flujo viscoso a casi un simple procedimiento de «recetario de cocina». Los ejemplos que se presentan en § 3.5 ilustran sobre la aplicación del método a la resolución de algunos problemas de flujo laminar.

En § 3.6 se extienden al flujo no-newtoniano las materias expuestas en las cinco secciones precedentes. El punto principal que se aborda aquí es el método adecuado para expresar la densidad de flujo de cantidad de movimiento en diversos modelos no-newtonianos, de forma que pueda transformarse en coordenadas curvilíneas.

En la última sección de este capítulo, § 3.7, se presentan las ecuaciones de variación en función de variables adimensionales. Al escribir en esta forma las ecuaciones, se reúnen los «factores de escala» (es decir, tamaño, del sistema, velocidad media del fluido, y propiedades del mismo) en un corto número de relaciones adimensionales que resultan útiles para caracterizar los sistemas de ílujo. En este capítulo veremos cómo pueden utilizarse estas relaciones adimensionales para efectuar estudios empíricos con un modelo a escala reducida, que permite un análisis de los sistemas demasiado complejos. En el Capítulo 6 se amplían estas ideas para la correlación empírica de la fuerza de resistencia en sistemas complejos.

En este capítulo se utiliza, ocasionalmente, la notación vectorial y tensorial, con el fin primordial de abreviar expresiones que resultarían de otra forma demasiado largas[1]. El principiante verá que no es preciso un conocimiento matemático de vectores y tensores para utilizar el resumen de § 3.4 en la resolución de problemas. Al estudiante adelantado le resultará útil el apéndice A para conocer algunos detalles sobre el manejo de vectores y tensores.

En muchos aspectos, el Capítulo 3 es el más importante del libro, puesto que facilita el camino para todo lo que sigue. El lector que lo conozca a fondo antes de continuar, se verá recompensado de su esfuerzo.

Antes de entrar en el tema principal del capítulo, vamos a detenernos brevemente

---

[1] Una introducción a las operaciones con vectores puede encontrarse en algunos libros de cálculo para estudiantes no graduados, tales como el de G. B. THOMAS *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1953), Segunda edición. Aquí se usan *los* símbolos en *bastardilla* para escalares, ***bastardilla*** en ***negritas*** para vectores y **negritas** para tensores. Además, las operaciones del producto de punto, encerradas entre paréntesis ( ), son escalares y las operaciones entre [ ] son vectores.

para hacer algunos comentarios acerca de los tres tipos de derivadas con respecto al tiempo que se utilizan en el texto. Para ilustrar esto utilizaremos un ejemplo casero, como es'el problema de referir. la concentración de peces en el río Kickapoo. Puesto que los peces se están moviendo, su concentración c será una función de la posición (x, y, z) y del tiempo (t).

Derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial c/\partial t$

Supongamos que estamos sobre un puente y observamos cómo varía la concentración de peces exactamente debajo de nosotros con el tiempo. Estamos, pues, observando cómo varía la concentración con el tiempo, para una posición *fija* en el espacio. De acuerdo con esto, $\partial c/\partial t$ indico la «parcial de c con respecto a t, manteniendo constantes x, y, z».

Derivada total con respecto al tiempo, dc/dt

Supongamos ahora que en vez de estar sobre el puente, vamos en una lancha a motor que se mueve en el río en todas direcciones, unas veces en contra de la corriente, otras a través, y tal vez otras a favor de la corriente. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números que resultan han de reflejar también el movimiento de la lancha. La derivada total con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{3.04}$$

en la que dx/dt, dy/dt y dz/dt son los componentes de la velocidad de la lancha.

Derivada substancial *con respecto* **al tiempo,** Dc/Dt

Supongamos que vamos en una canoa a la que no se comunica energía, sino que simplemente flota. En este caso, la velocidad del observador es exactamente la misma que la velocidad de la corriente v. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números dependen de la velocidad local de la corriente. Esta derivada es una clase especial de deriva& total con respecto al tiempo que se denomina «derivada substancial» o, a veces (más lógicamente), «derivada siguiendo el movimiento». Está relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la forma siguiente:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x\frac{\partial c}{\partial x} + v_y\frac{\partial c}{\partial y} + v_z\frac{\partial c}{\partial z} \tag{3.0-2}$$

en la que v,, v_y y v_z, son los componentes de la velocidad local del fluido v.

El lector deberá de entender perfectamente el significado físico de estas tres .

derivadas. Recuérdese que $\partial c/\partial t$ es la derivada para un punto fijo en el espacio y Dc/Dt es la derivada calculada por un observador que flota corriente abajo con el fluido.

§ 3.1 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Esta ecuación sé deduce aplicando un balance de materia a un elemento *estacionario* de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del que está circulando el fluido (véase Fig. 3.1-1):

$$\left\{\begin{array}{l}\text{velocidad de acumu-}\\ \text{lación de materia}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{velocidad de en-}\\ \text{trada de, materia}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{velocidad de}\\ \text{salida de materia}\end{array}\right\} \qquad (3.1\text{-}1)$$

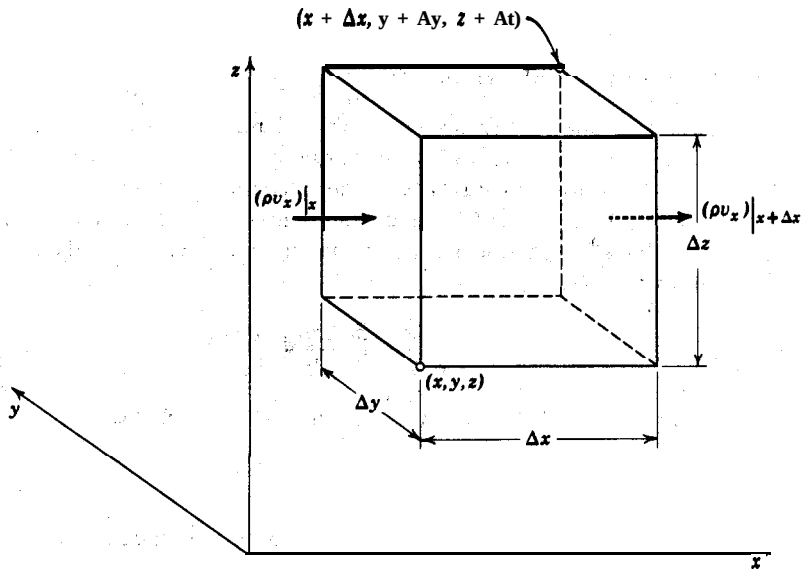


Fig. 3.1-1. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ *fija en el espurio,* a través de la cual está circulando un fluido.

Comenzamos considerando el par de caras perpendiculares al eje x. La velocidad de entrada de materia a través de la cara x es $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad de salida de materia a través de la cara $x + \Delta x$ es $(\rho v_x)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Para los otros dos pares de caras pueden escribirse expresiones análogas. La velocidad de acumulación de materia en el elemento de volumen es $(\Delta x \Delta y \Delta z)(\partial \rho/\partial t)$. El balance de materia queda por tanto

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z[(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z[(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y[(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \qquad (3.1\text{-}2)$$

Dividiendo toda la ecuación por $(\Delta x \Delta y \Delta z)$, y tomando límites cuando estas dimensiones tienden a cero, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z\right) \tag{3.1-3}$$

Ésta es la ecuación *de continuidad,* que describe la variación de la densidad para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector de velocidad másica pu. La Ec. 3.1-3 puede escribirse en una forma más conveniente utilizando notación vectorial[1] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho v) \tag{3.1-4}$$

El término $(\nabla \cdot \rho v)$ se denomina «divergencia:» de *pv, y* a veces *se escribe* div. *pu,* Véase que el vector ρv es la densidad de flujo de materia y que su divergencia tiene un significado sencillo: representa la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. Por lo tanto, la Ec. 3.1-4 establece simplemente que la velocidad con que aumenta la densidad en el interior de un pequeño elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de densidad de flujo de materia en el elemento dividida por su volumen.

Generalmente, es preferible modificar la ecuación 3.1-3, efectuando la diferenciación Que está indicada y reuniendo todas las derivadas de p en el primer miembro :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \tag{3.1-5}$$

El primer miembro de la Ec. 3.1-5 es la derivada substancial de la densidad, es decir, la derivada con respecto al tiempo *pura un recorrido que sigue el movimiento del fluido.* De acuerdo con esto, la Ec. 3.1-5 puede expresarso abreviadamente en esta forma :

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v) \tag{3.1-6}$$

en la que el operador D/Dt está definido por la Ec. 3.0-2. La ecuación de continuidad, expuesta en esta forma, describe la velocidad de variación de la densidad, tal como la ve un observador que «flota» con el fluido.

Recuérdese que esta ecuación es sencillamente una formulación de la conservación de la materia. Es preciso señalar que la deducción puede efectuarse igualmente para un elemento de volumen de una forma arbitraria cualquiera, y no está por lo tanto restringida para el caso del elemento paralepipédico que se ha presentado aquí.

[1] Téngase en cuenta que ∇ tiene las dimensiones del inverso de una longitud.

Una forma especial muy importante de la ecuación de continuidad, que se utilizará posteriormente, es la correspondiente a un fluido de densidad constante, para el que

(fluido incompresible) $$(\nabla \cdot v) = 0 \qquad (3.1\text{-}7)$$

Aunque en realidad ningún Auido es totalmente incompresible, en la práctica se puede admitir con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una considerable simplificación, sin cometer casi error. Obsérvese que para que la Ec. 3.1-7 sea válida, sólo es necesario que ρ permanezca constante para un elemento de fluido que se mueva a lo largo de una línea de corriente, es decir, que $D\rho/Dt$ sea cero.

§ 3.2 LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, como el utilizado en la sección anterior, se puede escribir el siguiente balance de cantidad de movimiento:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{acumulación}\\ \text{de cantidad}\\ \text{de movimiento}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de}\\ \text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{salida de}\\ \text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{suma de las}\\ \text{fuerzas que}\\ \text{actúan sobre}\\ \text{el sistema}\end{array}\right\} \qquad (3.2\text{-}1)$$

Observese que la Ec. 3.2-1 corresponde exactamente a una ampliación de la ecuación 2.1-1 para sistemas en estado no estacionario. Por consiguiente, podemos proceder, en muchos aspectos, de igual forma que en el Capítulo 2.

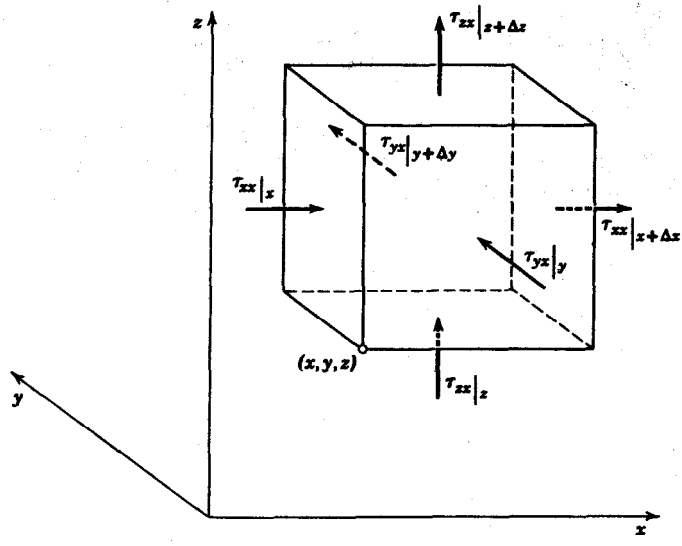


Fig. 3.2-1. Elemento de volumen Δx Ay Az, en el que se señala con flechas la dirección en que se transporta el componente x de la cantidad de movimiento a través de las superficies.

Sin embárgo, además de tener en cuenta el comportamiento no estacionario, permitiremos al fluido que se mueva en una dirección arbitraria a través de las seis caras del elemento de volumen, igual que en § 3.1. Es preciso resaltar que la Ec. 3.2— 1 es la ecuación de un ***vector,*** con componentes para cada una de las tres direcciones coordenadas, x, y y z. Para mayor sencillez, comenzaremos considerando el componente x de cada uno de los términos de la Ec. 3.2— 1; los componentes y y z se pueden obtener por analogía.

Vamos a considerar en primer lugar las velocidades de flujo del componente x de la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen que se indica en la Fig. 3.2— 1. La cantidad de movimiento entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección (es decir, debido al flujo global del fluido) y por transporte molecular (o sea, a causa de los gradientes de velocidad).

La velocidad con la que entra por convección el componente x de la cantidad de movimiento por la cara situada en x es $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad con la que sale por $x + \Delta x$ es $\rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y$ Az. La velocidad a la que entra por y es $\rho v_x v_x|_y \Delta x \Delta z$ Para las demás caras se pueden escribir expresiones similares. Vemos, por tanto, que es preciso considerar el flujo convectivo de la cantidad de movimiento x a través de las seis caras, y que el flujo convectivo neto, de la cantidad de movimiento x, en el elemento de volumen, es:

$$\Delta y \Delta z(\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z(\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y(\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x|_{z+\Delta z}) \qquad (3.2\text{-}2)$$

De igual forma, la velocidad con la que el'componente x de la cantidad dé movimiento entra por transporte molecular por la cara situada en x es $\tau_{xx}|_x \Delta y \Delta z$, y la con la que sale por $x + \Delta x$ es $\tau_{xx}|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. La velocidad con que entra por y es $\tau_{xy}|_y \Delta x \Delta z$; para las otras tres caras se pueden obtener expresiones similares (véase Fig, 3.2— 1). Téngase en cuenta que τ_{yx} es la densidad de flujo de cantidad de movimiento x a través de una cara perpendicular al eje y. Sumando estas seis contribuciones, se obtiene

$$\text{AY } \Delta z(\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y(\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \qquad (3.2\text{-}3)$$

Obsérvese que, de igual forma que antes, estas densidades de flujo de cantidad de movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto, τ_{xx} es el esfuerzo *normal* que actúa sobre la cara x, y τ_{yx} es el esfuerzo *tangencial* (0 *cortante)* que actúa sobre la cara y en la dirección x, y que resulta como consecuencia de las **fuerzas viscosas.**

En la mayor parte de las casos, las únicas fuerzas importantes serán las proce-

dentes de la presión del fluido p y la fuerza gravitacional por unidad de masag. La resultante de estas fuerzas en la dirección x será, evidentemente

$$A_Y \Delta z(p|_x - p|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.2\text{-}4)$$

La presión de un fluido en movimiento está definida por la ecuación de estado $p=p$ (p, T), y es una magnitud escalar.

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento x en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z(\partial \rho v_x|\partial t)$. Substituimos ahora las anteriores expresiones en la Ec. 3.2— 1. Dividiendo toda la ecuación que resulta por $\Delta x \Delta y \Delta z$, y tomando el limite cuando Δx, Δy e Δz, tienden acero, se obtiene el componente x de la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_x\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \qquad (3.24)$$

Los componentes y y z, que pueden obtenerse de una forma análoga, son

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_y = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_y\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \qquad (3.2\text{-}6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_z = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_z\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \qquad (3.2\text{-}7)$$

Las magnitudes ρv_x, ρv_y, ρv_z son los componentes del vector velocidad másica *po;* de igual forma, g_x, g_y, g_z, son los componentes de la aceleración gravitacional g. Por otra parte, $\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial p/\partial z$, son los componentes de un vector ∇p, denominado «gradiente de p» (a veces se escribe grad *p).* Los términos $\rho v_x v_x$, $\rho v_x v_y$, $\rho v_x v_z$, $\rho v_y v_z$, etc., son los nueve componentes de la densidad de flujo convectivo de cantidad de movimiento ρvv, que es el «producto diádico»* de ρv y v. Análogamente, τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, etc., son los nueve componentes de τ, que es el «tensor esfuerzo». Como las Ecs. 3.2-5, 6, 7 ocupan mucho espacio, es conveniente combinarlas con el fin de obtener la sencilla ecuación vectorial:

* Se da el nombre de *productos diádicos* o simplemente *diadas,* a los tensores que resultan de multiplicar entre si dos vectores. (N. *del T.)*

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v = -[\nabla \cdot \rho vv] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \qquad (3.2-8)$$

velocidad de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen

velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección, por unidad de volumen

fuerza de presión que actúa sobre el elemento por unidad de volumen

velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso, por unidad de volumen

fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento por unidad de volumen

Es preciso advertir al lector que $[\nabla \cdot \rho vv]$ y $[\nabla \cdot \tau]$ no son divergencias simples, debido a la naturaleza tensorial de ρvv y τ. Sin embargo, la interpretacibn física es análoga a la de $(\nabla \cdot \rho v)$ en § 3.1; mientras que $(\nabla \cdot \rho v)$ representa la velocidad de pérdida de materia (un escalar) por unidad de volumen debida al flujo del fluido, la magnitud $[\nabla \cdot \rho vv]$ representa la velocidad de pérdida de cantidad de movimiento (un vector) por unidad de volumen debido al flujo' del Huido. La Ec. 3.2-5 puede reordenarse, con ayuda de la ecuación de continuidad, para obtener

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \qquad (3.2\text{-}9)$$

Para los componentes y y z pueden obtenerse expresiones análogas. Sumando vectorialmente los tres componentes, se llega a

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \qquad (3.2-10)$$

masa por unidad de volumen, multiplicada por aceleración

fuerza de presión sobre el elemento por unidad de volumen

fuerza viscosa sobre el elemento por unidad de volumen

fuerza gravitacional sobre el elemento por unidad de volumen

La ecuación de movimiento, expresada en esta forma, establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras, es una expresión de la segunda ley de Newton, según la cual, ***masa x aceleración = suma de fuerzas.*** Vemos, por lo tanto, que el balance de cantidad de movimiento es totalmente equivalente a la segunda ley de Newton del movimiento. Obsérvese que las dos formas de la ecuación de movimiento que se dan en las Ecs. 3.2-8 y 3.2-10, corresponden a las dos formas de la ecuación de continuidad de las Ecs. 3.1-4 y 3.1-6. En cada caso, la primera forma representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio, y la segunda es una descripción de las variaciones que tienen lugar en un elemento que sigue el movimiento del fluido. Es necesario tener en cuenta que las Ecs. 3.2-5.a 10 son válidas para cualquier medio continuo.

Con el fin de utilizar estas ecuaciones para determinar las distribuciones de velocidad, hay que expresar los distintos esfuerzos en función de los gradientes de velocidad y las propiedades del fluido. Para fluidos newtonianos, estas expresiones son[1]:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \tag{3.2-11}$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \tag{3.2-12}$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \tag{3.2-13}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{3.2-14}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{3.2-15}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \tag{3.2-16}$$

Las Ecs. 3.2—11 a 16 se han expuesto aquí sin demostración, debido a que es demasiado larga*. Estas ecuaciones, que constituyen un planteamiento más general de la ley de Newton de la viscosidad, correspondiente a la Ec. 1.1—2, se aplican a los casos complejos de flujo, en los que el fluido circula en todas las direcciones. Cuando el fluido circula en la dirección x, entre dos láminas perpendiculares a la dirección y (tal como se ha representado en la Fig. 1.1—1), de forma que v_x es una función exclusiva de y, de esta serie de seis ecuaciones se obtiene $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ y $\tau_{yx} = -\mu(dv_x/dy)$, que es idéntica a la Ec. 1.1-2. Por consiguiente, la definición de viscosidad que se ha dado en el Capítulo 1 está de acuerdo con esta definición más general.

Substituyendo las Ecs. 3.2—11 a 16 en la Ec. 3.2-9 y las ecuaciones correspon-

---

[1] En realidad. los esfuerzos normales. deberían contener un término adicional; por ejemplo, la Ec. 3.2-11 debiera ser

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\tfrac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot v) \tag{3.2-1 la}$$

en la que κ es la «viscosidad de conjunto». La viscosidad de conjunto es cero para los gases monoatómicos a baja densidad y probablemente no es demasiado importante para los gases densos y los líquidos. Formulas para estimar el valor de κ se pueden encontrar en J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *The molecular Theory of gases and Liquids*, Wiley. Nueva York (1954). p. 503 (gases poliatómicos diluidos) p. 647 (gases densos). Las medidas experimentales han sido tratadas por S. M. KARIM y L. ROSENHEAD, *Revs. Mod. Phys.*, *24*, 108-116 (1952).

[2] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), Sexta edición. pp. 571-575; véase también E. U. CONDON, *Handbook of Physics*, E. U. Condon y H. Gdishaw (Edts.), McGraw-Hill, Nueva York (1958), pp. 3-10 a 3-13.

dientes para y y z, se obtienen las ecuaciones generales de movimiento para un fluido newtoniano que presenta variación de la densidad y la viscosidad:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \rho g_x \qquad (3.2\text{–}17)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \rho g_y \qquad (3.2\text{-}18)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)\right] + \rho g_z \qquad (3.2\text{-}19)$$

Estas ecuaciones, juntamente con la ecuación de continuidad, la ecuación de estado $p = p(\rho)$, la variación de la viscosidad con la densidad $\mu = \mu(\rho)$ y las condiciones iniciales y límite, determinan completamente la 'presión, densidad y los componentes de la velocidad, para el flujo isotérmico de un fluido.

Rara vez se utilizan estas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo, sino que generalmente resulta más conveniente emplear formas restringidas de las mismas.

(i) *Para ρ constante y μ constante,* las Ecs. 3.2−17,18 y 19, Queden simplificarse mediante la ecuación de continuidad $[(\nabla \cdot v) = 0]$ para obtener[3]:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \qquad (3.2\text{-}20)$$

Los componentes cartesianos de esta ecuación vienen dados por las Ecs. *(D), (E)* y *(F)* de la Tabla 3.4−2. *La* Ec. *3.2-20 es* la conocida *ecuación de Navier-Stokes,* obtenida inicialmente por Navier en Francia, en 1822, mediante consideraciones moleculares'.

(ii) *Para* $[\nabla \cdot \tau] = 0$, la Ec. 3.2-10 se reduce a

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \rho g \qquad (3.2\text{-}21)$$

[3] El operador $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ se denomina laplaciana (para más detalles véase § A.3).

[4] Para un tratamiento interesante sobre la historia de esta y otras famosas relaciones de mecánica de fluidos, véase H. ROUSE y S. INCE, *Hisrory of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulics, Iowa City (1959).

La Ec. 3.2-21 es la famosa ecuación de Euler,[5] deducida por primera vez en 1775, y que ha sido muy utilizada para describir sistemas de flujo en los que los efectos viscosos son relativamente poco importantes.

§ 3.3 LA ECUACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA

En esta sección vamos a demostrar cómo se puede utilizar la ecuación de movimiento para obtener una descripción de las interconversiones de energía mecánica que tienen lugar en un fluido en movimiento. Se comienza por formar el producto escalar de la velocidad $\boldsymbol{v}$ con la ecuación de movimiento correspondiente a la Ec. 3.2-10:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = -(\boldsymbol{v} \cdot \nabla p) - (\boldsymbol{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}) \tag{3.3-1}$$

Esta ecuación escalar describe la velocidad de variación de la energía cinética por unidad de masa $(\frac{1}{2}v^2)$ para un elemento de fluido que se mueve con la corriente.

Para el tratamiento que se hace a continuación, resulta más conveniente escribir esta ecuación en función de $\partial/\partial t$, utilizando la ecuación de continuidad; separaremos también en dos términos cada una de las contribuciones viscosa y de presión. Los términos de la ecuación que resulta pueden interpretarse en función de un elemento estacionario de volumen a través del que circula el fluido.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right) = -(\nabla \cdot \tfrac{1}{2}\rho v^2 \boldsymbol{v}) - (\nabla \cdot p\boldsymbol{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}]) + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{g}) - p(-\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - (-\boldsymbol{\tau} : \mathrm{Vo}) \tag{3.3-2}$$

velocidad de incremento de energía cinética por unidad de volumen

velocidad neta de entrada de energía cinética debida al flujo global

velocidad de trebejo producido por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen

velocidad de trabajo producido por les fuerzas viscosas que actúan sobre el elemento de volumen

velocidad de trebejo producido por la fuerza de pravedad que actúa sobre el elemento de volumen

velocidad de conversión *reversible* en energía interne

velocidad de conversión *irreversible* en energía interne

[5] Pronúnciese «Oiler».

En este momento no se ve con claridad la razón de haber atribuido el mencionado significado físico a los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$; dicho significado no puede apreciarse de una forma adecuada mientras no se estudie el balance de energía del Capítulo 10, en el que puede observarse que estos dos mismos términos, cambiados de signo, entran a formar parte de la ecuación correspondiente a la energía interna.

Es preciso hacer notar que para fluidos newtonianos $(-\tau : \nabla v)$ es siempre positivo, ya que puede expresarse como una suma de términos elevada al cuadrado:

$$(-\tau : \nabla v) = \mu \Phi_v = \tfrac{1}{2}\mu \Sigma_i \Sigma_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\delta_{ij} \right]^2 \qquad (3.3\text{-}3)$$

en la que i y j afectan a los valores de x, y, z, siendo $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq$ j. (En la Tabla 3.4-8 se expresa Φ_v para diversos sistemas coordenados). Esto indica que en todos los sistemas de flujo existe una degradación de energía mecánica a energía calorífica, y que, por lo tanto, los procesos reales no son reversibles. En ausencia del término $(\tau : \nabla v)$ todas las formas de energía comprendidas en la Ec. 3.3-2 (cinética, interna y potencial) serían completamente convertibles entre sí.

Debido a los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$, el fluido puede calentarse (o enfriarse) internamente. Por lo tanto, cuando se habla de un «sistema isotérmico», en realidad nos referimos a un sistema en el que el calor generado (o absorbido) no da lugar a una variación apreciable de temperatura. La variación de temperatura debido al término $p(\nabla \cdot v)$ es considerable en el caso de gases que sufren una expansión o compresión brusca, como en compresores, turbinas, etc. La variación de temperatura que se produce a causa del término $(\tau : \nabla v)$ sólo puede apreciarse en sistemas con elevada velocidad de flujo, en los que los gradientes de velocidad son grandes, como ocurre en el vuelo a alta velocidad, extrusión rápida y lubrificación. En § 9.4 se presenta una ilustración sobre este tipo de calentamiento.

La Ec. 3.3-2 se utiliza en el Capítulo 7 como punto de partida para la deducción del balance de energía mecánica o ecuación de Bernoulli.

§ 3.4 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Como puede observarse, todas las anteriores deducciones se han efectuado para mayor sencillez, en coordenadas rectangulares. Sin embargo, no siempre las coordenadas rectangulares son las más convenientes para la resolución de problemas, sino que ya en el Capítulo 2 hemos visto que a veces resultan más adecuadas las coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, se ha visto que en el problema de Hagen-Poiseuille la velocidad axial v_z es una función exclusiva de la única variable r, cuando se utilizan coordenadas cilíndricas. Si se hubiesen utilizado en cambio coordenadas rectangulares, v_z sería una función de las dos variables x e y. Análogamente, el planteamiento de la condición límite para la pared del tubo sería más difícil. El uso

de coordenadas esféricas en el análisis del flujo alrededor de una esfera, permite describir la velocidad en función de los dos componentes v_r y v_θ en vez de v_x, v_y y v_z, dando lugar también a una simplificación de las condiciones límite. Análogas ventajas pueden obtenerse para las coordenadas curvilíneas en el planteamiento de problemas de flujo, debido a la simplificación de las ecuaciones de variación.

TABLA 3.4—1

LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (A)$$

Coordenadas eilindricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad (B)$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad (C)$$

Las ecuaciones de continuidad y movimiento, tal. como se han obtenido en §§ 3.1 y 3.2, están, expresadas en función de las coordenadas x, y, z, los componentes de la velocidad v_x, v_y, v_z y los componentes del esfuerzo cortante, τ_{xx}, τ_{xy}, etc. Para expresar estas ecuaciones en coordenadas esféricas es preciso conocer: (*a*) las relaciones entre x, y, z y r, θ, ϕ (véase Fig. A.6—1); (*b*) las relaciones entre v_x, v_y, v_z y los correspondientes componentes v_r, v_θ, v_ϕ; y (c) las relaciones entre τ_{xx}, τ_{xy}, etc., $\tau_{r\theta}$ $\tau_{r\phi}$, etc. (En § A.6 se resumen las relaciones entre los componentes vectoriales y tensorialès). El paso de coordenadas rectangulares a esféricas puede obtenerse mediante un procedimiento directo, pero resulta muy engorroso. No es preciso que el lector siga los detalles de este proceso, ya que en las Tablas 3.4—1, 2, 3 y 4 (y en otras partes del libro) se tabulan importantes ecuaciones expresadas en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

A este respecto es conveniente advertir al principiante que, así como la ecuación de continuidad puede obtenerse fácilmente en coordenadas curvilíneas mediante un balance aplicado a una envoltura, no ocurre lo mismo con la ecuación de movimiento. En general, este métodо es muy difícil de aplicar a sistemas con líneas de corriente curvas, y no es recomendable en tales casos. En vez de esto, se partirá siempre de las ecuaciones generales que se indican en § 3.5.

TABLA 3.4-2

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS **RECTANGULARES** (x,y,z)

En función de τ:

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x \qquad (A)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \qquad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido **newtoniano** de ρ y μ constantes:

componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x \qquad (D)$$

componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z \qquad (F)$$

TABLA 3.4-3

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, z)

En función de τ:

componente r[a]

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r \qquad (A)$$

componenle θ[b]

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}-\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta \qquad (B)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \qquad (C)$$

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de p y μ constantes:

componente r[a]

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r \qquad (D)$$

componente θ[b]

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]+\rho g_\theta \qquad (E)$$

componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z \qquad (F)$$

[a] El término $\rho v_\theta^2/r$ es la fuerza *centrífuga*. Corresponde a la fuerza efectiva en la dirección r que resulta del movimiento del fluido en la dirección θ. Este término aparece automáticamente en la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas. En los ejemplos 3.5 – 1 y 3.5 -2 se estudian dos problemas en los que interviene este término.

[b] El término $\rho v_r v_\theta/r$ es la *fuerza de* Coriolis. Es una fuerza efectiva en la dirección θ cuando existe flujo en ambas direcciones r y θ. Este término aparece también automáticamente en la transformación coordenada. La fuerza de Coriolis interviene en el problema del flujo en las inmediaciones de un disco que gira. (Véase, por ejemplo. H. SCHLICHTING, *Bounaúry-Layer Theory*, Mc Graw-Hill, Nueva York (1955), Capítulo 5, § 10.)

TABLA 3.4-4

LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)

En función de τ:

componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r}\right) + \rho g_r \qquad (A)$$

componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\right) + \rho g_\theta \qquad (B)$$

componente ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right) = -\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\right) + \rho g_\phi \qquad (C)$$

TABLA 3.4–4 *(continuación)*

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano de ρ y μ constantes[a]:

componente r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta - \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_r \qquad (D)$$

componente θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_\theta \qquad (E)$$

componente ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right)$$
$$= -\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right) + \rho g_\phi \qquad (F)$$

---

[a] En estas ecuaciones :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)$$

TABLA 3.4-5

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z)

$$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (A)$$

$$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (C)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right] \qquad (D)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right] \qquad (E)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] \qquad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (G)$$

TABLA 3.4-6

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (r, θ, z)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (A)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (B)$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \qquad (C)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \qquad (D)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right] \qquad (E)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right] \qquad (F)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (G)$$

TABLA 3.4-7

COMPONENTES DEL TENSOR ESFUERZO EN COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \tag{A}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \tag{B}$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \tag{C}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \tag{D}$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right] \tag{E}$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu\left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right] \tag{F}$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{G}$$

TABLA 3.4 -8

LA FUNCIÓN $-(\tau : \nabla v) \equiv \mu\Phi_v$ PARA, FLUIDOS NEWTONIANOS*

Rectangular

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \qquad (A)$$

Cilíndrica

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 \qquad (B)$$

Esférica

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)^2\right] + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]^2 + \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right]^2 \qquad (C)$$

[a] **Estas** expresiones se obtienen introduciendo los' componentes de τ **de las Tablas** 3.4 **—5, 6, 7** en la **expresión** de $(\tau:\nabla v)$ que se indica en el **Apéndice** A. **(Véanse Tablas** A.7 **— 1,** 2 Y 3.)

§ 3.5 UTILIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE FLUJO ESTACIONARIO

Para plantear problemas de flujo, siendo la densidad y la viscosidad constantes, se necesita :

ecuación de continuidad	Tabla 3.4-1 (con ρ constante)
ecuación de movimiento	Tablas 3.4–2, 3 ó 4 (Ecs. *'D, E, F)*

y las condiciones iniciales y límite. A partir de estas dos ecuaciones se obtienen las distribuciones de presión y velocidad.

Para plantear problemas de flujo isotérmico, cuando la densidad y la viscosidad son variables, se precisa:

ecuación de continuidad	Tabla 3.4-1
ecuación de movimiento	Tabla 3.4-2, 3 ó 4 (Ecs. *A, B, C,* con expresiones para los componentes 'de τ en las Tablas 3.4-5, 6 ó 7)
ecuación de estado..'.	$p = \rho(p)$
ecuación para la viscosidad	$\mu = \mu(p)$

juntamente con las condiciones iniciales y limite. A partir de estas cuatro relaciones se obtienen las distribuciones de velocidad, presión, densidad y viscosidad para un determinado sistema de flujo.

En esta sección se estudia la forma de plantear problemas de flujo viscoso mediante& simplificación de las anteriores ecuaciones, descartando aquellos términos de las ecuaciones generales de valor cero (o muy próximos a cero) para el caso que se considera. Para determinar qué términos han de descartarse nos valemos de nuestra percepción intuitiva acerca del comportamiento del sistema: tipo de flujo, distribución de presión, etc. Una ventaja de este procedimiento consiste en que, una vez terminado este «proceso de descartamiento», se tiene automáticamente una relación completa de las suposiciones que se han efectuado. Vamos a exponer en primer lugar este método, tomando dos problemas del Capítulo 2, para ilustrar después su utilidad mediante la resolución de algunos ejemplos algo mas complicados.

Para el flujo *axial de un fluido incompresible* en un *tuba circular* se ha obtenido en § 2.3 la distribución de velocidad, mediante la aplicación de un balance de cantidad de movimiento. Vamos a ver ahora cómo se puede llegar al mismo resultado simplificando las ecuaciones de variación. Las coordenadas cilíndricas son evidente-

mente las. más apropiadas para este problema. Consideremos de nuevo un tubo largo, siendo v_θ y v_r iguales a cero. Debido a la simetría cilíndrica, el componente v_z de la velocidad no será función de θ. De acuerdo con esto, el componente z de la ecuación de movimiento para ρ y μ constantes (véase Tabla 3.4-3) será

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \tag{3.5-1}$$

Esta ecuación puede simplificarse haciendo aplicación de la ecuación de continuidad, que en este caso se reduce a

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.5-2}$$

Resulta evidente que también $\partial^2 v_z/\partial z^2$ es cero, con lo que la Ec. 3.5—1 se transforma en:

$$0 = -\frac{d\mathcal{P}}{dz} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \tag{3.5-3}$$

Integrando dos veces con respecto a r, y utilizando las condiciones límite $v_z = 0$ para $r = R$ y v_z = finito para $r = 0$,

$$v_z = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{3.5-4}$$

que es la misma ecuación que la 3.?-16.

Para la *película descendente de viscosidad variable*, que se ha estudiado en el ejemplo 2.2-2, se encuentra, a partir de la Ec. C de la Tabla 3.4-2, que para el estado estacionario (despreciando los efectos fínales),

$$0 = -\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \rho g \cos\beta \tag{3.5-5}$$

Al introducir la expresión de τ_{xz} (Ec. F de la Tabla 3.4-5) se llega a

$$0 = +\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{dv_z}{dx}\right) + \rho g \cos\beta \tag{3.5-6}$$

Insertando la' Ec. 2.2-22 se obtiene

$$0 = \mu_0\frac{d}{dx}\left(e^{-a(x/\delta)}\frac{dv_z}{dx}\right) + \rho g \cos\beta \tag{3.5-7}$$

Esta ecuación puede integrarse con las condiciones límites de que $v_z = 0$ para $x = \delta$ y $dv_z/dz = 0$ para x = 0, con lo que se obtiene el resultado de la Ec. 2.2-24.

Mediante la aplicación de estos métodos pueden resolverse muchos otros problemas. A continuación se exponen algunos ejemplos adicionales para el estado estacionario, y en el Capitulo 4 se resuelven unos cuantos problemas correspondientes al estado no estacionario. En la bibliografía1 pueden encontrarse muchas más soluciones analíticas.

Ejemplo 3.5-1. Flujo tangencial de un fluido newtoniano en tubos concéntricos

Determinar las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante, para el flujo laminar tangencial de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros verticales coaxiales, cuando el cilindro exterior gira con una velocidad angular Ω_o. (Véase Fig. 3.5 –1.) Los efectos finales pueden despreciarse.

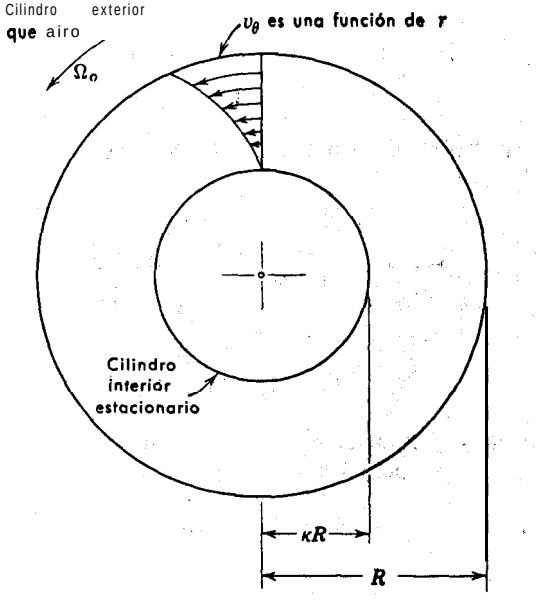


Fig. 3.5-1. Flujo laminar de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales gira con una velocidad angular Ω_o.

Solución. En el flujo laminar en estado estacionario, el fluido sigue un movimiento circular, y los componentes v_r y v_z de la velocidad son cero. No existe gradiente de presión en la dirección θ. Estas afirmaciones se basan en principios físicos. Para este sistema, todos los términos de la ecuación de continuidad, expresados en coordenadas cilíndricas (Ec. *B* de la Tabla 3.4–1), son cero, y las ecuaciones de movimiento (Ecs. *D*, *E*, *F* de la Tabla 3.4-3) se reducen a

1 H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Nueva York (1955), capitulo 4. H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945).

componente' r
$$-\rho\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (3.5\text{–}8)$$

componente θ
$$0 = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_\theta)\right) \qquad (3.5\text{–}9)$$

componente z
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \qquad (3.5\text{-}10)$$

La Ec. 3.5-9 puede integrarse con respecto a r utilizando las siguientes condiciones límite: ve = 0 para r = κR, y $v_\theta = \Omega_o R$ para $r =$ R. El resultado que se obtiene es

$$v_\theta = \Omega_o R \frac{\left(\frac{\kappa R}{r} - \frac{r}{\kappa R}\right)}{\left(\kappa - \frac{1}{\kappa}\right)} \qquad (3.5\text{-}11)$$

Con ayuda de la Tabla 3.4-6 podemos obtener ahora la distribución del esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}(r)$:

$$\tau_{r\theta} = -\mu\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{\Omega_o R}{r}\frac{\left(\frac{\kappa R}{r} - \frac{r}{\kappa R}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)}\right]\right\}$$
$$= -2\mu\Omega_o R^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}\right) \qquad (3.5\text{-}12)$$

También puede calcularse fácilmente el par $\mathcal{T}$ necesario para hacer girar el eje exterior, como producto de la fuerza por. el brazo de palanca:

$$\mathcal{T} = 2\pi RL \cdot (-\tau_{r\theta})|_{r=R} \cdot R$$
$$= 4\pi\mu L\Omega_o R^2\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}\right) \qquad (3.5\text{-}13)$$

El sistema que estamos considerando es un modelo bastante aceptable para ciertos tipos de cojinetes de fricción. Dichos sistemas se utilizan tambiin con frecuencia para determinar la viscosidad de fluidos midiendo el par y la velocidad angular. Los aparatos de este tipo se denominan viscósímetros de Couette-Hatschek.

Una vez que se ha obtenido la distribución de velocidad, puede calcularse la distribución de presión radial mediante la Ec. 3.5−8. Para un tratamiento sobre la integración de esta ecuación remitimos al lector a la bibliografía[2].

El flujo laminar en este sistema es muy estable debido a las fuerzas centrífugas. Una partícula procedente de una capa externa encuentra resistencia a moverse hacia el in-

[2] R. B. BIRD, C. F. CURTISS, y W. E. STEWART, *Chem. Eng. Sci.*, 11, 114417 (1959).

terior, debido a que la fuerza centrífuga que actúa sobre ella es mayor que sobre las partículas que están mas próximas al eje de rotación. Por otra parte, también el movimiento hacia el exterior está dificultado, debido a la mayor fuerza centrífuga de las partículas que tendrían que ser reemplazadas. De esto resulta que la transición a flujo turbulento tiene lugar para un número de Reynolds mucho más alto que en el sistema análogo con giro del cilindro interior, *en* el que la fuerza centrifuga tiende a-introducir inestabilidad, Estos dos sistemas se han estudiado experimentalmente[3], y se ha encontrado que los números de Reynolds correspondientes a la transición dependen grandemente de la relación existente entre el espesor del espacio anular y el radio del cilindro externo, $(1 - \kappa)$. Si el cilindro que gira es el *exterior,* el número de Reynolds correspondiente a la transición, definido por $(\Omega_o R^2\rho/\mu)_{trans.}$, alcanza un mínimo del orden de 50 000 cuando $(1 - \kappa)$ vale aproximadamente 0,05, como se aprecia en la Fig. 3.5-2. Cuando. el cilindro *interior* gira con una velocidad angular Ω_i (y el exterior esta inmóvil), el número de Reynolds de transición puede expresarse aproximadamente mediante la expresión

$$(\Omega_i \kappa R^2 \rho/\mu)_{trans} \doteq 41.3/(1 - \kappa)^{1/2} \qquad (3.5\text{–}14)$$

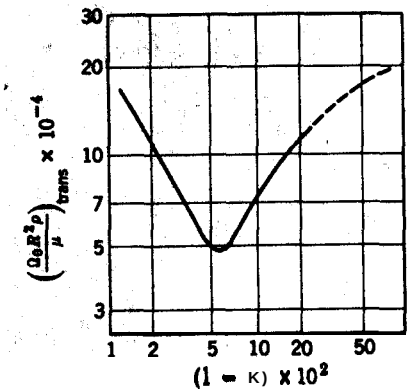


Fig. 3.5–2. Numero de Reynolds crítico para el flujo tangencial en un espacio. anular; gira el cilindro exterior y el interior es estacionario. [H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), p. 357].

Las distribuciones de velocidad angular en estos dos sistemas son muy semejantes para el intervalo laminar estable'.

---

[3] Estos dos sistemas son tratados brevemente por H. SCHLICHTING, op. *cit.* pp. 355-357 y 359-360. Este mismo autor ha investigado los sistemas en los que gira el cilindro externo, en *Nach. Ges. Wiss., Göttingen, Math. Physik*. Kl., 160 (1932). Los sistemas en los que rota el cilindro interior han sido estudiados a fondo por *G.* I. TAYLOR: *Phil. Trans.*, A223, *289* (1923); *Proc. Roy. Soc. (London)*, A151, 494 (1935); *ibid.*, A157, 546 y 565 (1936).

[4] H. SCHLICHTING, *op. cit.*, p. 64.

Ejemplo 3.5-2. Forma de la superficie de un liquido que gira

Un fluido de densidad y viscosidad constantes está contenido en un recipiente cilíndrico de radio R, tal como se indica en la Fig. 3.5 -3. El recipiente rota alrededor de su eje con una velocidad angular Ω. El eje del cilindro es vertical, de forma que g, = $g_\theta = 0$ y $g_z = -g$. Hallar la forma de la superficie libre, una vez alcanzado el estado estacionario.

Solución. Este sistema se describe mas fácilmente en coordenadas cilíndricas, y por lo tanto vamos a utilizar las ecuaciones de variación en este sistema coordenado que se dan en la Tabla 3.4-3. Sabemos que en el estado estacionario v_z = v, = 0, y que v_θ es una función exclusiva de r. Sabemos, también, que la presión depender8 de r, a causa de la fuerza centrífuga, y de z, debido a la fuerza gravitacional.

Al igual que en el ejemplo 3.5 -1, no hay contribución de la ecuación de continuidad, y la ecuación de movimiento se reduce a :

componente r

$$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{3.545}$$

componente θ

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) \tag{3.5–16}$$

componente z

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \tag{3.547}$$

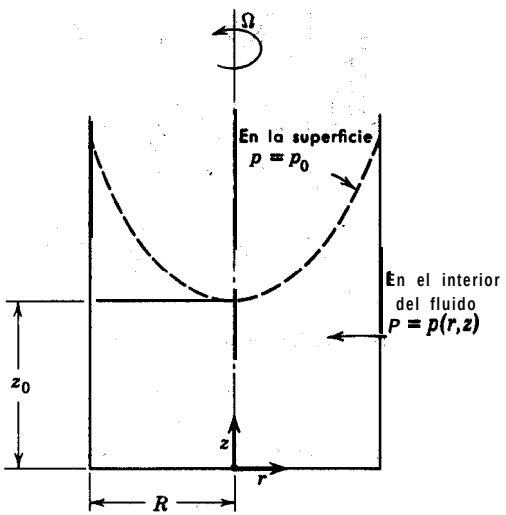


Fig. 3.5-3. **Superficie** libre de un líquido que gira, cuya forma es la de un paraboloide de revolución.

La ecuación θ puede integrarse de forma inmediata para obtener

$$v_\theta = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{3.5-18}$$

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración. Como v_θ no puede ser infinito para' $r = 0$, la constante C_2 ha de ser cero. Sabemos además que para $r = R$ la velocidad v_θ es $R\,\Omega$. De acuerdo con esto puede evaluarse C_1 y llegar a

$$v_\theta = \Omega r \tag{3.5-19}$$

lo que establece que cada elemento del fluido que gira se mueve de igual forma que los elementos de un cuerpo rígido. Este resultado puede substituirse en el componente r de la ecuación de movimiento.

De esta forma se obtienen dos expresiones para los gradientes de presión:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \tag{3.5-20}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{3.5-21}$$

Como p es una función analítica de la posición, puede escribirse

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \tag{3.5-22}$$

Substituyendo las Ecs. 3.5−20 y 21 en esta expresión de la diferencial total de la presión e integrando, se llega a

$$P = -\rho g z + \tfrac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + C \tag{3.5-23}$$

siendo C una constante de integración, que puede determinarse teniendo en cuenta que $p = p_o$ para $r = 0$ y $z = z_o$, de forma que

$$p_0 = -\rho g z_0 + C \tag{3.5-24}$$

De aquí que

$$p - p_0 = -\rho g (z - z_0) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \tag{3.5-25}$$

La superficie libre es el lugar geométrico de los puntos en los que $p = p_o$, y por lo tanto su ecuación es

$$0 = -\rho g (z - z_0) + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} \tag{3.5-26}$$

0

$$z - z_0 = \left(\frac{\Omega^2}{2g} \right) r^2 \tag{3.5-27}$$

que es la ecuación de una parábola. El lector puede comprobar igualmente que la superficie libre de un líquido contenido en un recipiente anular que gira, presenta una ecuación análoga.

Ejemplo 3.5-3. Relaciones del par y distribución de velocidad en el viscosímetro de plato y cono[5]

El viscosfmetro de plato y cono, que se representa esquemáticamente en la Fig. 3.5-4, consta esencialmente de una lámina plana estacionaria, sobre la que se coloca el líquido o pasta a ensayar, y un cono invertido, que se introduce en la substancia problema hasta que la punta toca a la lámina, El cono se hace girar a una velocidad angular conocida Ω, y la viscosidad del fluido se determina midiendo el par que se necesita para hacer girar el cono. En la práctica, el ángulo θ_0, comprendido entre las superficies cónica y plana, es muy pequeño, del orden de medio grado. Este tipo de aparato presenta algunas ventajas importantes, especialmente en el caso de fluidos no-newtonianos:

a. Solamente es importante el componente del esfuerzo $\tau_{\theta\phi}$.
b. El valor de $\tau_{\theta\phi}$ es muy aproximadamente constante en todo el fluido.
c. Los efectos finales pueden eliminarse casi totalmente.

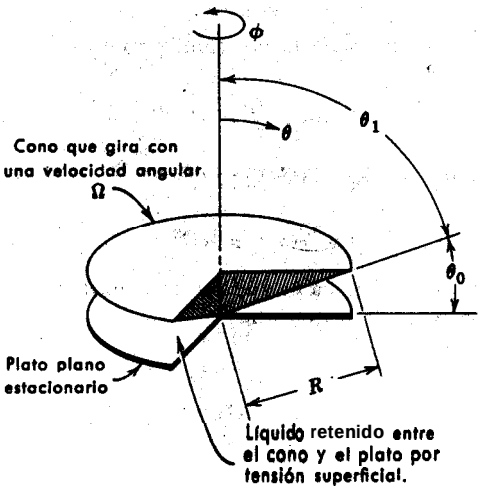


Fig. 3.5-4. Corte del viscosímetro de plato y cono.

Analizar el sistema de la siguiente forma: (i) demostrar que solamente es importante $\tau_{\theta\phi}$; (ii) determinar $\tau_{\theta\phi}$ en función de r y θ; (iii) utilizar los resultados de (i) e (ii) con el fin

[5] En relación con este problema, los autores desean agradecer las discusiones mantenidas con el Profesor A. G. Fredrickson (Universidad de Minnesota) y el Profesor J. C. Slattery (Universidad de Northwestern).

de determinàr v_ϕ (r, θ) para el flujo estacionario de un fluido newtoniano con ρ y μ constantes (esta expresión deberá contener el par $\mathcal{F}$); (iv) obtener otra expresión para v_ϕ (r, θ) que contenga la velocidad angular en vez del par.

Solución. *a.* Si se supone que el flujo es completamente tangencial, resulta que v_ϕ es una función de r y θ, y que v, = v_θ = 0. En la Tabla 3.4-7 puede verse que los únicos componentes posibles de τ que no desaparecen son $\tau_{r\phi}$ y $\tau_{\theta\phi}$. Por lo tanto, los tres componentes de la ecuación de movimiento (véanse Ecs. *A*, B, y C, de la Tabla 3.4-4) son

coniponente r
$$-\rho\frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3.5-28a}$$

componente θ
$$-\rho\cot\theta\frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \tag{3.5-28b}$$

componente ϕ
$$0 = -\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\theta} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2\cot\theta\frac{\tau_{\theta\phi}}{r}\right) \tag{3.5-28c}$$

Se supone «flujo reptante», es decir, se admite que el flujo es suficientemente lento, de forma que los términos que contienen v^2_ϕ pueden tomarse iguales a cero. Con esto nos queda solamente el componente ϕ de la ecuación de movimiento.

Postulamos[6] ahora que la distribución de velocidad ha de ser de la' forma v_ϕ (r, θ) = $rf(\theta)$. Ensayamos esta forma funcional debido a que satisface las condiciones límite, tanto para $\theta = \theta_1$ como para $\theta = \pi/2$. Como de acuerdo con esta hipótesis la velocidad angular v_ϕ/r es independiente de r, a partir de la Ec. *F* de la Tabla 3.4-7 se encuentra que $\tau_{r\phi} = 0$.

b. Al tomar $\tau_{r\phi}$ igual a cero, se llega a la siguiente ecuación diferencial, para $\tau_{\theta\phi}$:

$$\frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = -2\tau_{\theta\phi}\cot\theta \tag{3.5-29}$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$\tau_{\theta\phi} = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{3.5-30}$$

en la que C_1 es una constante de integración, que puede. evaluarse a partir de la condición límite de que para $\theta = \pi/2$ el par $\mathcal{F}$ transmitido por el fluido a la lámina es conocido. El par se evalúa multiplicando $\tau_{\theta\phi}|_{\theta=\pi/2}$ por el área diferencial $r\,dr\,d\phi$ y por el brazo de palanca r, e integrando este producto sobre la superficie de lámina completamente mojada de radio R:

$$\mathcal{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tau_{\theta\phi}|_{\theta=\pi/2}\, r^2\, dr\, d\phi$$
$$= (2\pi)\left(\frac{R^3}{3}\right)\left(\frac{C_1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}}\right) \tag{3.5-31}$$

[6] Para Otro punto de vista, véase el probkma 3.T.

Combinando las Ecs. 3.5-30 y 31 se obtiene

$$\tau_{\theta\phi} = \frac{3\mathcal{F}}{2\pi R^3 \operatorname{sen}^2 \theta} \tag{3.5-32}$$

Si θ_0 es pequeño, $\operatorname{sen}^2\theta$ se hace muy próximo a la unidad, y $\tau_{\theta\phi}$ será prácticamente independiente de la posición.

'c. A partir de la Ec. *E* de la Tabla 3.4-7 se obtiene la relación entre $\tau_{\theta\phi}$ y el gradiente de v_ϕ/r. Introduciendo esta expresión en la Ec. 3.5-32 se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para la velocidad angular local v_ϕ/r:

$$-\mu \operatorname{sen}\theta \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_\phi/r}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \frac{3\mathcal{F}}{2\pi R^3 \operatorname{sen}^2\theta} \tag{3.5-33}$$

Separando variables e integrando, se obtiene la distribución de velocidad angular:

$$\frac{v_\phi}{r} = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi R^3 \mu}\left[\cot\theta + \tfrac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\right] + C_2 \tag{3.5-34}$$

La constante de integración, C_2 es cero, puesto que $v_\phi = 0$ para $\theta = \pi/2$.

d. Podemos escribir ahora la Ec. 3.5-34 para el caso especial de que $\theta = \theta_1 = \pi/2 - \theta_0$ y $v_\phi = \Omega r \operatorname{sen}\theta_1$.

$$\Omega \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{3\mathcal{F}}{4\pi R^3 \mu}\left[\cot\theta_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\right)\operatorname{sen}\theta_1\right] \tag{3.5-35}$$

(Obsérvese que esta expresión permite determinar μ a partir de medidas de $\mathcal{F}$ y Ω.)

Dividiendo la Ec. 3.5-34 por la Ec. 3.5−35 se elimina $\mathcal{F}$, con lo que se obtiene v_ϕ en función de Ω:

$$\frac{v_\phi}{r} = \Omega \operatorname{sen}\theta_1 \left[\frac{\cot\theta + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta}{\cot\theta_1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\right)\operatorname{sen}\theta_1}\right] \tag{3.5-36}$$

Para valores de θ y θ_1 prácticamente iguales a $\pi/2$, esta expresión puede substituirse muy aproximadamente por

$$\frac{v_\phi}{r} \doteq \Omega \frac{\cos\theta}{\cos\theta_1} \doteq \Omega\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta_1}\right) \tag{3.5-37}$$

La Ec. 3.5-36 puede deducirse también por otro método descrito en el problema 3.T.

§ 3.6 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA FLUJO NO-NEWTONIANO INCOMPRESIBLE

Las ecuaciones de movimiento expresadas en función de $\boldsymbol{\tau}$ (véanse las Ecs. *A*, *B* y C de las Tablas 3.4-2, 3 y 4) pueden utilizarse para describir el flujo no-newtoniano. Con este fin, sin embargo, se necesitan relaciones entre los componentes de $\boldsymbol{\tau}$ y los distintos gradientes de velocidad; en otras palabras, hay que substituir las expresiones que se dan en las Tablas 3.4-5, 6 y 7, por otras adecuadas para el flujo no-newtoniano. Por consiguiente, la mayor parte de esta sección está dedicada a las expresiones de $\boldsymbol{\tau}$ para modelos no-newtonianos.

En § 1.1 se ha definido el coeficiente de viscosidad de acuerdo con la Ley de la viscosidad de Newton. Posteriormente, en § 1.2, se ha visto que ciertas clases de fluidos no pueden describirse mediante la ley de Newton, y que algunos «modelos no-newtonianos» resultan útiles para expresar el comportamiento reológico de los materiales no-newtonianos más simples.

En § 3.2 se ha expuesto la ley de la viscosidad de Newton en una forma más general. En las Ecs. 3.2—11 a 16 se dan las expresiones en coordenadas cartesianas, así como también las expresiones análogas para coordenadas cilíndricas y esféricas. En esta sección se pretende obtener una generalización análoga de los modelos no-newtonianos. Sin embargo, este tratamiento está restringido para el flujo ***incompresible.***

Recordemos que, según § 3.2, la ley de la viscosidad de Newton para un fluido incompresible es

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \mathbf{A} \tag{3.6-1}$$

en la que $\mathbf{A}$ es el «tensor velocidad de deformación» simétrico, con componentes cartesianos $\Delta_{ij} = (\partial v_i/\partial x_j) + (\partial v_j/\partial x_i)$. El coeficiente de viscosidad depende de la temperatura y presión locales, pero ***no*** de $\boldsymbol{\tau}$ o $\mathbf{A}$.

Para materiales no-newtonianos no existe una relación entre $\boldsymbol{\tau}$ y $\mathbf{A}$, como la que se indica en la Ec. 3.6—1. Para algunos tipos sencillos de fluidos no-newtonianos, se puede, sin embargo, escribir

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta \mathbf{A} \tag{3.6-2}$$

en la que la viscosidad no-newtoniana η, un escalar, es una función de $\mathbf{A}$ (o una función de $\boldsymbol{\tau}$), así como también de la temperatura y la presión. La suposición de diferentes funciones empíricas para describir la variación de η con $\mathbf{A}$ (o con $\boldsymbol{\tau}$) corresponde a los distintos «modelos» expuestos en § 1.2.

Para que η sea una función escalar del tensor $\mathbf{A}$, es preciso que dependa solamente de los «invariantes» de $\mathbf{A}$. Los invariantes son las combinaciones especiales de los componentes de $\mathbf{A}$ que se transforman como escalares en una rotación del sistema coordenado :

$$I_1 = (\Delta : \delta) = \Sigma_i \Delta_{ii} \tag{3.6-3}$$

$$I_2 = (\mathrm{A} : \mathrm{A}) = \Sigma_i \Sigma_j \Delta_{ij} \Delta_{ji} \tag{3.6-4}$$

$$I_3 = \det \mathrm{A} = \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} \Delta_{1i} \Delta_{2j} \Delta_{3k} \tag{3.6-5}$$

Puede demostrarse fácilmente que el primer invariante corresponde a $2(\nabla \cdot v)$, que es cero para un fluido incompresible. Por lo tanto,

$$\eta = \eta(I_2, I_3) \tag{3.6-6}$$

Para muchos flujos sencillos (flujo axial en un tubo, flujo tangencial entre cilindros concéntricos, flujo en una película) el tercer invariante I_3 se anula. Para otros tipos de flujo, generalmente se admite que I_3 no es muy importante. De acuerdo con esto, se acostumbrar suponer que η puede tomarse como una función de(A : A).Se han propuesto algunos modelos de materiales para los que η depende de la densidad de flujo de cantidad de movimiento; en este caso η puede tomarse como una función de $(\tau : \tau)$.

Teniendo en cuenta lo expuesto hasta aquí, podemos expresar los modelos no-newtonianos de § 1.2 en una forma que nos permita describir el flujo en geometrías complejas :

Modelo de Bingham $$\tau = -\left(\mu_0 - \frac{\tau_0}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta : \Delta)}}\right)\mathrm{A} \quad \text{para } \tfrac{1}{2}(\tau : \tau) > \tau_0^2 \tag{3.6-7}$$

$$\mathrm{A} = 0 \quad \text{para } \tfrac{1}{2}(\tau : \tau) < \tau_0^2 \tag{3.6-8}$$

Modelo de Ostwald-de Waele $$\tau = -\{m\,|\sqrt{\tfrac{1}{2}(\Delta : \Delta)}|^{n-1}\}\Delta \tag{3.6-9}$$

Modelo de Reiner-Philippoff $$\tau = -\left\{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \frac{\frac{1}{2}(\tau : \tau)}{\tau_0^2}}\right\}\mathrm{A} \tag{3.6-10}$$

La utilidad de estas ecuaciones consiste en que se pueden expresar los componentes de τ para materiales .no-newtonianos en coordenadas cilíndricas y esféricas, mediante el siguiente procedimiento : *(a)* buscar cuidadosamente hasta encontrar en las Tablas 3.4–5, 6 y 7 las correspondientes relaciones newtonianas; *(b)* substituir μ en la expresión newtoniana, por la magnitud entre corchetes del modelo deseado; y (c) introducir la relación (A : A) o $(\tau : \tau)$ en las coordenadas adecuadas. De hecho,

[1] Esto ha sido sugerido por primera vez por K. HOHENEMSER y W. PRAGER, *Z. angew. Math. Mech.*, *12*, 216-226 (1932).

$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{\Delta})$ resulta ser exactamente la función Φ_v de la Tabla 3.4-8, en la que se ha suprimido el término $-\frac{2}{3}(\nabla \cdot v)^2$; por lo tanto, se dispone de' ella en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas. Después se ilustra este procedimiento mediante un ejemplo.

Antes de concluir esta sección es preciso hacer varias advertencias. Las expresiones tales como las de las Ecs. 3.6-7, 8, 9 y 10, son expresiones, *empíricas,* propuestas para representar de forma aproximada el comportamiento real de distintos materiales; lo único que se ha hecho aquí es escribir estas expresiones en una forma tal que se transformen adecuadamente al pasar de un sistema coordenado a otro. Sin embargo, no se puede asegurar que los parámetros (m y n por ejemplo), serían los mismos si se determinasen en distintos dispositivos geométricos. Es preciso subrayar que hemos despreciado el efecto de I_3, debido fundadamente a- la falta de información experimental acerca de su importancia. Por otra parte, todavía se ha restringido más el estudio, debido a que se ha supuesto que, la Ec. 3.6-2 puede utilizarse para describir el comportamiento de un fluido no-newtoniano.

Se ha visto que la ecuación más general, independiente del tiempo, para fluidos no-newtonianos isotrbpicos e incompresibles que no presentan elasticidad[2,3], es

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta\boldsymbol{\Delta} - \tfrac{1}{2}\eta_c\{\boldsymbol{\Delta} \cdot \mathrm{A}\} \qquad (3.6\text{–}11)$$

en la que η_c es la «viscosidad transversal» (en ingles «*cross-viscosity*»); siendo tanto' η como η_c funciones de I_2 e I_3.

Todavía se pueden utilizar expresiones más generales que comprenden los efectos de elasticidad[4,5]. Hasta ahora no se han sacado aplicaciones prácticas de la Ec. 3.6-11 y otras relaciones más generales, ya que se necesita una mayor investigación con respecto a la naturaleza específica de magnitudes tales como η y η_c. Sm embargo, es interesante hacer notar que el «efecto de Weissenberg» (la tendencia de un fluido a trepar a lo largo de un eje que gira, en vez de ser despedido por fuerza centrífuga) puede explicarse cualitativamente mediante el término η_c de la Ec. 3.6-11 . Se han propuesto ademas otros 'modelos distintos de la Ec. 3.6-11 que también explican cualitativamente este efecto.

Ejemplo 3.6–1. Flujo tangencial de un plástico de Bingham en tubos concéntricos

Determinar las distribuciones de velocidad y esfuerzo, para el flujo de un plástico de Bingham en el aparato del **ejemplo 3.5 – 1, en función del par $\mathcal{T}$ comunicado al cilindro exterior. Supóngase flujo laminar incompresible y despréciense los efectos finales.**

---

2 R. S. RIWLIN, *Proc, Roy. Soc.* (Londres), **A193,** 260-281 (1948); *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **45, 88-91 (1949).**

3 M. REINER, *Am. J. Math.*, **67,** *350-362* **(1945).**

4 J. G. OLDROYD presenta una interesante introducción al flujo no-newtoniano en' *Rheology,* R.R. Eirich (Ed.), Academic Press, Nueva York (1956). capítulo 16. Un tratamiento más completo puede encontrarse en C. TRUESDELL, *J. Rat. Mech. Anal.*, 1, 125-300 (1952).

5 Para un problema sencillo de viscoelasticidad, véase problema 3.V.

Solución. Para este sistema $v_r = v_z = 0$ y $v_\theta = v_\theta(r)$. Por lo tanto, el único componente de $\boldsymbol{\tau}$ que no desaparece es $\tau_{r\theta}$, y la ecuación de movimiento para el estado estacionario es

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\tau_{r\theta}) \tag{3.6–12}$$

Al integrar se obtiene

$$\tau_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2} \tag{3.643}$$

Si se conoce el par $\mathcal{T}$ comunicado, al cilindro exterior

$$\mathcal{T} = -\tau_{r\theta}|_{r=R} \cdot 2\pi RL \,.\, R \tag{3.614}$$

El signo menos se debe a que la densidad de flujo de cantidad de movimiento θ tiene lugar en la dirección -r. Por lo tanto $C_1 = -\mathcal{T}/2\pi L$, y

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\mathcal{T}}{2d.r'} \tag{3.615}$$

Este resultado, que es satisfactorio para cualquier tipo de fluido, puede también obtenerse admitiendo que toda la impulsión angular ha de transmitirse desde el cilindro exterior al interior.

La expresión analítica que debe de utilizarse para el modelo de Bingham depende del valor de $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_j\tau_{ij}^2$. Como $\tau_{r\theta}$ es el único componente de $\boldsymbol{\tau}$ que no desaparece, tenemos

$$\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{\tau}) = \tau_{r\theta}^2 \tag{3.646}$$

Por lo tanto, se utiliza la Ec. 3.6-7 cuando $|\tau_{r\theta}| > \tau_0$ (es decir, cuando se sobrepasa el esfuerzo cortante crítico), y la Ec. 3.6–8 cuando $|\tau_{r\theta}| < \tau_0$. A 'partir de la Ec. 3.6–15 se puede definir una magnitud r_0, que es el valor de r para el cual $|\tau_{r\theta}| = \tau_0$:

$$r_0 = \sqrt{\left|\frac{\mathcal{T}}{2\pi\tau_0 L}\right|} \tag{3.6–17}$$

Se pueden distinguir tres casos:

a. Si $r_0 < \kappa R$, no existir& movimiento del fluido en ninguna parte.

b. Si $R > r_0 \geq \kappa R$, habrá flujo viscoso en la región $\kappa R < r < r_0$, y «flujo de tapón» para $r_0 < r < R$.

c. Si $r_0 \geq R$, habrá flujo total.

A continuación escribimos la Ec. 3.6-7 para el sistema que estamos considerando. Teniendo en cuenta que

$$\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}:\boldsymbol{\Delta}) = \left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^2$$

se llega a

$$\tau_{r\theta} = -\left\{ \mu_0 + \frac{\tau_0}{r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right)} \right\} r\frac{d}{dr}\frac{v_\theta}{r}$$

$$= -\tau_0 - \mu_0 r\frac{d}{dr}\frac{v_\theta}{r} \qquad (3.6\text{–}18)$$

Como v_θ/r no disminuye al aumentar r, $\tau_{r\theta}$ es negativo. Es decir, que el componente θ de la cantidad de movimiento fluye en la dirección r negativa.

Substituyendo la Ec. 3.6-18 en la Ec. 3.6-15 e integrando, se obtiene para el caso *b*

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega + \frac{\mathcal{F}}{4\pi L\mu_0 r_0^2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{para } \kappa R < r < r_0 \qquad (3.619)$$

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega \quad \frac{v_\theta}{r} = \Omega \quad \text{para } r_0 < r < R \qquad (3.6\text{–}20)$$

habiéndose utilizado la condición límite de que $v_\theta/r = \Omega$ para r = r_0. En el caso c se utiliza la condición límite $v_\theta/r = \Omega$ para r = R, y se llega a

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega + \frac{\mathcal{F}}{4\pi L\mu_0 R^2}\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \qquad \kappa R < r < R \qquad (3.6\text{–}21)$$

Si utilizamos ahora en el caso c la condición de que para $r = \kappa R$, $v_\theta = 0$, se obtiene

$$\Omega = \frac{\mathcal{F}}{4\pi L\mu_0 R^2}\left(\frac{1}{\kappa^2} - 1\right) + \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\kappa \qquad (3.6\text{–}22)$$

Esta relación entre Ω y f(conocida como ecuación de Reiner-Riwlin[6]) permite determinar μ_0 y τ_0 a partir de datos viscosimétricos.

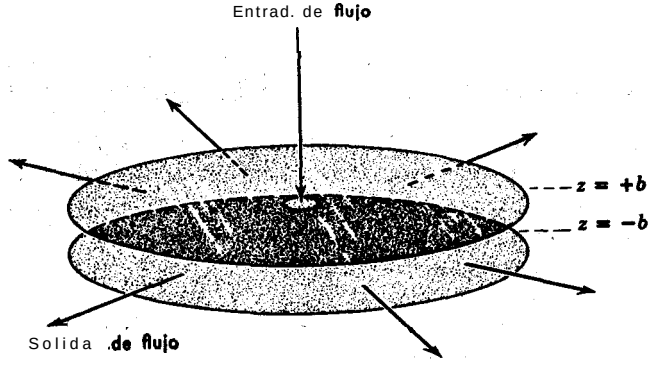


Fig. 3.6-1. Flujo radial, hacia fuera, entre dos discos paralelos de radio r_2. El radio del orificio de entrada es r_1. La distancia entre las láminas es $2b$.

6 M. REINER y R. RIWLIN, *Kolloid-Z., 43, 1* (1927).

Ejemplo 3.6–2. Componentes del tensor de densidad de flujo de cantidad de movimiento, para el flujo radial no-newtoniano entre dos discos paralelos

Se considera el flujo reptante radial entre dos disc& circulares, para un fluido que sigue el modelo de la potencia, tal como se indica en la Fig. 3.6-1.

a. ¿Desaparece I_3 para este sistema?

b. ¿Cuáles son los componentes de τ de acuerdo con la Ec. 3.6–9?

Solución. *a.* Utilizando coordenadas cilíndricas para este sistema, se observa que para' flujo reptante $v_z = v_\theta = 0$, así como también que $v_r = v_r(r, z)$. Por lo tanto, **A** es de la forma

$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} 2(\partial v_r/\partial r) & 0 & (\partial v_r/\partial z) \\ 0 & 2(v_r/r) & 0 \\ (\partial v_r/\partial z) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6-23}$$

Como se ve, det $\mathbf{A} \neq 0$, y el tercer invariante *no* desaparece.

b. Para el caso de coordenadas cilíndricas, y teniendo en cuenta lo establecido en (a) con respecto a los componentes de la velocidad, resulta

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta}) = 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2 \tag{3.6-24}$$

Este resultado puede obtenerse formando el producto de doble punto de **A** consigo mismo, o bien utilizando la Ec. *B* de la Tabla 3.4-8, juntamente con la relación $\Phi_v = \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta})$. De acuerdo con esto, los componentes de τ que no desaparece8 son

$$\tau_{rr} = -2\{m|\sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta})}|^{n-1}\}\frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{3.6-25}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2\{m|\sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta})}|^{n-1}\}\frac{v_r}{r} \tag{3.6-26}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\{m|\sqrt{\tfrac{1}{2}(\mathbf{\Delta} : \mathbf{\Delta})}|^{n-1}\}\frac{\partial v_r}{\partial z} \tag{3.6-27}$$

§ 3.7 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN1

Antes de abandonar el tema de la formulación general de estas ecuaciones entre derivadas parciales y su significado, vamos a estudiarlas desde el punto de vista del análisis dimensional. Para mayor sencillez, este estudio se limita a los sistemas de densidad y viscosidad constantes; sin embargo, puede ampliarse fácilmente para los casos en que estas magnitudes varían2.

---

1 Un reciente libro sobre los problemas del paso de escala es el de R. E. JOHNSTONE y M. M. THRING, *Piiot Plants, Models and Scale-up Methods in Chemical Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York (1957). El análisis dimensional de la ecuación de Navier-Stokes se considera en las páginas 50 y ss. Análisis algo más detallados pueden *verse* en H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955).

2 H. SCHLICHTING, *op. cit.*, pp. 248 y ss., considera los efectos de compresibilidad.

En muchos sistemas de flujo se puede elegir una longitud característica D y una velocidad característica V. Así, para el flujo en un tubo circular, se toma generalmente D como el diámetro del tubo y V la velocidad media de flujo. Para el flujo alrededor de una esfera, se toma habitualmente para D el diámetro de la esfera y para V la velocidad del fluido en un punto alejado de la esfera, relativa a la velocidad de ésta, lo que se denomina «velocidad de aproximación». La elección es arbitraria, pero debe de especificarse cuidadosamente en cada caso. Una vez que se ha efectuado esta elección, se pueden definir las siguientes variables adimensionales y operaciones diferenciales :

$$v^* = \frac{v}{V}; \quad p^* = \frac{(p - p_0)}{\rho V^2}; \quad t^* = \frac{tV}{D} \tag{3.7-1,2,3}$$

$$x^* = \frac{x}{D}; \quad y^* = \frac{y}{D}; \quad z^* = \frac{z}{D} \tag{3.7-4}$$

$$\nabla^* = D\nabla = \left(\delta_1 \frac{\partial}{\partial x^*} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial y^*} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \tag{3.7-5}$$[3]

$$\nabla^{*2} = D^2\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \tag{3.7-6}$$

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{D}{0V}\frac{D}{Dt} \tag{3.7-7}$$

En la Ec. 3.7-2, p_0 es una presión adecuada que se toma como referencia.

Recuérdese que las ecuaciones de continuidad y movimiento para fluidos newtonianos de densidad y viscosidad constantes, son

(ecuación de continuidad)
$$(\nabla \cdot v) = 0 \tag{3.7-8}$$

(ecuación de movimiento)
$$\rho \frac{D_0}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + \rho g \tag{3.7-9}$$

Estas dos ecuaciones pueden expresarse en función de las siguientes variables adimensionales, tomando $v = v^*V$, $(p - p_0) = p^* V^2$, etc.:

$$\left(\frac{1}{D}\nabla^* \cdot v^* V\right) = 0 \tag{3.7-10}$$

$$\rho \frac{V}{0D}\frac{D}{Dt^*}(v^*V) = -\left(\frac{1}{D}\nabla^* \cdot p^*\rho V^2\right) + \mu \frac{1}{D^2}\nabla^{*2}(v^*V) + pg \tag{3.741}$$

[3] Las δ_i son «vectores unitarios» (véase § A.2).

Multiplicando la Ec. 3.7—10 por D/V y la Ec. 3.7-11 por $D/\rho V^2$, se obtiene

$$(\nabla^* \cdot v^*) = 0 \tag{3.7-12}$$

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \left[\frac{\mu}{DV\rho}\right]\nabla^{*2} v^* + \left[\frac{gD}{V^2}\right]\frac{g}{g} \tag{3.7-13}$$[4]

Obsérvese que en estas formas adimensionales de las ecuaciones de variación, los «factores de escala», es decir, las variables que describen el tamaño total y la velocidad del sistema, así como sus propiedades físicas, se reúnen en dos grupos adimensionales. Estos grupos 'intervienen con tanta frecuencia en estudios ingenieriles que se les ha dado nombre en honor de dos pioneros en mecánica de fluidos:

$$\mathrm{Re} = \left[\frac{DV\rho}{\mu}\right] = \text{numero de Reynolds} \tag{3.7— 14}$$

$$\mathrm{Fr} = \left[\frac{V^2}{gD}\right] = \text{número de Froude} \tag{3.7-15}$$

Si en dos sistemas diferentes, los factores de escala son tales que los números de Froude y Reynolds son iguales para ambos, los dos sistemas están descritos por idénticas ecuaciones diferenciales adimensionales. Si además las condiciones adimensionales inicial y límite son las mismas (lo cual sólo es posible si los dos sistemas son geométricamente semejantes), los dos sistemas son matemáticamente idénticos; es decir, que la distribución de velocidad adimensional v^* (x^*, y^*, z^*, t^*) y la distribución de presión adimensional p^* (x^*, y^*, z^*, t^*) son las mismas en cada uno de ellos. Se dice entonces que tales sistemas son «dinámicamente semejantes». En el paso de escala de procesos no bien conocidos, es generalmente conveniente mantener la semejanza dinámica, tal como se indica en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.7-1. Predicción de la profundidad del vórtice en un tanque agitado

Se desea predecir la profundidad del vórtice para el flujo estacionario en un tanque de aceite de grandes dimensiones desprovisto de placas deflectoras, como se indica en la Fig. 3.7 —1, en función de la velocidad del agitador. Nos proponemos obtener el resultado mediante el estudio de un modelo a escala reducida, geométricamente semejante al tanque. Determinar las condiciones en las que debe de efectuarse el estudio del modelo con el fin de que constituya un medio adecuado de predicción.

Solución. Como el tipo de flujo en este sistema es demasiado complicado para permitir un cálculo exacto, se utilizarán los métodos del análisis dimensional. La forma del vórtice será la misma en los dos tanques, siempre que sean idénticas las ecuaciones diferen-

[4] Obsérvese que g/g es un vector unidad en la dirección de la gravedad.

ciales y las condiciones. límite adimensionales que describen el flujo. Es evidente que las ecuaciones diferenciales'son las ecuaciones de continuidad y de movimiento; las condiciones límite son:

Tanque grande	*Tanque pequeño*	
$v = 0$ para $z = 0$	para $z = 0$	
siendo $0 < r < T_1/2$	siendo $0 < r < T_2/2$	(3.7-16)
para $r = T_1/2$	para $r = T_2/2$	
siendo $0 < z < H_1$	siendo $0 < z < Hz$	(3.7 — 17)
$p = p_o$ para $S_1(r, z)$	para $S_2(r, z)$	(3.7-18)

siendo S_1 y S_2 las superficies de los vórtices de los tanques grande y pequeño y p_o la presión atmosférica. También se puede escribir que la velocidad relativa a todas las superficies sólidas móviles es cero en dichas superficies, pero las condiciones anteriores son suficientes para poner de manifiesto la técnica que se utiliza. Se supondrá que la operación tiene lugar en estado estacionario y por consiguiente no se precisa ninguna condición inicial. Elegimos como longitud de referencia del sistema el diámetro D del agitador, y como velocidad de referencia DN, el producto del diámetro del agitador por su velocidad de rotación, expresada en revoluciones por unidad de tiempo. Los números de Reynolds y Froude para este sistema son $[D^2N\rho/\mu]$ y $[DN^2/g]$, respectivamente. Las condiciones limite en función de las variables adimensionales son

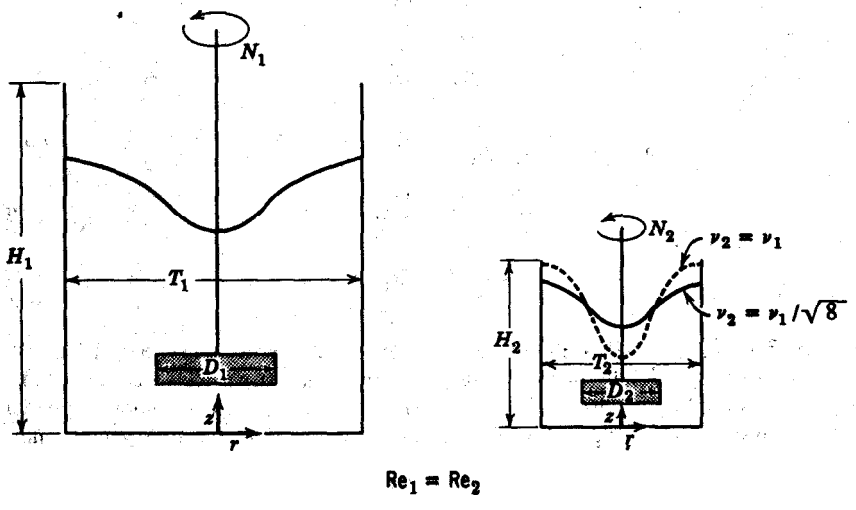


Fig. 3.7—1. Profundidad de vórtice en un tanque agitado.

Tanque grande	*Tanque pequeño*	
$v^* = 0$ para $z^* = 0$	para $z^* = 0$	
siendo $0 < r^* < \frac{T_1}{2D_1}$	siendo $0 < r^* < \frac{T_2}{2D_2}$	*(3.7-19)*
$v^* = 0$ para $r^* = \frac{T_1}{2D_1}$	para $r^* = \frac{T_2}{2D_2}$	
siendo $0 < z^* < \frac{H_1}{D_1}$	siendo $0 < z^* < \frac{H_2}{D_2}$	*(3.7-20)*
$p^* = 0$ para $S_1^*\left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1}\right)$	para $S_2^*\left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2}\right)$	(3.7-21)

Por lo tanto, para que el tipo de flujo sea semejante en los dos tanques es preciso que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\frac{T_1}{D_1} = \frac{T_2}{D_2} \qquad (3.7\text{-}22)$$

$$\frac{H_1}{D_1} = \frac{H_2}{D_2} \qquad (3.7\text{-}23)$$

$$S_1^*\left(\frac{r}{D_1}, \frac{z}{D_1}\right) = S_2^*\left(\frac{r}{D_2}, \frac{z}{D_2}\right) \qquad (3.7\text{-}24)$$

$$\frac{D_1^2 N_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{D_2^2 N_2 \rho_2}{\mu_2} \qquad (3.7\text{-}25)$$

$$\frac{D_1 N_1^2}{g} = \frac{D_2 N_2^2}{g} \qquad (3.7\text{-}26)$$

Las Ecs. 3.7-22 y 23 corresponden a la exigencia de semejanza geométrica. Es evidente que cuanto mas detallada esté la descripción de las superficies de velocidad cero, mayor número de estas relaciones de tamaño serán necesarias. En la practica pueden incluso tener importancia la rugosidad relativa de las paredes del tanque y el tamaño de las cabezas de los pernos. Si los vórtices tienen la misma forma es obvio que ha de cumplirse la Ec. 3.7 -24, puesto que $S_1^*(r/D_1, z/D_1)$ y $S_2^*(r/D_2, z/D_2)$ son las formas adimensionales de los vórtices.

Las Ecs. 3.7-25 y 26 establecen las relaciones que han de existir entre los factores de escala, y que desde nuestro punto de vista son las mas importantes. Como no es practico en modo alguno variar el campo gravitacional, de la Ec. 3.7-26 se deduce que

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \qquad (3.7\text{-}27)$$

Substituyendo esta expresión en la Ec. 3.7-25, se obtiene

$$\frac{\mu_2}{\rho_2} = \frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{3/2} \qquad (3.7\text{-}28)$$

De esta forma se llega al interesante resultado de que la semejanza dinámica, o sea vórtices semejantes en este ejemplo, no puede conseguirse si se utiliza el mismo fluido en los dos tanques, sino que debe de emplearse un fluido menos viscoso en el tanque más pequeño. Si el tanque pequeño tiene unas dimensiones lineales que son la mitad de las del grande, la viscosidad cinemática del fluido en él contenido tiene que ser $1/\sqrt{8}$ veces la del aceite del tanque grande. Si se tuviese en ambos el mismo fluido y el mismo número de Reynolds, el número de Froude en el tanque pequeño sería mayor y el vórtice sería proporcionalmente más profundo, que es el caso que se indica mediante la curva de trazos de la Fig. 3.7-1.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Expresar el significado físico de las tres derivadas $\partial T/\partial t$, dT/dt, y DT/Dt, siendo T la temperatura local del fluido,

2. ¿Puede ser Dc/Dt cero para el flujo de un fluido, cuando $\partial c/\partial t$ no es cero? ¿Puede no ser cero Dc/Dt cuando $\partial c/\partial t$ es cero? Explíquese.

3. ¿Cuál es el significado físico de la ecuación de continuidad?

4. ¿Cómo se simplifica la ecuación de continuidad para el flujo estacionario?

5. ¿Qué forma tomará la ecuación de continuidad para un fluido incompresible?

6. ¿Qué se entiende por divergencia de un vector y por gradiente de un escalar?

7. ¿Cuáles son las dimensiones de Vp, $\nabla^2 v$, $[\nabla \cdot \tau]$?

8. ¿En qué ley física se basa la ecuación de movimiento?

9. ¿Cuál es el operador laplaciana?

10. Comparar las Ecs. 3.2-8 y 3.2-10 por lo que respecta a la interpretación física.

11. ¿Cuál es el origen del balance diferencial de energía mecánica?

12. ¿Puede en algún caso ser negativa la velocidad de disipación de energía mecánica? ¿Cuál es el significado de su respuesta?

13. Expresar el significado físico de los términos $\rho v_0^2/r$ y $\rho v_0 v_r/r$ de la ecuación de movimiento en coordenadas cilíndricas.

14. Las Ecs. 3.6-7 y 3.6-9, ¿resultan necesariamente de las definiciones de los fluidos de la ley de la potencia y de los plásticos de Bingham que se han dado en el Capítulo 1? Explíquese.

15. ¿Cómo pueden utilizarse las ecuaciones obtenidas en § 3.4 para resolver problemas de flujo viscoso.

16. ¿Cómo puede obtenerse la ecuación diferencial básica de hidrostática a partir de la Ec. 3.2-8?

17. Utilizar el resultado de la cuestión 16, para obtener la distribución de densidad en una columna isotérmica de un gas ideal.

18. Demostrar que las superficies de dos líquidos inmiscibles, contenidos en un vaso que gira con velocidad angular Constante. adquieren formas parabólicas.

19. ¿Cómo se simplificarían las expresiones de las Ecs. 3.2-17, 18 y 19 para ρ y μ constantes?

20. ¿Qué información se obtiene al escribir las ecuaciones de continuidad y movimiento en forma adimensional?

21. Expresar las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite para el sistema de flujo de § 2.6.

22. Discutir algunas consecuencias de la fuerza de Coriolis en meteorología.

23. ¿Es válida la Ec. 3.5-27 si $z < z_0$?

24. Demostrar que la Ec. 3.5-37 puede obtenerse muy fácilmente modificando la expresión del perfil de velocidad para el flujo entre dos laminas paralelas, la superior de las cuales se mueve con velocidad uniforme, mientras que la inferior está en reposo.

25. Demostrar que la solución correspondiente a la Ec. 3.5-36 satisface la Ec. 3.5 −28c, pero en cambio no satisface la ecuación que se obtiene para v_ϕ eliminando *p entre las* Ecs. 3.5 −28*a* y 6. Discútase.

PROBLEMAS

3.A_1 Par necesario para hacer girar un cojinete de fricción

Calcular el par, expresado en kgm, y la potencia en caballos, que se necesitan para hacer girar el eje en el cojinete de fricción que se indica en la Fig. 3.A. La longitud de la superficie de fricción con el eje es de 5,08 cm, el eje gira a 200 rpm, la viscosidad del lubrificante es de 200 cp, y la densidad 0,80 g cm'3.

Respuesta: 0,044kgm
0,012 hp

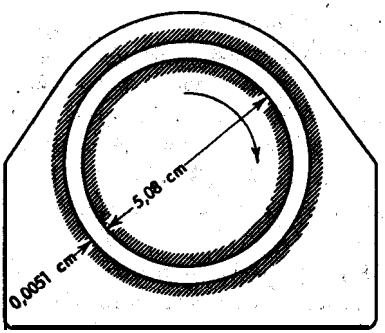


Fig. 3.A. Cojinete de fricción

3.B_1 Viscosímetro de plato y ceno

Un viscosímetro de plato y cono, análogo al de la Fig. 3.5-4, cuyo radio *R* del-cono es 10 cm y el ángulo de apertura θ_0 0,5°, se utiliza para medir la viscosidad de soluciones newtonianas. ¿Qué par, en dinas-cm, será necesario para girar el cono con una velocidad angular de 10 rad/min, si la viscosidad del fluido es 100 cp?

Sugerencia. Utilizar la distribución límite de velocidad para θ_0 pequeño.

Respuesta: 4,0 x 10^4 dina-cm.

3.C_1 Efecto de la altitud sobre la presión del aire

En la desembocaura del río Ontonagon en la orilla sur del lago Superior (183,5 m sobre el nivel medio del mar), nuestro barómetro portátil indica una presión de 750 mm Hg. Utilizar la ecuación de movimiento para estimar la presión barométrica en la cima del Govemment Peak (617 m sobre el nivel medio de mar) en las cercanas montañas Porcupine. Supóngase que la temperatura al nivel del lago es 21° C y que disminuye, al aumentar la altura, a razón constante de 0,55° C/100 m. La aceleración de la gravedad en la orilla sur del lago Superior es 981,1 cm seg^{-2} y su variación con la altura puede despreciarse en este problema.

Respuesta: 712 mm Hg.

3.D$_2$ Determinación de la viscosidad con un viscosímetro de Couette-Hatschek o de McMichael

Se desea medir la viscosidad de soluciones de sacarosa de concentración próxima al 60 por ciento en peso, a la temperatura aproximada de 20° C, mediante un viscosímetro de Couette-Hatschek. Este aparato consta esencialmente de un cilindro interior estacionario de 4,000 cm de diámetro y 4.00 cm de longitud, rodeado por un cilindro concéntrico móvil de 4,500 cm de diámetro y 4,00 cm de longitud efectiva: El cilindro exterior se hace girar mediante la aplicación de un par conocido y la viscosidad de la solución se determina a partir de la velocidad angular que resulta. La viscosidad de la sacarosa al 60 % es de unos 57 cp y su densidad aproximadamente 1,29 g cm^{-3}.

A la vista de la experiencia anterior parece posible que los «efectos finales» pueden ser importantes, y por consiguiente se ha decidido calibrar el viscosimetro operando con algunas soluciones de viscosidad conocida. que sea aproximadamente igual a la de las soluciones de sacarosa.

Hallar el valor conveniente del par que debe de utilizarse en el calibrado, si las medidas de par pueden efectuarse con un error de 100 dinas-cm y las de la velocidad angular con un error del 0,5 por ciento. ¿Cuál será la velocidad angular que resulta?

3.E$_2$ Aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes para la resolución de problemas sencillos

Utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes para densidad constante, con el fin de obtener las ecuaciones diferenciales de la distribución de velocidad: (a) para el flujo de una película isotérmica, igual que en § 2.2, (*b*) para el flujo de dos fases en una rendija horizontal, como en §2.5, y (*c*) para el flujo axial en tubos concéntricos con un elemento móvil, *como* en el problema 2.J.

3.F$_2$ Distribución de velocidad en un viscosímetro de Stormer

Un viscosímetro de Stormer consta esencialmente de dos cilindros concéntricos, el interior de los cuales gira, mientras que el èxterior permanece estacionario. La viscosidad se determina midiendo la velocidad de rotación del cilindro interior por efecto de la aplicación de un par conocido. Es muy parecido al viscosímetro de Couette-Hatschelc descrito en §3.5.

Deducir una expresión para la distribución de velocidad en este tipo de aparatos, en función del par aplicado, para el flujo laminar de un fluido newtoniano. Despréciense los efectos finales.

Respuesta: $\frac{v_\theta}{r} = \frac{\mathscr{T}}{4\pi\mu L}\left(\frac{r}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)$

3.G$_2$ Esfuerzos cortantes en función del movimiento y las propiedades del fluido

Demostrar cómo se puede obtener, a partir del componente x de la ecuación de movimiento en función de los componentes de τ (Ec. 3.2−9), la ecuación análoga en función de μ (Ec. *D* de la Tabla 3.4-2 para un fluido incompresible). Obsérvese que para un fluido incompresible$(\nabla \cdot v) = 0$, de acuerdo con la ecuación de continuidad, que debe de utilizarse (a) para simplificar la expresión de τ_{xx} de la Tabla 3.4-5,

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$$

y (*b*) para simplificar el conjunto de derivadas segundas que se obtienen al diferenciar los términos de τ:

$$-\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \mu \nabla^2 v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot v)$$

3.H$_2$ Distribución de velocidad entre dos cilindros que giran

Determinar $v_\theta(r)$ entre dos cilindros coaxiales de radios, R y κR que giran con velocidades angulares Ω_0 y Ω_1, respectivamente. Supóngase que el espacio comprendido entre dos cilindros esta ocupado, por un fluido isotérmico incompresible que se mueve con flujo laminar.

Respuesta: $$v_\theta = \frac{1}{R^2(1-\kappa^2)}\left(r(\Omega_0 R^2 - \Omega_i \kappa^2 R^2) - \frac{\kappa^2 R^4}{r}(\Omega_0 - \Omega_i)\right)$$

3.I$_2$ Otra forma de la ecuación de movimiento

Demostrar que las dos formas de la ecuación de movimiento, expresadas para un elemento estacionario de volumen y otro 'que se mueve con el movimiento del fluido, Ecs. 3.2−8 y 3.2− 10, respectivamente, son equivalente&

3 . 5 2 La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

.a. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas mediante un balance de materia aplicado a *un* elemento *estacionario* de volumen $r\Delta r\Delta\theta\Delta z$.

b. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, a partir de la forma rectangular, mediante cambio de variables. En esta deducción pueden admitirse sin demostración las siguientea relaciones :

$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta \operatorname{sen}\theta$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$\theta = \arctan(y/x)$	$v_y = v_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta\cos\theta$
$z = z$	$z = z$	$v_z = v_z$

c. Demostrar la validez de las expresiones obtenidas en (*b*) para v_x y v_y en función de v, y v_θ.

3.K$_2$ Flujo radial entre dos discos paralelos

Una parte de un sistema de lubricación consta de dos discos circulares entre los que fluye radialmente un lubricante. El flujo se debe a una diferencia de presión existente entre los radios interno y externo r_1 y r_2. El sistema está representado en la Fig. 3.6-1.

a. Escribir las ecuaciones de continuidad y movimiento para el sistema de flujo, suponiendo que el flujo es newtoniano, incompresible, laminar y estacionario. Considérese solamente la región $r_1 < r < r_2$, y supóngase que el flujo esta dirigido radialmente, de forma que. $v_\theta = v_z = 0$.

b. Demostrar que la ecuación de continuidad permite simplificar la ecuación de movimiento para obtener

$$-\rho\frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{dp}{dr} + \frac{\mu}{r}\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad \text{(3.K-1)}$$

en la que $\phi = rv$, es una función exclusiva de z. ¿Por qué ϕ ea independiente de r?

c. ge puede demostrar que la Ec. 3.K−1 no tiene solución, a no ser que se desprecie el término no lineal (es decir, el término que contiene ϕ^2); para la demostración, véase el problema 3.Y. La omisión del término ϕ^2 corresponde a la suposición de «Rujo reptante» que se ha hecho al deducir la ley de Stokes en § 2.6 para el flujo alrededor de una esfera. Demostrar que cuando se descarta el término no lineal, la ecuación de movimiento puede integrarse para obtener:

$$0 = \Delta p + \left(\mu \ln\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{d^2\phi}{dz^2} \qquad \text{(3.K -2)}$$

d. Demostrar que la Ec. 3.K–2 conduce al siguiente perfil de velocidad

$$v_r(r,z) = \frac{b^2\Delta p}{2\mu r \ln \frac{r_2}{r_1}}\left[1 - \left(\frac{z}{b}\right)^2\right] \qquad (3.K\text{–}3)$$

e. Demostrar finalmente, que la velocidad volumétrica de flujo Q (en $m^3\,seg^{-1}$) a través de la rendija, viene dada por

$$Q = \frac{4\pi b^3\Delta p}{3\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (3.K\text{–}4)$$

f. Construir esquemas adecuados para representar la distribución de presión $p(r)$ y la distribución de velocidad $v_r(r, z)$.

3.L$_2$ Simetría del tensor τ

Considerar un elemento rectangular de volumen en el interior de un fluido tal como se indica en la Fig. 3.L, y observar que los cuatro esfuerzos cortantes perpendiculares al eje z forman dos parejas opuestas. Escribir una expresión para la aceleración angular del elemento de volumen. que resulta de la acción de estas dos parejas y demostrar, haciendo tender a cero las dimensiones del elemento, que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (3.L\text{–}1)$$

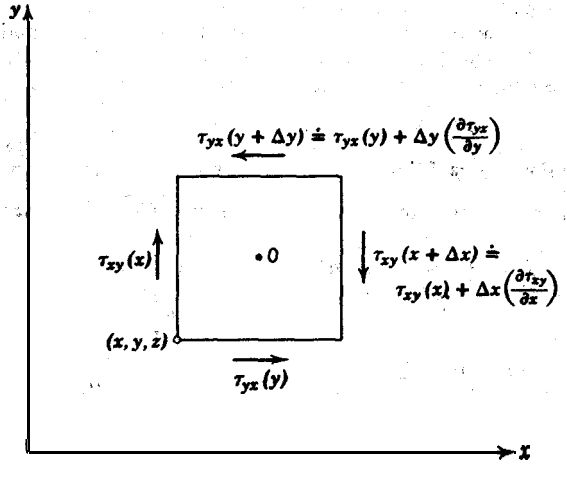


Fig. 3.L. Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ sobre el que se aplica un balance de momento. Los momentos se calculan con respecto a un eje que pasa por 0.

(Nótese que si un tensor es simétrico en un sistema coordenado rectangular, lo es también en cualquier otro sistema coordenado ortogonal.)

3.M$_2$ Arrastre de aire durante el vaciado de un tanque

Se desea construir un tanque de almacenamiento de melazas de 18 m de diámetro, provisto de una tubería de desagüe de 43 m de diámetro, situada a 1.2 m de la pared lateral del tanque

y cuya longitud por encima del fondo del tanque es de 0,3 m (véase Fig. 3.M). Se sabe por experiencia qúe al extraer las melazas del tanque se forma un vórtice y que al disminuir el nivel del liquido, el vórtice alcanza finalmente la tubería de salida, dando lugar a la succión de aire por las melazas, lo que debe evitarse.

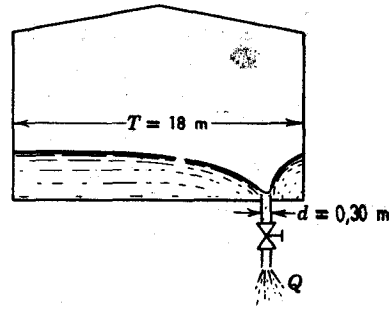


Fig. 3.M. Vaciado de un tanque de melazas.

Se desea predecir el nivel minimo de liquido para el que se evita este arrastre de aire, operando con una velocidad de vaciado de 3 m^3/min, mediante el estudio de un modelo a escala reducida. Por conveniencia se utiliza agua a 20°C para el estudio del modelo.

Determinar las dimensiones y las condiciones de operación del modelo, sabiendo que la densidad de las melazas es 1,286 g cm-3 y su viscosidad 56,7 cp. Puede admitirse que, tanto en el tanque real como en el modelo, la forma del vórtice depende exclusivamente de la cantidad de líquido existente en el tanque y de la velocidad de vaciado, es decir, que el vórtice se establece 61 solo muy rápidamente.

3.N_3 Análisis dimensional para fluidos que siguen la ley de la potencia

Las ecuaciones de movimiento son útiles para el análisis dimensional del comportamiento de fluidos no-newtonianos.

Demostrar que, para el caso especifico del fluido de Ostwald-de Waele (Ec. 3.6−9), los grupos adimensionales que se obtienen al expresar las ecuaciones de movimiento en forma adimensional, son

$$\left[\frac{D^n V^{2-n}\rho}{m}\right] = \mathrm{Re}_n; \qquad \left[\frac{V^2}{gD}\right] = \mathrm{Fr}; \qquad [n] \tag{3.N-1,2,3}$$

N.B. Aunque el análisis anterior es realmente correcto, es preciso tener en cuenta que el modelo de Ostwald-de Waele del comportamiento no-newtoniano es empírico, y que los fluidos reales no lo siguen exactamente.

3.O_3 *Flujo radial entre* esferas concéntricas

Considerar un fluido isotérmico incompresible que fluye radialmente entre dos envolturas esféricas de un material poroso. (Véase Fig. 3.0). Supóngase flujo laminar estacionario y despréciense los efectos finales.

Obsérvese que aquí no se supone que la velocidad sea cero en las superficies del dlido.

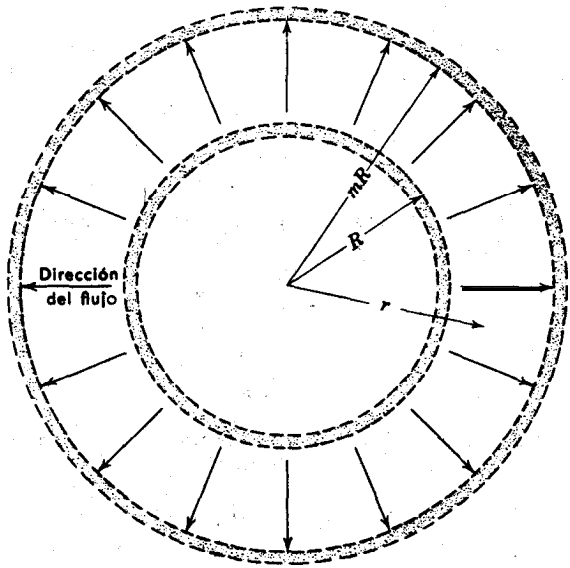


Fig. 3.0. Flujo radial entre esferas concéntricas porosas.

a. Demostrar, utilizando la ecuación de continuidad, que

$$r^2 v_r = \psi \tag{3.0-1}$$

siendo ψ una constante.

b. Demostrar, utilizando las ecuaciones de movimiento, que la distribución de presión en este sistema está descrita por las ecuaciones

$$\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} = \rho g_\phi \tag{3.0-2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho g_\theta \tag{3.0-3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left[\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2}\right] - \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho g_r \tag{3.0-4}$$

c. Teniendo en cuenta la nota al pie de página de la Tabla 3.4-4, demostrar que la distribución de presión radial puede expresarse en función de la magnitud $\mathscr{P}$, de la siguiente forma:

$$\mathscr{P} - \mathscr{P}_R = \tfrac{1}{2}\rho v_r^2\big|_{r=R}\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \tag{3.0-5}$$

d. Escribir las expresiones de $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{\phi\phi}, \tau_{r\theta}, \tau_{r\phi}$ y $\tau_{\theta\phi}$, para este sistema. De los esfuerzos normales ¿cuáles son de compresión y cuáles de tensión? ¿Cuál es el significado físico de su respuesta?

e. Los esfuerzos de compresión y de tensión, ejercidos por el fluido sobre las envolturas interior y exterior, ¿son iguales a $p|_R$ y $p|_{mR}$, respectivamente? ¿Por qué?

3.P$_3$ Flujo radial entre cilindros coaxiales

Considerar un fluido **isotérmico,** incompresible, que fluye radialmente entre dos envolturas cilíndricas porosas. Supóngase flujo laminar estacionario y **despréciense** los efectos **finales.**

a. Demostrar, mediante la ecuación de continuidad, que

$$rv_r = \phi \tag{3.P–1}$$

siendo ϕ una constante.

b. Simplificar las ecuaciones de movimiento con el fin de obtener las siguientes expresiones para la distribución de **presión** en **función** de $\mathcal{P}$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dr} = -\rho v_r \frac{dv_r}{dr} \tag{3.P–2}$$

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\theta} = \frac{d\mathcal{P}}{dz} = 0 \tag{3.P–3}$$

c. Integrar la **expresión** correspondiente **a** $\frac{d\mathcal{P}}{dr}$ **del** apartado *(b)* con el fin de obtener

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_R = \tfrac{1}{2}\rho v_r^2\big|_{r=R}\left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right] \tag{3.P-4}$$

3.Q$_3$ Flujo reptante entre dos esferas concéntricas

Un fluido muy viscoso fluye en el espacio conprendido entre dos esferas **concéntricas,** tal como se indica en la **Fig. 3.Q.** Se desea hallar la velocidad de flujo en elsistema en **función** de la diferencia de **presión** que se le comunica. **Despréciense** los **efectos** finales y **supóngase** que $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$ y $v_r = v_\phi = 0$.

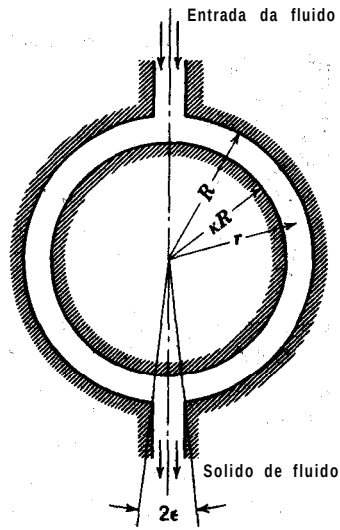


Fig. 3.Q. Flujo reptante entre dos esferas **concéntricas** estacionarias

a. Demostrar, utilizando la ecuación de continuidad, que $v_\theta \operatorname{sen}\theta = u(r)$, siendo $u(r)$ una función de r que ha de determinarse.

b. Escribir el componente θ de la ecuación de movimiento para este sistema, suponiendo velocidades de flujo suficientemente bajas, de forma que pueda despreciarse todo el primer miembro de la ecuación. Demostrar que esta ecuación queda reducida- a

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)\right] \tag{3.Q-1}$$

c. Separar la relación anterior en las dos ecuaciones siguientes

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dp}{d\theta} = B \tag{3.Q-2}$$

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = B \tag{3.Q-3}$$

siendo *B* una constante de separación.

d. Demostrar que

$$\Delta p = B \ln\left(\frac{1-\cos\epsilon}{1+\cos\epsilon}\right) = -BE(e) \tag{3.Q-4}$$

$$u = \frac{R\,\Delta p}{2\mu E(\epsilon)}\left[\left(1-\frac{r}{R}\right) + \kappa\left(1-\frac{R}{r}\right)\right] \tag{3.Q-5}$$

siendo *Ap* la diferencia de presión comunicada.

c. Utilizar el resultado anterior para demostrar que la velocidad volumétrica de flujo es

$$Q = \frac{\pi R^3 \Delta p}{6\mu E(\epsilon)}(1-\kappa)^3 \tag{3.Q-6}$$

3.R_3 Componentes del esfuerzo en función del movimiento y propiedades del fluido en sistemas no-newtonianos

a. Justificar la Ec. 2.343, partiendo de la Ec. 3.6-7.

b. Partiendo de la Ec. 3.6-9, obtener la expresión de $\tau_{r\theta}$ correspondiente a la Ec. 3.6-18, para un fluido que sigue la ley de la potencia.

c. Utilizar el resultado del apartado (6) con el fin de obtener, para un fluido que sigue la ley de la potencia, una ecuación análoga a la de Reiner-Riwlin.

3.S_4 Deducción de h ecuación de movimiento por aplicación del teorema de h divergencia

Considerar un elemento volumétrico estacionario G, de volumen V_G y superficie S_G finitos. Escribir la segunda ley del movimiento de Newton para todo el elemento, expresada en la forma de la Ec. 3.2— 1. Como las condiciones en el elemento no pueden considerarse uniformes, será preciso integrar sobre el volumen del ekmento la velocidad de ganancia de cantidad de movimiento y las fuerzas que actúan sobre el volumen del mismo y sobre la superficie la densidad de flujo convcctivo y las fuerzas que actúan sobre la superficie. Convertir después las integrales de superficie en integrales de volumen, mediante el teorema de la divergencia y demostrar que la expresión que resulta puede transformarse en la Ec. 3.2-8.

3.T$_4$ Distribución de velocidad en el viscosímetro de plato y cono por simplificación de la ecuación de movimiento[1]

Deducir la expresión de v_ϕ (r, θ) correspondiente a la Ec. 3.5-36, siguiendo este otro método:

a. Demostrar que la Ec. *F* de la Tabla 3.4-4 conduce a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right)-\frac{v_\phi}{\operatorname{sen}^2\theta}=0 \qquad (3.T\text{–}1)$$

con estas condiciones límite:

$$\text{para } \theta=\frac{\pi}{2}, \quad v_\phi=0 \qquad (3.T-2)$$

$$\text{para } \theta=\theta_1 \quad v_\phi=r\,\Omega\operatorname{sen}\theta_1 \qquad (3.T-3)$$

$$\text{para r} = 0, \quad v_\phi=0 \qquad (3.T-4)$$

b. Admítase una solución de la forma v_ϕ = J?(r) . $\Theta(\theta)$ y demostrar que la ecuación de movimiento puede separarse en dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\beta R \qquad (3.T\text{–}5)$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]=\Theta\left(\frac{1}{1-x^2}-\beta\right) \qquad (3.T\text{–}6)$$

En estas ecuaciones β es una constante de separación y $x = \cos\theta$.

c. Resolver las Ecs. **3.T−5** y **3.T−6** para obtener la distribución de velocidad que se desea. Obsérvese, (i) que la Ec. **3.T−5** es una forma de la ecuación lineal de Cauchy e (ii) que la Ec. 3. T-6 es una forma de la ecuación de Legendre, que da lugar a una función asociada de Legendre de primer orden y grado n, en 'la que n es la raíz positiva de $n(n+1) = \beta$.

3.U$_4$ Otras formas de la ecuación de movimiento

a. Demostrar que para un fluido compresible de μ constante, la ecuación de movimiento puede expresarse así

$$\rho\frac{Do}{Dt}=-\nabla p-\mu[\nabla\times[\nabla\times v]]+\tfrac{4}{3}\mu\nabla(\nabla\cdot v)+\rho g \qquad (3.U\text{–}1)$$

b. Demostrar que si el fluido es incompresible

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}-[v\times[\nabla\times v]]+\nabla\tfrac{1}{2}v^2\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2 v+\rho g \qquad (3.U\text{–}2)$$

3.V$_4$ Flujo laminar **periódico de un fluido viscoelástico en un tubo**

El modelo mas sencillo de un fluido viscoelástico incompresible es el de Maxwell,[2] que es una superposición del sólido hookeano y el liquido newtoniano:

$$\tau_{ij}+t_0\frac{D\tau_{ij}}{Dt}=-\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.V\text{–}1)$$

---

[1] Los autores agradecen a los profesores A. G. Fredrickson y J. C. Slattery este problema.

[2] L. J. F. Broer, *Appl. Sci. Research*, **A6, 226-236** (1957); véase también, J. G. Oldroyd *Proc. Roy, Soc.* **A200,** 523-541 (1950) para un tratamiento más general de los fluidos viscoelásticos.

En esta expresión $t_0 = \mu/G$ es un tiempo característico del fluido y G es el módulo de rigidez cortante. Utilizando la Ec. 3.V– 1 para los componentes de τ en las ecuaciones de variación, pueden resolverse los problemas hidrodinámicos para el fluido de Maxwell. 'En este problema se estudia un ejemplo de una solución periódica linealizada de la ecuación de movimiento. Mediante la palabra «linealizada» queremos indicar que el término $[v \cdot \nabla v]$ de la ecuación de movimiento y el término $(v \cdot \nabla T_{,,})$ de la ecuación 3.V–1 pueden despreciarse. Por «periódica» se entiende que el movimiento local del fluido es una función sinusoidal del tiempo.

Vamos a considerar ahora las oscilaciones de un fluido viscoelástico en un tubo de radio R alrededor de una posición media, cuando se comunica al sistema un gradiente oscilante de presión. Según esto, las dos ecuaciones que describen el sistema son

ecuación de movimiento linealizada

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) \tag{3.V–2}$$

modelo de Maxwell linealizado

$$\tau_{rz} + t_0 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{3.V–3}$$

En estas ecuaciones introducimos los postulados de que la densidad de flujo de cantidad de movimiento, el gradiente de presión, la velocidad local y la velocidad volumétrica de flujo, son todas periódicas en el tiempo, con una frecuencia ω; con este fin utilizamos la representación compleja de los fenómenos periódicos:

$$\tau_{rz} = \tau_0 e^{i\omega t} \tag{3.V–4}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = b_0 e^{i\omega t} \tag{3.V–5}$$

$$v_z = v_0(r) e^{i\omega t} \tag{3.V–6}$$

$$Q = Q_0 e^{i\omega t} \tag{3.V–7}$$

Al introducir las tres primeras expresiones en las Ecs. 3.V–2 y 3, se obtiene una ecuación de segundo orden para u,,(r). Demostrar que su solución (siendo $k^2 = -i\omega\rho(1 + i\omega t_0)/\mu$) es:

$$v_0(r) = \frac{b_0}{i\omega\rho}\left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}\right) \tag{3.V–8}$$

Demostrar después que la amplitud de la velocidad volumétrica de flujo ea:

$$Q_0 = \frac{\pi R^2 b_0}{i\omega\rho}\left(1 - \frac{2J_1(kR)}{kRJ_0(kR)}\right) \tag{3.V–9}$$

Desarrollar las funciones de Bessel de las dos ecuaciones anteriores y descartar los términos superiores a k^2. Demostrar que si $\omega t_0 \ll 1$, se puede eliminar k^2 entre las dos ecuaciones[1] para obtener

$$b_0 = \frac{8\mu Q_0}{\pi R^4}(1 - i\omega t_0 + i\omega\rho R^2/4\mu) \tag{3.V–10}$$

0; en forma real,

$$\frac{\Delta\rho}{L}\cos\omega t = \frac{8\mu Q_0}{\pi R^4}\left[\cos\omega t + \omega t_0\left(1 - \frac{\rho R^2}{4\mu t_0}\right)\operatorname{sen}\omega t\right] \tag{3.V–11}$$

Interpretar físicamente el resultado.

3.W$_4$ Película descendente **sobre** un cono

En **relación** con los estudios de **absorción** de gases, se ha decidido investigar diversos **dispositivos** para el contacto gas-líquido en sistemas **de geometría** sencilla. Un sistema que parece promotedor es **aquél** en el que un chorro de líquido incide sobre el **vértice** de un cono, para **descender**

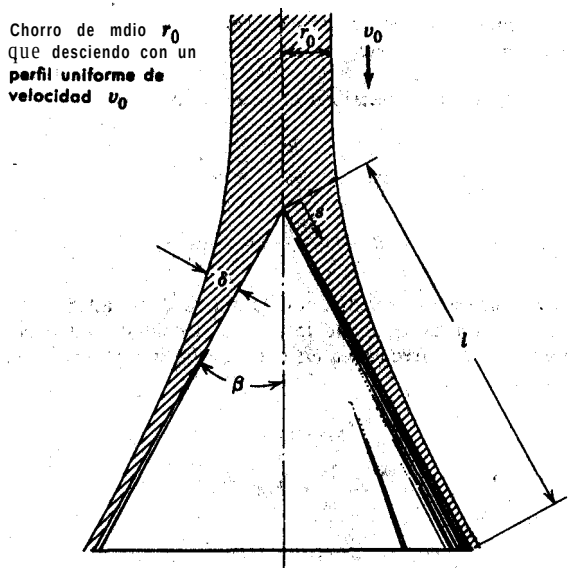


Fig. 3.W. Chorro de líquido incidiendo sobre un cono.

por **él** formando una **película** de líquido, tal como **se** indica en la Pi. **3.W.** Obtener una expresión aproximada de la **variación** del espesor de película con s, **la** distancia a lo largo de la **superficie** cónica. Relacionar cuidadosamente las **suposiciones** que se hagan en la **deducción** e indicar **las restricciones** que deben de afectar al resultado final.

Una respuesta: $\delta = \sqrt[3]{\dfrac{3\mu r_0^2 v_0}{\rho g s \operatorname{sen} 2\beta}}$

3.X$_4$ Principio **variacional** para el **flujo no-newtoniano**[3]

Considerar los siguientes casos 'de flujo de un **fluido no-newtoniano** incompresible, descritos por la **Ec.** 3.6-2, en la que η se toma como una función **exclusiva** de $I_2 = (\Delta : A)$:

a. El flujo es estacionario $(\partial v/\partial t = 0)$.

b. El' término de inercia $[v \cdot \nabla v]$ o bien es **exactamente** cero, o **prácticamente** despreciable, como en el «flujo reptante».

c. La fuerza externa g se deriva 'de un potencial Φ, (es decir, $g = -\nabla\Phi$).

d. Se sabe que la velocidad v sobre la **superficie** S del sistema de flujo de volumen V, es v_0 (x, y, z).

---

[3] R. B. BIRD, *Physics of Fluids*, *3*, 539-541 (1960).

Para estos flujos, la integral

$$B = \int_{\text{volumen del sistema de flujo con límites fijos}} F\,dx\,dy\,dz \qquad (3.X\text{-}1)$$

es un mínimo, siendo

$$F = -(p + \rho\Phi)I_1 + \tfrac{1}{2}\int_0^{I_2} \eta(I_2)\,dI_2 \qquad (3.X\text{-}2)$$

I_1 e I_2 son los invariantes primero y segundo de A. (Véanse Ecs. 3.6-3 y 4.) Es decir, que de todas las funciones $v(x, y, z)$ que se transforman en la función v_0 (x, y, z) sobre S, la verdadera distribución de velocidad será la que dé lugar a un valor mínimo de B. Utilizando al anterior principio variacional, se podría normalmente elegir una función de ensayo $v(x, y,$ z), de forma que la ecuación de continuidad se cumpla automáticamente. Como I_1 calculado a partir de la distribución de velocidad ensayada desaparece, no es necesario elegir una función de ensayo $p(x,$ y, $z)$ para la presión.

a. Demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange,[4] correspondientes al anterior principio variacional, son justamente la ecuación de continuidad y los tres componentes de la ecuación de movimiento.

b. Comprobar que este principio variacional se transforma en el principio de Helmholtz[5] para un fluido newtoniano.

3.Y$_4$ Flujo radial entre díseos paralelos

En la resolución de las ecuaciones de movimiento, generalmente se postula la forma de la solución para los perfiles de velocidad. Estos postulados se utiliin después para descartar muchos términos, de forma que finalmente se obtienen sencillas ecuaciones de partida para el problema que se considera. Dicho procedimiento es intuitivo por naturaleza y pueden presentarse ocasionalmente dificultades.

Con el fin de ilustrar este punto, considerar el flujo radial entre dos discos circulares. En la resolución de este problema (véase problema 3.K) se ha *postulado* que $v_r = v_r(r, z)$, que v_θ y v_z son ambas cero, y que $p =$ p(r). Estos postulados conducen a la Ec. 3.K−1.

Diferenciar esta ecuación con respecto a z y demostrar que esto da lugar a una incompatibilidad, excepto para el caso límite de flujo reptante. Discútase.

---

[4] Véase, por ejemplo, E. MADELUNG, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers,* Dover, Nueva York (1943), p. 216, Fc. 4.

[5] H. LAMB, *Hydrodynamics,* Dover, Nueva York (1945), pp. 617-619; para una interesante aplicación a los problemas de lubricación, véase también D. F. HAYS, *Journal of Basic Engineering,* 81, 13-23 (1959).

CAPÍTULO 4

DISTRIBUCIONES DE VELOCIDAD CON MAS DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

En el Capítulo 2 se ha visto que, mediante balances de 'cantidad de movimiento aplicados a una envoltura, se pueden resolver muy variados problemas de flujo viscoso en estado estacionario con líneas de corriente rectas. En el Capítulo 3 se han desarrollado métodos más generales que permiten describir sistemas de flujo más complicados. En § 3.5 se han presentado algunas aplicaciones de las ecuaciones generales, pero, con el fin de hacer resaltar el aspecto físico y reducir al mínimo el tratamiento matemático, dichas aplicaciones se han reducido en su mayor parte a los problemas en los que intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de ecuaciones entre derivadas parciales. En este capítulo trataremos diversas clases de aplicaciones que requieren la resolución de ecuaciones entre derivadas parciales: flujo no estacionario, flujo viscoso en más de una dirección, flujo bidimensional ideal y flujo viscoso en capas límite. El objeto de este capítulo es presentar una introducción a cada uno de estos temas, juntamente con algunas de las técnicas matemáticas utilizadas. Ninguno de estos temas se trata con detalle, ya-que todos se estudian ampliamente en 'los tratados de mecánica de fluidos.

§ 4.1 FLUJO VISCOSO NO ESTACIONARIO

El estudio de los fenómenos transitorios de todo tipo está adquiriendo importancia debido a su gran interés en los problemas de puesta en marcha y control. Las ecuaciones que se han dado en el Capítulo 3 constituyen el punto de partida para la descripción del flujo no estacionario. Aquí se presentan dos ilustraciones sobre la forma de plantear y resolver dichos problemas.[1]

En el primero de ellos se examina el flujo de una masa infinita de fluido en las inmediaciones de una pared que se pone bruscamente en movimiento. Este problema sirve para ilustrar el uso del método *de combinación de variables,* que permite reducir la ecuación deferencia1 entre derivadas parciales a una simple ecuación diferencial

[1] Pueden verse otros ejemplos en H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), capitulo ll.

ordinaria; este procedimiento solamente es posible cuando dos condiciones límites pueden reunirse en una sola. Es preciso tener en cuenta que este sistema jamás tiende a un estado estacionario límite.

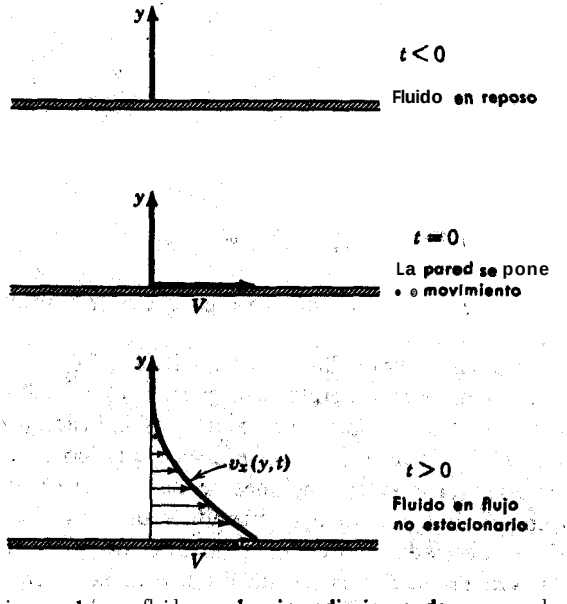


Fig. 4.1-1. Flujo viscoso de un fluido en las inmediaciones de una pared que se pone bruscamente en movimiento,

En la segunda ilustración se considera el comportamiento transitorio de un fluido viscoso en un tubo. *Este* **problema se trata por el** ***método de separación de variables,*** **que permite reducir la ecuación diferencial entre derivadas parciales a dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Este sistema alcanza un perfil limite de velocidad cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, que el sistema tiende al estado estacionario.**

Ejemplo 4.1-1. Flujo ea las proximidades de mm pared que se pone súbitamente en movimiento

Una masa semi infinita de un líquido de ρ y μ constantes está limitada por un lado, mediante una superficie plana (el plano xz). Inicialmente, tanto el fluido como la superficie sólida están en. reposo; pero en el'instante $t = 0$ la superficie solida se pone en movimiento en la dirección x positiva con una velocidad V, tal como se indica en la Fig. 4.1— 1. Se desea conocer la velocidad en función de v y t. En la dirección x no existe gradiente de presión ni fuerza de gravedad, y se supone que el flujo es laminar.

Solución. Para este sistema, $v_y =$ v, $= 0$ y $v_z = v_z(y,$ t). Por tanto, a partir de la

Ec. A de la Tabla 3.4-1 (continuidad) y la **Ec. D** de la Tabla 3.4–2 (movimiinto), se encuentra que

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{4.1-1}$$

en la que $\nu = \mu/\rho$. Las condiciones iniciales y límite son

C.I.:	para $t \leq 0$,	$v_x = 0$	para cualquier valor de, y (4.1-2)
C.L. 1:	para $y = 0$,	$v_x = V$	para cualquier valor de $t > 0$ (4.1-3)
C.L.2:	para $y = \infty$,	$v_x = 0$	para cualquier valor de. $t > 0$ (4.1-4)

Adelantamos que se puede obtener una solución de la forma $v_x/V = \phi(\eta)$, en *la* que η es una variable adimensional $y/\sqrt{4\nu t}$. En función de las nuevas variables,

$$\frac{\partial(v_x/V)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{t}\phi'; \qquad \frac{\partial^2(v_x/V)}{\partial y^2} = +\frac{\eta^2}{y^2}\phi'' \tag{4.1-5,6}$$

en la que las comillas indican diferenciación con respecto a η. Por lo tanto, la **Ec. 4.1–1** se transforma en

$$\phi'' + 2\eta\phi' = 0 \tag{4.1-7}$$

con las condiciones límite

C.L.1:	para	$\eta = 0, \phi = 1$ (4.1-8)
C.I. + C.L.2:	para	$\eta = \infty, \phi = 0$ (4.1-9)

Si se substituye ϕ' por ψ se llega a una ecuación de primer orden de variables separables, que se puede resolver para dar

$$\psi \equiv \phi' = C_1 e^{-\eta^2} \tag{4.1-10}$$

Una segunda integración conduce a

$$\phi = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + C_2 \tag{4.1-11}$$

donde arbitrariamente se ha elegido $\eta = 0$, para el límite inferior de la integral indefinida, que no puede evaluarse en forma limitada; cambiando el límite inferior $\eta = 0$ por otro distinto variarla simplemente el valor de la constante C_2, todavía no determinada hasta ahora. Aplicando las dos condiciones límite se obtiene :

$$\phi = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \tag{4.1-12}$$

La relación de estas integrales se denomina «función de error», abreviadamente erf η; es una función bien conocida y pueden encontrarse fácilmente tablas de ella.2 De. aquí que la soluci&n pueda expresarse así

$$\frac{v_x}{V} = 1 - \text{erf}\,\frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \tag{4.1-13}$$

En la Fig. 4.1-2 se indicanlos perfiles instantáneos de'velocidad; también se han hallado perfiles, análogos para algunos fluidos no newtonianos del modelo de la potencia.3

La función de error es una función monótona creciente cuyo intervalo va de 0 a 1 y alcanza un valor 0,99 cuando η es 2,0. Se puede utilizar este hecho para definir un «espesor de capa límite» 6, como la distancia y para la cual v_x ha disminuido hasta un valor 0,01 V. Es decir, que $\delta = 4\sqrt{\nu t}$. Esta distancia es una medida de lo que la cantidad de movimiento ha «penetrado» en la masa del fluido. Obsérvese que el espesor es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.

Ejemplo 4.1-2. Flujo laminar no estacionario, en un tubo circular

Un fluido de ρ y μ constantes está contenido en una tubería horizontal muy larga de longitud L y radio R. Inicialmente el fluido está en reposo. En el instante $t = 0$ se le comunica al sistema un gradiente de presión $(p_0 - p_L)/L$. Determinar como varian los perfiles de velocidad con el tiempo.

Solución. Para este problema se utilizan coordenadas cilíndricas y se supone que v, = v_θ = 0, y que $v_z = v_z(r, t)$. Por lo tanto, pueden combinarse la Ec. *B*, de la Tabla 3.4-1 (continuidad), y la Ec. *F*, de la Tabla 3.4-3 (movimiento), para dar

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{p_0 - p_L}{L} + \mu\frac{1}{r}\frac{a}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{4.1-14}$$

Las condiciones inicial y límite son

C.I.:	para $t = 0$,	$v_z = 0$	para $0 < r < R$	(4.1-15)
C.L.1:	para $r = 0$,	v_z = finito		(4.1-16)
C.L.2:	para r = R,	$v_z = 0$		(4.1-17)

Primeramente introducimos las siguientes variables adimensionales:

$$\phi = \frac{v_z}{(p_0 - p_L)R^2/4\mu L}; \qquad \xi = \frac{r}{R}; \qquad \tau = \frac{\mu t}{\rho R^2} \tag{4.1-18,19,20}$$

La velocidad se hace adimensional dividiendo por la velocidad máxima para $t = \infty$. Al multiplicar la Ec. 4.1 − 14 por $4L/(p_0 - p_L)$, se obtiene, en función de variables adimensionales, la siguiente ecuación :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = 4 + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) \tag{4.1-21}$$

---

2 Véase, por ejemplo, H. B. DWIGHT *Tables of Integrals and Othrr Mathematical Data,* Macmillan, Nueva York (1957). Tercera edición, p. 275; la diferencia 1 − erf u se expresa a veces por erfc u, la «función complementaria de error».

3 *R.* B. BIRD, *A. I. Ch. E. Journal, 5, 565* (1959).

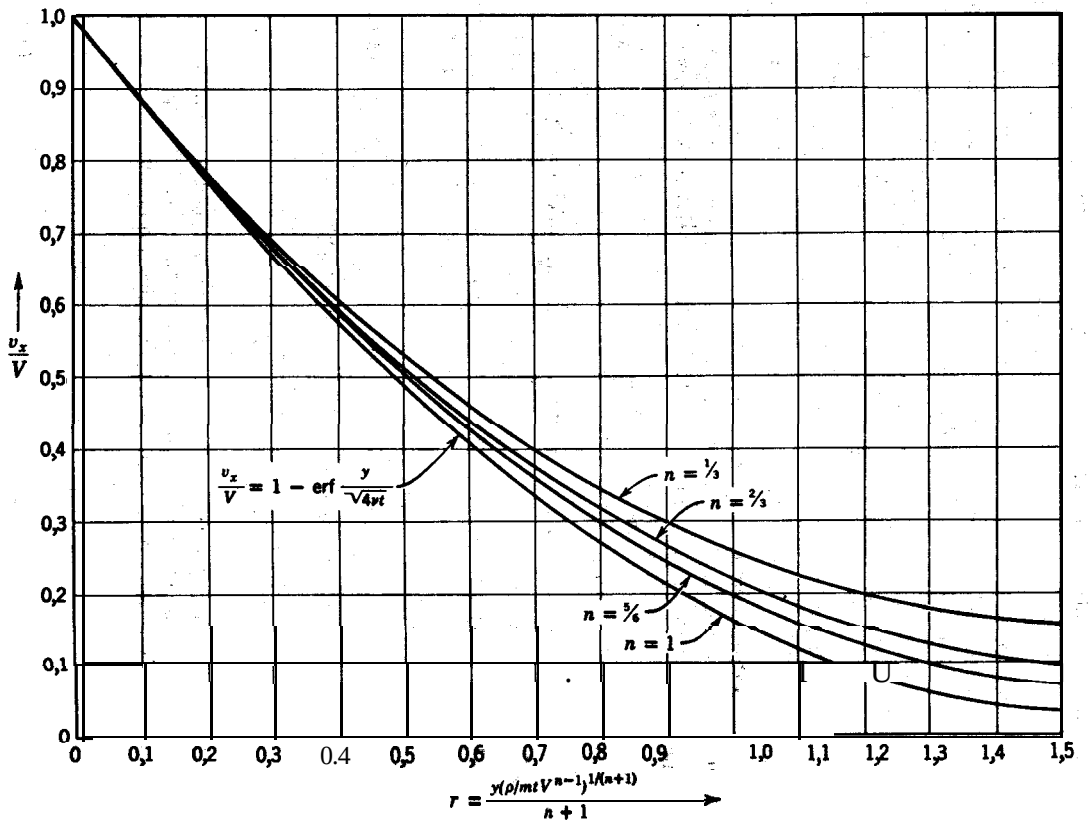


Fig. 4.1-2. **Distribución** de velocidad (en forma adimensional) para el flujo en las proximidades de una pared que se pone súbitamente en movimiento. Se han trazado las curvas para el **modelo** de la potencia con **parámetros** *m y n.* Para $n = 1$ (fiujo newtoniano) la variable r se transforma en $y/\sqrt{4\nu t}$.

Esta ecuación se resuelve con las condiciones de que $\phi = 0$ para $\tau = 0$, $\phi = 0$ para $\xi = 1$, y ϕ = finito para $\xi = 0$.

Tenemos ahora en cuenta el hecho de que el sistema alcanzara un estado estacionario para τ = co. Por lo tanto, debe de buscarse una solución a la forma siguiente:

$$\phi(\xi, \tau) = \phi_\infty(\xi) - \phi_t(\xi, \tau) \tag{4.1-22}$$

Es decir, que la solución se divide en una solución limite de estado estacionario $\phi_\infty(\xi)$, y una función transitoria $\phi_t(\xi, \tau)$. La solución correspondiente al estado estacionario se obtiene a partir de la Ec. 4.1-21, tomando $\partial\phi/\partial\tau = 0$ para $\tau = \infty$:

$$0 = 4 + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\phi_\infty}{d\xi}\right) \tag{4.1-23}$$

cuya solución, con $\phi = 0$ para $\xi = 1$, conduce a

$$\phi_\infty = 1 - \xi^2 \tag{4.1-24}$$

que es exactamente la distribución de velocidad de Poiseuille.

Substituyendo ϕ_∞ en la Ec. 4.1-22 e insertando después el resultado en la Ec. 4.1 −21, se obtiéne la siguiente ecuación diferencial entre derivadas parciales para la función ϕ_t :

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial\tau} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi \frac{\partial\phi_t}{\partial\xi}\right) \tag{4.1-25}$$

Esta ecuación debe de resolverse con las siguientes condiciones inicial y limite:

C.I.:	para $\tau = 0$	$\phi_t = \phi_\infty$	(4.1-26)
C.L.1:	para $\xi = 0$,	ϕ_t = finito	(4.1-27)
C.L.2:	para $\xi = 1$,	$\phi_t = 0$	(4.1-28)

Ensayamos ahora una solución de la forma

$$\phi_t(\xi, \tau) = \Xi(\xi)T(\tau) \tag{4.1-29}$$

Substituyendo en la Ec. 4.1 −25 y dividiendo por ΞT se obtiene

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\Xi}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi}\right) \tag{4.1-30}$$

El primer miembro es una función exclusiva de τ, mientras que el segundo es funcion sólo de ξ. De aquí que ambos puedan igualarse a una constante, que la elegimos como $-\alpha^2$. De esta forma se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dT}{d\tau} = -\alpha^2 T \tag{4.1-31}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi}\right) + \alpha^2\Xi = 0 \tag{4.1-32}$$

Estas ecuaciones tienen las siguientes soluciones:

$$T = C_0 e^{-\alpha^2\tau} \tag{4.1-33}$$

$$\Xi = C_1 J_0(\alpha\xi) + C_2 Y_0(\alpha\xi) \tag{4.1-34}$$

siendo C_0, C_1, y C_2 constantes, y J_0 e Y_0 funciones de **Bessel** de orden cero. Aplicamos ahora las condiciones inicial y límite en la forma siguiente:

C.L.1:

Puesto que ϕ_t es finito, Ξ tiene que ser también finito. Como $Y_0(\alpha\xi)$ tiende a menos infinito cuando ξ tiende a cero, C_2 ha de ser cero.

C.L.2:

Puesto que $\phi_t = 0$ para $\xi = 1$, también Ξ tiene que anularse para $\xi = 1$. Esto ocurre solamente si $J_0(\alpha)$ es cero. Pero $J_0(\alpha)$ es una función oscilante que corta al eje α para $\alpha_1 = 2{,}405$, $\alpha_2 = 5{,}520$, $\alpha_3 = 8{,}654$, etc.[4] Hay por lo tanto muchas soluciones $\Xi_n = C_{1n}J_0(\alpha_n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots \infty$, que cumplen la ecuación diferencial y las condiciones límite.

C.I.:

Sabemos que ϕ_t tiene que ser igual a ϕ_∞ para $\tau = 0$. Pero, teniendo en cuenta las consideraciones de la C.L.2, resulta que una superposición de la forma:

$$\phi_t(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n^2 \tau} J_0(\alpha_n \xi) \qquad (4.1\text{–}35)$$

cumple las condiciones límite y la ecuación diferencial entre derivadas parciales. Aplicando después la condición inicial se obtiene

$$(1 - \xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\alpha_n \xi) \qquad (4.1\text{-}36)$$

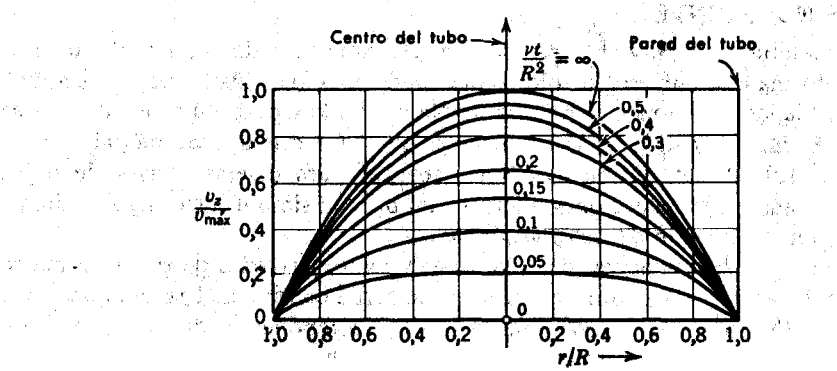


Fig. 4.1–3. Distribución de velocidad para el flujo no estacionario durante la «puesta en marcha» del flujo en un tubo circular. [P. Szymansk, *J. Math. pures appl.*, Series 9, II, 67-107 (1932).]

Para obtener B_n (que son exactamente C_0C_{1n}) se multiplican los dos miembros por $J_0(\alpha_m \xi)\, \xi\, d\xi$ y se integra de 0 a 1:

$$\int_0^1 J_0(\alpha_m\xi)(1 - \xi^2)\xi\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 J_0(\alpha_n\xi)J_0(\alpha_m\xi)\xi\, d\xi \qquad (4.1\text{-}37)$$

E. JAHNKE y F. EMDE, *Tables of Functions*, Dover, Nueva York (1945), p. 166.

Debido a las propiedades ortogonales de las funciones de Bessel, el único término del segundo miembro que contribuye es aquél para el cual m = *n*. La integral del primer miembro puede resolverse utilizando algunas relaciones standard para las funciones de Bessel.[5] Finalmente se obtiene

$$\frac{4J_1(\alpha_m)}{\alpha_m^3} = B_m \cdot \tfrac{1}{2}[J_1(\alpha_m)]^2 \tag{4.i38}$$

de donde

$$B_m = \frac{8}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)} \tag{4.1-39}$$

Por lo tanto, la expresión final para la distribución de velocidad reducida es

$$\phi = (1 - \xi^2) - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \xi)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 \tau} \tag{4.1-40}$$

En la Fig. 4.1-3 se indican los perfiles calculados a partir de ía Ec. 4.1−40; como puede observarse, la velocidad máxima (línea central) está en el intervalo del 10 por ciento del valor de estado estacionario, cuando τ es del orden de 0,45.

También han sido calculados los perfiles transitorios para el flujo 'anular axial[6] y tangencial.'

§ 4.2 FLUJO VISCOSO ESTACIONARIO CON DOS COMPONENTES DE LA VELOCIDAD QUE NO DESAPARECEN: LA FUNCIÓN DE CORRIENTE

En los Capítulos 2 y 3, y en § 4.1, se han seleccionado cuidadosamente los problemas, de forma que hubiese un solo componente de la velocidad que no se anula. La solución de las ecuaciones completas de Navier-Stokes para flujos en dos y tres direcciones es muy difícil. Lo más frecuente es que haya que aplicar métodos especiales para resolver estos problemas. Sin embargo, para diversas clases de flujos con ρ y μ constantes, las ecuaciones diferenciales pueden simplificarse algo mediante su formulación en función de una *función de corriente* ψ.

Expresamos los componentes de la velocidad como derivadas de ψ (tal como se indica en la Tabla 4.2−1), de forma que la ecuación de continuidad se cumpla automáticamente. Después pueden combinarse los dos componentes de la ecuación de movimiento que no desaparecen, para eliminar los términos que contienen los componentes de p. Este procedimiento conduce a una ecuación escalar, de cuarto orden para ψ. Con el fin de tener a mano una cómoda referencia,[1] se han resumido los

---

5 *Ibid.* pp. 145-146.

6 W. MÜLLER, *Z. Angew. Math. Mech.*, *16, 227-238* (1936).

7 R. B. BIRD y C. F. CURTISS, *Chem. Eng. Sci.*, 11, 108-113 (1959).

1 Para obtener la ecuación diferencial de ψ en coordenadas rectangulares con $v_z = 0$, se parte de los componentes x e y de la ecuación de movimiento para ρ y μ constantes. Se diferencia la ecuación x con respecto a y y la ecuación y con respecto a x y se restan, con lo que se eliminan los términos de presión y gravedad. Introduciendo $v_x = -\partial\psi/\partial y$ y $v_y = +\partial\psi/\partial x$, se obtiene directamente la ecuación diferencial de cuarto orden que se indica en la tabla.

TABLA **4.2—1**

ECUACIONES PARA LA FUNCIÓN DE **CORRIENTE**"[a]

Tipo de movimiento	Sistema coordenado	Componentes de la velocidad	Ecuaciones diferenciales de ψ que son equivalentes a la ecuación de Navier-Stokes[b]	Expresiones para Operadores
Bidimensional (plano)	Rectangular con $v_z = 0$, e independiente de z	$v_x = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ $v_y = +\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \dfrac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, y)} = \nu\nabla^4\psi$ (A)	$\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\nabla^4\psi \equiv \nabla^2(\nabla^2\psi)$ $\equiv \left(\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\psi$
	Cilíndrico con $v_z = 0$, e independiente de z	$v_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = +\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu\nabla^4\psi$ (B)	$\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
Axisimétrico	Cillndrico con $v_\theta = 0$, e independiente de θ	$v_z = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$ $v_r = +\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}(E^2\psi) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\psi, E^2\psi)}{\partial(r, z)} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}E^2\psi = \nu E^4\psi$ (C)	$E^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $E^4\psi \equiv E^2(E^2\psi)$
	Esférico con $v_\phi = 0$ e independiente de ϕ	$v_r = -\dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = +\dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$	$\dfrac{\partial}{\partial t}(E^2\psi) + \dfrac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial(\psi, E^2\psi)}{\partial(r, \theta)} - \dfrac{2E^2\psi}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right) = \nu E^4\psi$ (D)	$E^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)$

[a] Pueden encontrarse relaciones **análogas** en coordenadas generales ortogonales en S. GOLDSTEIN, *Modern Development in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1938), pp. 114-155; en esta referencia también se dan fórmulas para flujos aximétricos con un componente no nulo de la velocidad alrededor del eje..

[b] Los Jacobianos se designan aquí por $\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{vmatrix}$

casos más importantes en la Tabla 4.2-1. El significado físico de la función de corriente es que las líneas de ψ = constante, son ***líneas de corriente;*** para el flujo estacionario corresponden realmente a las curvas trazadas por las partículas del fluido.

En esta sección se estudia, como un ejemplo ilustrativo, el flujo estacionario de un fluido viscoso alrededor de una esfera. Esta solución sólo es válida para ***flujo reptante,*** en el que puede despreciarse el término de inercia $[v.\nabla v]$ de la ecuación de movimiento. Este tratamiento conduce a la ***ley de Stokes,*** que se ha estudiado brevemente en § 2.6.

Se ha elegido la discusión de este problema, debido a que es de interés general en tecnología de partículas y mecánica de gotas @minutas. El flujo ideal alrededor de una esfera se discute en el problema **4.H.** Esta solución y la que se obtiene a continuación, constituyen dos importantes casos límite, en los que se basan muchos análisis de sistemas complejos.

Ejemplo 4.2-1. «Flujo reptante» alrededor de una esfera[2]

Utilizar la Tabla 4.2 – 1 para plantear la ecuación diferencial de la función da corriente para el flujo de un fluido newtoniano alrededor de una esfera inmóvil de radio *R.* Resolver la ecuación y hallar la distribución de velocidad cuando, el fluido se acerca a la esfera en la dirección z positiva,, de igual forma que en §2.6.

Solución. Para flujo reptante estacionario,, todo el primer miembro, de la Ec. *D* de la Tabla 4.2 – 1 desaparece; por lo tanto, la ecuación de ψ para flujo axisimétrico es simplemente

$$E^4\psi = 0 \tag{4.2-1}$$

o bien, en coordenadas esféricas

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]^2 \psi = 0 \tag{4.2-2}$$

Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones límite:

C.L. 1: $$v_r = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{para } r = R \tag{4.2-3}$$

C.L. 2: $$v_\theta = +\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = R \tag{4.2-4}$$

C.L. 3: $$\psi \to -\tfrac{1}{2} v_\infty r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{para } r \to \infty \tag{4.2-5}$$

---

[2] La solución que se da aquí corresponde a la de L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics,* Macmillan, Nueva York (1955). Tercera edición, pp. 555-557. Para otro mttodo, véase H. LAMB, *Hydrodynamics,* Dover, Nueva York (1945), § 337, 338.

Las dos primeras condiciones límite describen la adherencia del fluido a la superficie de la esfera, y la tercera implica que lejos de la esfera $v_z = v_\infty$.

Esta última condición límite sugiere que $\psi(r, 0)$ es de la forma

$$\psi = f(r) \operatorname{sen}^2\theta \tag{4.2-6}$$

al substituir esta función en la Ec. 4.2-2 se llega a

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\right) f(r) = 0 \tag{4.2-7}$$

que es una ecuación lineal homogénea de cuarto orden. Una solución de tanteo de la forma f(r) = Cr^n revela que n puede tener los valores -1, 1, 2 y 4. Por tanto, la forma de la función f(r) es

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \tag{4.2-8}$$

Para que se cumpla la tercera condición límite (Ec. 4.2−5), D debe de ser cero y C ha de ser igual a $-\frac{1}{2}v_\infty$. Según esto, la función de corriente es

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{A}{r} + Br - \tfrac{1}{2}v_\infty r^2\right)\operatorname{sen}^2\theta \tag{4.2-9}$$

Los componentes de la velocidad (según la Tabla 4.2 − 1) son

$$v_r = -\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left(+v_\infty - 2\frac{A}{r^3} - 2\frac{B}{r}\right)\cos\theta \tag{4.2-10}$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \left(-v_\infty - \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r}\right)\operatorname{sen}\theta \tag{4.2-11}$$

Utilizamos ahora las dos primeras condiciones limite para obtener .A = $-\frac{1}{4}v_\infty R^3$ y $B = \frac{3}{4}v_\infty R$, de forma que

$$\frac{v_r}{v_\infty} = \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta \tag{4.2-12}$$

$$\frac{v_\theta}{v_\infty} = -\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\operatorname{sen}\theta \tag{4.2-13}$$

que son las distribuciones de velocidad que se han dado sin demostración en § 2.6.

En $2.6 se ha visto cómo pueden integrarse las distribuciones de presión y velocidad sobre la superficie de la esfera para obtener. la fuerza resistente; este método es general para obtener la fuerza del fluido que actúa sobre el sólido. Aquí evaluamos F_k integrando la velocidad de disipación de energía:[3]

$$v_\infty F_k = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty}(\tau : \nabla v) r^2\, dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \tag{4.2-14}$$

[3] El método de la Ec. 4.2-14 ha sido utilizado para el estudio del flujo no-newtoniano por J. C. SLATTERY, *tesis doctoral*, Universidad de Wisconsin (1959).

Introduciendo la función $-(\tau : \nabla v)$, en coordenadas esféricas, de la Tabla 3.4 -- 8, se obtiene

$$v_\infty F_k = 2\pi\mu \int_0^\pi \int_R^\infty \left[\begin{array}{l} 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 \\ + 2\left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)^2 \\ + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{array} \right] r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \tag{4.2-15}$$

Insertando en esta expresión las Ecs. 4.2-12 y 13, e integrando. se obtiene

$$F_k = 6\pi\mu v_\infty R \tag{4.2-16}$$

que es la ley *de Stokes.*

§ 4.3 FLUJO POTENCIAL BIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO

Generalmente puede obtenerse una buena aproximación de los tipos de flujo, resolviendo las ecuaciones de variación para «flujo potencial», es decir, suponiendo que el fluido es ideal (ρ=constante, μ=0), y que el flujo es *irrotacional* ($[\nabla \times v]=0$). Estas suposiciones son satisfactorias excepto en las proximidades de las superficies de una conducción o de objetos sumergidos. En las proximidades de dichas superficies adquieren una gran importancia los efectos viscosos, y en este caso pueden utilizarse una serie de aproximaciones que conducen a las ecuaciones de *capa límite.* En esta sección se estudia el *flujo* irrotacional ideal, y en la próxima se tratará el de capa límite. Ambos temas se complementan.

En el caso de un fluido ideal, las ecuaciones de continuidad y movimiento para el flujo estacionario son[1]

(continuidad) $$(\nabla \cdot v) = 0 \tag{4.3-1}$$

(movimiento) $$\rho\nabla\tfrac{1}{2}v^2 - \rho[v \times [\nabla \times v]] = -\nabla\mathscr{P} \tag{4.3-2}$$

siendo $-\nabla\mathscr{P} = -\nabla p + \rho g$. Para el flujo irrotacional bidimensional, el hecho de que rot. v = 0 conduce a

(irrotacibnal) $$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \tag{4.3-3}$$

y las ecuaciones de continuidad y movimiento se hacen

(continuidad) $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{4.3-4}$$

[1] Aquí se ha utilizado la identidad $[v \cdot \nabla v] = \nabla\tfrac{1}{2}v^2 - [v \times [\nabla \times v]]$.

(movimiento) $$\tfrac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) + \mathscr{P} = \text{constante} \qquad (4.3\text{-}5)$$

Estas tres ecuaciones se utilizan para determinar v_x, v_y, y $\mathscr{P}$ como funciones de x e y.

En la práctica resulta más sencillo operar con una ***función de corriente*** $\psi(x, y)$ ***y un potencial de velocidad*** $\phi(x, y)$ en vez de los componentes de la velocidad v_x y v_y. Resulta evidente que si ψ y ϕ se definen de esta forma,[2]

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial} \qquad v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial} \qquad (4.3\text{–}6,7)$$

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (4.3\text{–}8,9)$$

las Ecs. 4.3-3 y 4.3-4 se cumplirán automáticamente. A partir de la serie de relaciones que se acaban de indicar, se llega inmediatamente a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (4.3\text{–}10,11)$$

Éstas son las ecuaciones de ***Cauchy-Riemann***, que son las relaciones que deben de satisfacerse por las partes real e imaginaria de cualquier función analíticas $w(z) = \phi(x, y) + i\,\psi(x, y)$. La magnitud $w(z)$ se denomina ***potencial complejo***. Diferenciando la Ec. 4.3-10 con respecto a x y la Ec. 4.3-11 con respecto a y, y sumándolas se demuestra que $\nabla^2\phi = 0$; es decir, que ϕ satisface la ecuación bidimensional de Laplace. De igual forma puede demostrarse también que $\nabla^2\psi = 0$.

De las consideraciones anteriores se deduce que ***cualquier*** función analítica $w(z)$ da un par de funciones $\phi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ que son el potencial de velocidad y la función de corriente para ***algún*** problema de flujo. Por otra parte, las curvas $\phi(x, y) =$ constante y $\psi(x, y) =$ constante son por consiguiente las ***líneas equipotenciales*** y las ***líneas de corriente*** para el problema. Los componentes de la velocidad pueden obtenerse de las Ecs. 4.3-6 a 9, o de

$$\frac{dw}{dz} = -v_x + iv_y \qquad (4.3\text{-}12)$$

en la que dw/dz es la llamada ***velocidad compleja.*** Una vez que se conoce la velocidad, puede hallarse la presión a partir de la Ec. 4.3–5.

---

2 Para el flujo tridimensional ϕ se define por $v = -\nabla\phi$. Como el rotacional del gradiente de una función escalar es cero, tomando $v = -\nabla\phi$ se tiene la seguridad de que rot $v = 0$.

3 Aquí se supone que el lector tiene algún conocimiento de las funciones analíticas de una variable compleja. Introducciones a este tema pueden verse en V. L. STREETER, *Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Nueva York (1948), capítulo 5, y en C. R. WYLIE, *Advanced Engineering Mathematics*, MacGraw-Hill, Nueva York (1951), capítulos 9, 13 y 14.

Otro método de generar líneas equipotenciales y líneas de corriente consiste ea utilizar la función inversa $z(w) = x(\phi, \psi) + iy(\phi, \psi)$ siendo $z(w)$ **cualquier** función analítica de w. Eliminaado ψ entre las funciones $x = x(\phi, \psi)$ e $y = y(\phi, \psi)$ se llega a

$$F(x, y, \phi) = 0 \tag{4.3-13}$$

Una eliminación análoga de ϕ conduce a

$$G(x, y, \psi) = 0 \tag{4.3-14}$$

Haciendo ea la **Ec. 4.3— 13,** ϕ = una constante se obtienen las ecuaciones de las líneas equipotenciales, y ψ = una constante en la **Ec. 4.3—** 14, se obtienen las ecuaciones de las líneas de corriente para algún problema de flujo. Los componentes de la velocidad pueden obtenerse a partir de

$$-\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v^2}(v_x + iv_y) \tag{4.3-15}$$

siendo $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Todo lo expuesto hasta aquí, puede resumirse así: dada una función analítica w = w(z), o bien z = z(w), puede construirse una red de flujo con líneas de corriente $\psi(x, y)$ = constante y líneas equipotenciales ϕ (x, y) = constante. Esta red de flujo describirá ***algún*** problema de flujo ideal. El probbma inverso [dado el probbma de flujo encontrar la función analítica w(z)], es considerablemente más **difícil** y no se estudiará aquí. Solamente indicaremos que existen algunos **métodos especiales,**[3] -pero que, generalmente, se pueden obtener soluciónes más rápidas recurriendo a tablas de mapas de conformación.[4] Aquí vamos a **discutir el** flujo ideal alrededor de un' cilindro, como ejemplo de la **utilización** del potencial complejo w = w(z), y el **flujo** en un canal, como ejemplo de utilización de una función inversa z = z(w) **Deberán** tenerse en consideración unas cuantas ideas generales.

a. En cualquier punto las líneas de corriente son perpendiculares a las líneas equipotenciales.

b. Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales pueden intercambiarse para obtener la solución de otro problema de flujo.

c. Cualquier línea de corriente puede reemplazarse por una superficie sólida. (Obsérvese que esto implica que el fluido no se adhiere a las superficies sólidas.)

Ejemplo 4.3-1. Flujo alrededor de un cilindro

a. Demostrar que **el** potencial complejo

$$w(z) = v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) \tag{4.3-16}$$

[4] H. KOBER, *Dictionary of Conformal Representations,* Dover, Nueva York (1957), Segunda edición.

describe el flujo ideal alrededor de un cilindro circular de radio R, cuando la velocidad de aproximación es v_∞ (véase Fig. 4.3 — 1).

b. Hallar la distribución de velocidad

c. Hallar la distribución de presión sobre la superficie del cilindro cuando la presión en un punto alejado del cilindro es p_∞.

Solución. *a.* Para hallar la función de corriente y la velocidad potencial, escindiremos primeramente $w(z)$ en sus partes real e imaginaria:

$$w(z) = \underbrace{v_\infty x\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)}_{\text{función de potencial}} + \underbrace{i\, v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)}_{\text{función de corriente}} \tag{4.3-17}$$

la función de corriente viene dada por

$$\psi(x, y) = v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) \tag{4.3-18}$$

o, en función de variables adimensionales

$$\Psi(X, Y) = Y\left(1 - \frac{1}{X^2 + Y^2}\right) \tag{4.3–19}$$

siendo $\Psi = \psi/v_\infty R$, $X = x/R$, e $Y = y/R$.

En la figura 4.3 — 1 se presentan las curvas de Ψ = constante, representadas de acuerdo con la Ec. 4.3-19. La línea de corriente $\Psi = 0$ da un círculo unidad, que se toma para representar la superficie del cilindro. La linea de corriente $\Psi = 3/2$ pasa por el punto $X = 0$, Y = 2, etc. En el problema 4.C se sugiere un mttodo sencillo de representación de las líneas de corriente.

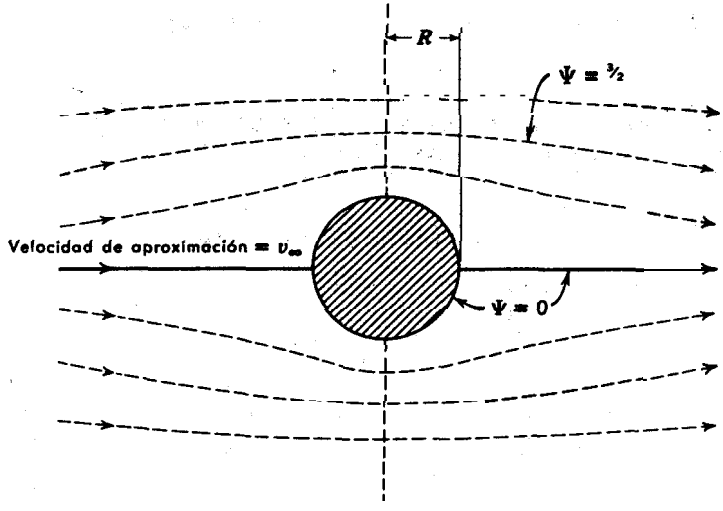


Fig. 4.3-1. Líneas de corriente para el flujo ideal alrededor de un cilindro, según la Ec. 4.3-19.

b. Los componentes de la velocidad se obtienen a partir de la función de corriente mediante las ecuaciones 4.3-6 y 7. También pueden obtenerse a partir de la velocidad compleja de acuerdo con la Ec. 4.3 – 12:

$$\frac{dw}{dz} = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)$$

$$= v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}e^{-2i\theta}\right)$$

$$= v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}(\cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta)\right) \tag{4.3-20}$$

Por lo tanto

$$-v_x = v_\infty\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \tag{4.3-21}$$

$$+v_y = v_\infty\left(\frac{R^2}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta\right) \tag{4.3-22}$$

c. En la superficie del cilindro, $r = R$, y

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$= v_\infty^2[(1 - \cos 2\theta)^2 + (\operatorname{sen} 2\theta)^2]$$

$$= 4v_\infty^2 \operatorname{sen}^2\theta \tag{4.3-23}$$

Cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ la velocidad v se hace. igual a cero; a estos puntos se les llama ***puntos de estancamiento.*** Por consiguiente, a partir de la Ec. 4.3-5,

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \mathscr{P} = \tfrac{1}{2}\rho v_\infty^2 + \mathscr{P}_\infty \tag{4.3-24}$$

La distribución de presión sobre el cilindro se obtiene a partir de las Ecs. 4.3-23 y 24:

$$(\mathscr{P} - \mathscr{P}_\infty) = \tfrac{1}{2}\rho v_\infty^2(1 - 4 \operatorname{sin}^2\theta) \tag{4.3-25}$$

Obsérvese que la distribución de Bes simétrica con respecto al eje y; por lo tanto, la teoría del fluido ideal predice que no hay resistencia de forma sobre un cilindro (paradoja de D'Alembert[5]).

Ejemplo 4.3-2. Flujo en un canal rectangular

Demostrar que la función inversa

$$z = \frac{w}{v_\infty} + \frac{b}{\pi}e^{\pi w/bv_\infty} \tag{4.3-26}$$

describe el flujo en un canal rectangular de semianchura b. La variable v_∞ es el valor de la velocidad en un punto alejado aguas abajo de la entrada al canal.

---

[5] Para una discusión de las paradojas hidrodinámicas, véase G. BIRKHOFF. *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1955).

Solución. Introduciremos primeramente las variables adimensionales. de distancia

$$X = \frac{\pi x}{b}; \qquad Y = \frac{\pi y}{b}; \qquad Z = \frac{\pi z}{b} = X + i\,Y \tag{4.3-27}$$

y los números adimensionales

$$\Phi = \frac{\pi\phi}{bv_\infty}; \qquad \Psi = \frac{\pi\psi}{bv_\infty}; \qquad W = \frac{\pi w}{bv_\infty} = \Phi + i\Psi \tag{4.3-28}$$

Estos números adimensionales son análogos a los utilizados en el ejemplo 4.3 - 1. La función de la Ec. 4.3-26, expresada en función de los números adimensionales, puede separarse en las partes real e imaginaria:

$$Z = W + e^W = (0 + e^\Phi \cos \Psi) + i(\Psi + e^\Phi \operatorname{sen} \Psi) \tag{4.3-29}$$

Por lo tanto

$$X = \Phi + e^\Phi \cos \Psi \tag{4.3-30}$$

$$Y = \Psi + e^\Phi \operatorname{sen} \Psi \tag{4.231}$$

Podemos hacer ahora Ψ igual a una constante, y la línea de corriente Y = I'(X) está expresada paramétricamente en Φ. Por ejemplo, la línea de corriente $\Psi = 0$ viene dada por

$$X = \Phi + e^\Phi \tag{4.3-32}$$

$$Y = 0 \tag{4.3-33}$$

Al variar 0 desde- ∞ a + OO, X varia tambitn desde- ∞ a + ∞; por consiguiente, el eje X es una linea de corriente. Consideremos a continuación $\Psi = \pi$, en cuyo caso

$$X = \Phi - e^\Phi \tag{4.3-34}$$

$$Y = \pi \tag{4.3-35}$$

Al variar 0 desde ∞ a - ∞, X va desde - ∞ a - 1 y después vuelve a - ∞; es decir, que la línea de corriente se vuelve hacia atrás sobre sí misma. Elegimos esta línea de corriente como una de las paredes sólidas del canal rectangular. De igual forma, la línea de corriente Ψ = - n corresponde a la otra pared. Las líneas de corriente Ψ = c, siendo $-\pi < c < +\pi$, dan lugar al tipo de flujo que se indica en la Fig. 4.3-2 y que corresponde al flujo en un canal rectangular.

A partir de la Fc. 4.3 -29 puede hallarse la derivada $-dz/dw$:

$$-\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{v_\infty}\frac{dZ}{dW} = -\frac{1}{v_\infty}(1 + e^W) = -\frac{1}{v_\infty}(1 + e^\Phi \cos \Psi + ie^\Phi \operatorname{sen} \Psi) \tag{4.3-36}$$

Al comparar esta expresión con la Ec. 4.3 - 1 5 se obtienen las expresiones para los componentes de la velocidad:

$$\frac{v_x v_\infty}{v^2} = -(1 + e^{\Phi} \cos \Psi) \tag{4.3-37}$$

$$\frac{v_y v_\infty}{v^2} = -(e^{\Phi} \operatorname{sen} \Psi) \tag{4.338}$$

Estas ecuaciones han de utilizarse conjuntamente con las Ecs. 4.3 -30 y 3 1 para obtener los componentes de la velocidad como una función de la posición.

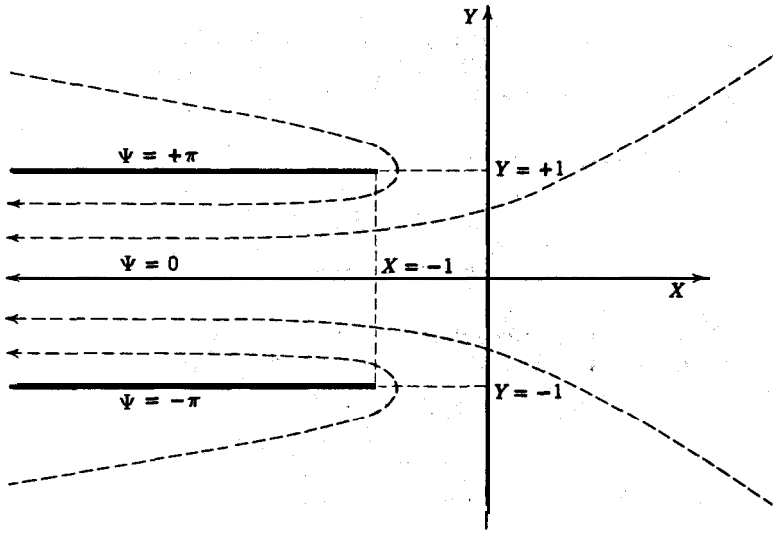


Fig. 4.3-2. Flujo en un canal rectangular.

Para ilustrar el procedimiento, vamos a hallar la velocidad en el punto x = 0, y = 0. Al hacer X e Y iguales a cero en las Ecs. 4.3 -30 y 3 1, se encuentra que Ψ = 0 y Φ = −0,57. Al introducir estos valores en la Ec. 4.3 -38 se obtiene v_y = 0. La inserción de estos mismos valores en la Ec. 4.3-37 da

$$\frac{v_x v_\infty}{v^2} = -(1 + e^{\Phi})$$

$$= -(1 + 0{,}57) \tag{4.3-39}$$

pero como v_y = 0, tenemos que v = v_x, de forma que

$$\frac{v_x}{v_\infty} = -\left(\frac{1}{1{,}57}\right) = -0{,}64 \tag{4.340}$$

§ 4.4 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

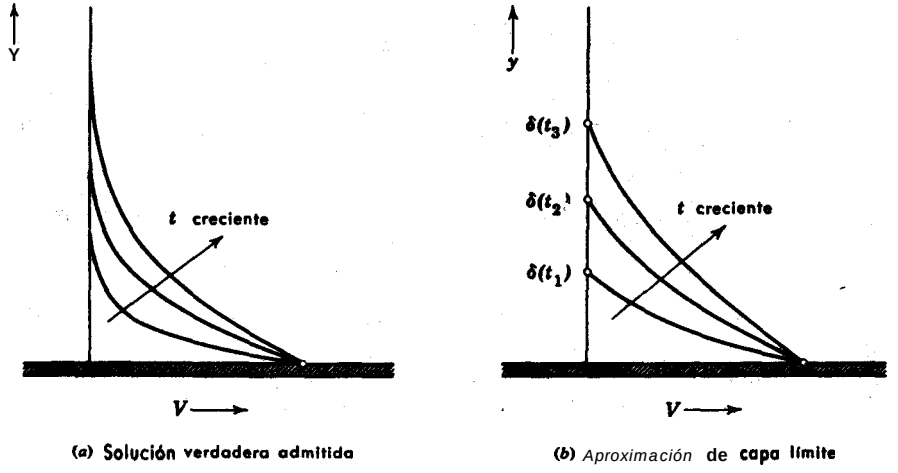
Los ejemplos de flujo bidimensional ideal que se han presentado en §4.3 indican como puede representarse la red de flujo mediante una función de corriente y una función de potencial. Las soluciones obtenidas para la distribución de velocidad no cumplen la condición hidrodinámica límite de que el fluido se adhiere a las superficies sólidas del sistema. ($v_x = v_y = 0$ par . todas, las superficies sólidas fijas). Por lo tanto, las soluciones para el fluido ideal n son válidas para describir los fenómenos de transporte en la inmediata proximidad de la pared. Concretamente, no puede calcularse la resistencia viscosa, ni se pueden obtener descripciones exactas de los procesos de transferencia de calor y materia en, la interfase.

Para obtener información acerca del comportamiento en la proximidad de la pared recurrimos a los métodos de *capa límite*. Para la descripción del flujo viscoso, se pueden obtener soluciones aproximadas de los perfiles de velocidad en una delgada capa límite próxima a la pared, teniendo en cuenta la viscosidad. Después se «engarza» esta solución en la del flujo ideal que describe el flujo exterior a la capa límite.

Vamos a comenzar exponiendo dos ejemplos muy sencillos del flujo en la capa límite, en vez de intentar presentar una introducción formal al tema. El primer ejemplo considera el desarrollo de la capa límite como una función del tiempo [con un espesor de capa límite $\delta = 8\ (t)$], y el segundo trata del desarrollo de la capa límite como una función de la posición para el flujo estacionario [con un espesor de capa límite $\delta = \delta(x)$].

Ejem. **4.4—1. Flujo** en las proximidades **de una pared que se pone bruscamente en movimiento**

Resolver el ejemplo 4.1 — 1 mediante el siguiente procedimiento aproximado. Intuiti-



(a) Solución verdadera admitida (b) *Aproximación* de capa límite

Fig. 4.4-1. Comparación de los perfiles «verdadero» y aproximado de velocidad en régimen no estacionario, en las proximidades de una pared que se pone súbitamente en movimiento con una velocidad V.

vamente se. prevé que la verdadera solución de este problema será algo semejante a las curvas representadas en la Fig. 4.4-la, pero supondremos que la solución puede representarse satisfactoriamente mediante el gráfico de la Fig. 4.4−1*b*. Es decir, suponemos que en cualquier instante t, hay un espesor $\delta(t)$ de capa limite, más allá del cual no existe flujo, de forma que los efectos de la viscosidad se reducen a la región $0 < y < \delta(t)$. Se admite, finalmente, que los perfiles de velocidad adimensional son semejantes a lo largo del tiempo; esta idea se expresa analíticamente de la siguiente forma:

$$\frac{v_x}{V} = \phi(\eta) \qquad \text{siendo} \qquad \eta = \frac{y}{\delta(t)} \qquad (4.4-1)$$

en la que $\phi(\eta)$ es una función «conveniente» que se elige.

Solución. El problema de flujo esta descrito por 'la ecuación diferencial entre derivadas parciales de la Ec. 4.1 − 1. Las derivadas parciales que aparecen en ella se evalúan utilizando los supuestos perfiles «semejantes» de la Ec. 4.4 − 1:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = V\phi'\left(-\frac{\eta}{\delta}\right)\frac{d\delta}{dt} \qquad (4.4\text{-}2)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = V\phi''\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \qquad (4.4\text{-}3)$$

donde las comillas indican diferenciación con respecto a η. Substituyendo las expresiones en la Ec. 4.1-1 e integrando después sobre η, se obtiene

$$M\delta\frac{d\delta}{dt} = \nu N \qquad (4.4\text{-}4)$$

siendo

$$M = \left(-\int_0^1 \phi'\eta\, d\eta\right) = +\int_0^1 \phi\, d\eta \qquad (4.4\text{-}5)$$

$$N = \left(+\int_0^1 \phi''d\eta\right) = \phi'\Big|_0^1 \qquad (4.49$$

Integrando la Ec. 4.4-4 con respecto al tiempo (utilizando la condición inicial de que $\delta = 0$ cuando $t = 0$) se obtiene

$$\delta(t) = \sqrt{2(N/M)\nu t} \qquad (4.4\text{-}7)$$

Se encuentra, por tanto, que el espesor de la capa límite aumenta con la raíz cuadrada del tiempo transcurrido desde que la pared se pone en movimiento.

Hasta aqul se ha deducido la expresión de $\delta(t)$ en términos de una función cualquiera $\phi(\eta)$. Vamos a elegir ahora una función específica $\phi(\eta)$ que describe razonablemente la forma de los perfiles de velocidad que se indican en la Fig. 4.4 −1*b*. Es evidente que $\phi = 1$ para $\eta = 0$, y $\phi = 0$ para $\eta = 1$. Esto indica que $\phi = 1 - \eta^2$ puede ser una elección adecuada. Otra elección es

$$\phi(\eta) = 1 - \tfrac{3}{2}\eta + \tfrac{1}{2}\eta^3 \qquad 0 < \eta < 1 \tag{4.4-8}$$

para la que además $\phi'(1) = 0$. El lector no debe dudar en sugerír todavía otras funciones que presenten formas adecuadas para describir los perfiles de velocidad. Para el perfil correspondiente 'a la Fc. 4.4-8, las integrales de las Ecs. 4.4-5 y 4.4-6 adquieren los valores $M = 3/8$ y $N = 3/2$. Por lo tanto, el espesor de la capa límite es

$$\delta(t) = 2\sqrt{2\nu t} \tag{4.4-9}$$

y la distribución de velocidad

$$\frac{v_x}{V} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}\right)^3; \qquad 0 < y < \delta(t) \tag{4.4-10a}$$

$$\frac{v_x}{V} = 0; \qquad y > \delta(t) \tag{4.4-10b}$$

Este resultado se compara con la solución exacta correspondiente a la Ec. 4.1-13, cuyo desarrollo en serie es

$$\frac{v_x}{V} = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2^3}{\pi}}\left(\frac{y}{2\sqrt{2\nu t}}\right)^3 - \cdots \tag{4.4-11}$$

Por tanto, el uso 'de la función $\phi(\eta)$, elegida en la Ec. 4.4 -8, ha conducido a los tres primeros términos de la solución exacta, y modificado las constantes para obtener la «mejor» elección de acuerdo con las restricciones inherentes al procedimiento aproximado.

Ejemplo 4.4-2. Flujo en las inmediaciones del borde de ataque de una lámina plana

Obtener una descripción del modelo de flujo incompresible en las inmediaciones del borde de ataque de una lámina plana sumergida en una corriente de fluido, tal como se indica en la Fig. 4.4-2. Utilizar un procedimiento análogo al que se ha desarrollado en el ejemplo 4.4 - 1.

Solución. En primer lugar debemos de plantear las ecuaciones diferenciales que describen el campo de flujo. Estas ecuaciones son las bidimensionales correspondientes a la ecuación de continuidad en estado estacionario y el componente x de la ecuación de movimiento:

(continuidad)
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{4.4-12}$$

(movimiento)
$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{4.4-13}$$

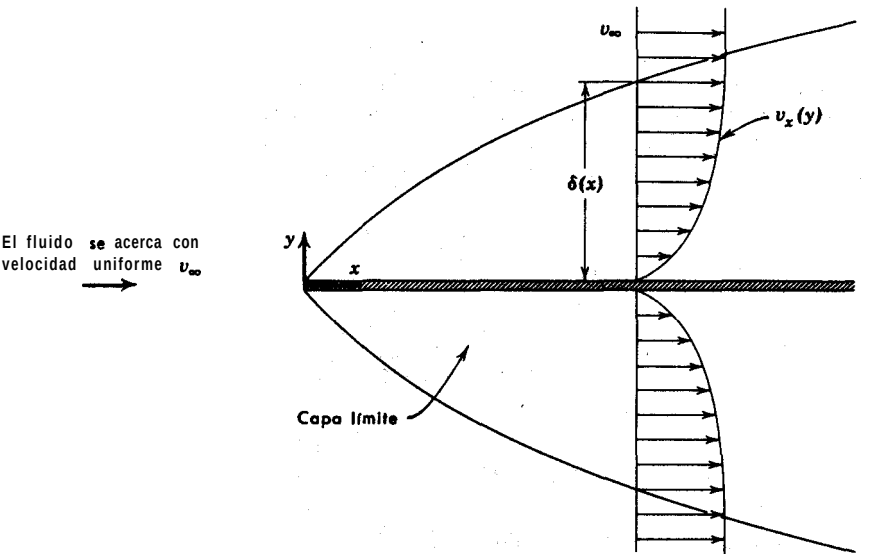


Fig. 4.4-2. Desarrollo de la capa limite en las proximidades de una lámina plana de espesor despreciable.

No se considera el componente y de la ecuación de movimiento puesto que el flujo en esta dirección es pequeño. El término $\partial^2 v_x / \partial x^2$ de la Fig. 4.4 — 13 puede despreciarse debido a que será pequeño' en comparación con $v_x(\delta v_x/\partial x)$. Hallando después v_y mediante la resolución de la Ec. 4.4 — 12 (con la condición límite de que $v_y = 0$ para $y = 0$), y substituyendo el resultado en la Ec. 4.4-13, se llega a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{4.4-14}$$

Ésta es nuestra ecuación de partida para determinar $v_x(x,y)$, que evidentemente es no lineal. Se resuelve con las condiciones límite de que $v_x = 0$ para $y = 0$, $v_x = v_\infty$ para $y = \infty$, y $v_x = v_\infty$ para x = 0 cualquiera que sea el valor de y.

De ig ual forma que en el ejemplo 4.4-1, se supone que los perfiles de velocidad tienen la misma forma para distintos valores de x:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \phi(\eta) \qquad \text{siendo} \qquad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \tag{4.4-15}$$

en la que $\delta(x)$ es el espesor de la capa límite a una distancia x a lo largo de la lamina.

---

1 Para un razonamiento detallado sobre la forma de determinar los términos que pueden despreciarse, véase por ejemplo, H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, MacGraw-Hill, Nueva York (1955), capitulo 7.

Suponemos,. finalmente, que fuera de la capa límite (para $y > \delta$) $v_x = v_\infty$. A continuación se calculan las derivadas de la Ec. 4.4 – 14:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = v_\infty \phi' \left(-\frac{\eta}{\delta}\right) \frac{d\delta}{dx} \tag{4.4-16}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty \phi' \frac{1}{\delta} \tag{4.4-17}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_\infty \phi'' \frac{1}{\delta^2} \tag{4.4-18}$$

en las que las comillas indican diferenciación con respecto a η.

Al substituir estas expresiones en la Ec. 4.4-14 e integrar la ecuación con respecto a η, se llega a

$$(B - A)\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{v_\infty} C \tag{4.4-19}$$

siendo

$$A = \left(\int_0^1 \phi\phi' \eta \, d\eta\right) \tag{4.4-20}$$

$$B = \left[\int_0^1 \phi' \left(\int_0^{\bar{\eta}} \phi' \eta \, d\eta\right) d\bar{\eta}\right]$$

$$= -A + \left(\int_0^1 \phi' \eta \, d\eta\right) \tag{4.4-21}$$

$$C = \left(\int_0^1 \phi'' \, d\eta\right)$$

$$= \phi'\Big|_0^1 \tag{4.4-22}$$

Integrando la Ec. 4.4-19, se obtiene

$$\delta(x) = \sqrt{2\left(\frac{C}{B - A}\right)\nu x / v_\infty} \tag{4.4-23}$$

para cuya solución se ha utilizado la condición límite de que $\delta = 0$ para x = 0. Se encuentra, por tanto, que el espesor de la capa límite es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia a lo largo de lámina.

Elegimos ahora como perfil razonable de velocidad

$$\phi(\eta) = \tfrac{3}{2}\eta - \tfrac{1}{2}\eta^3 \tag{4.4-24}$$

debido a que corresponde aproximadamente a la forma correcta. Para esta elección, se encuentra que A = 9/35, B = 33/280, y C = – 3/2. Por consiguiente. el espesor de la capa límite es

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}}\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} = 4{,}64\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \qquad (4.4\text{-}25)$$

y la distribución de velocidad

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{4{,}64\sqrt{\nu x/v_\infty}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{4{,}64\sqrt{\nu x/v_\infty}}\right)^3; \qquad 0 < y < \delta(x) \qquad (4.4\text{-}26)$$

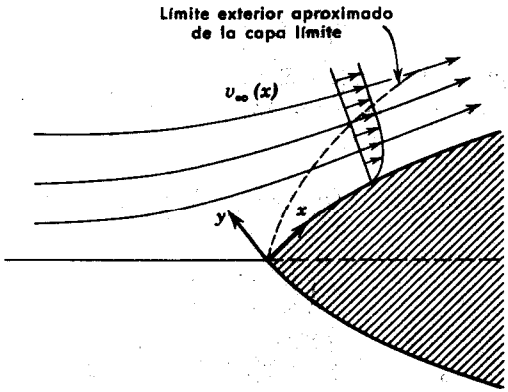


Fig. 4.4-3. Sistema coordenado para el flujo bidimensional alrededor de un objeto sumergido.

A partir de este resultado se puede obtener la fuerza resistente, integrando sobre las dos superficies mojadas la densidad de flujo de cantidad de movimiento:

$$F_x = 2\int_0^W \int_0^L \left(+\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Big|_{y=0} dx\, dz$$
$$= 1{,}292\sqrt{\rho\mu L W^2 v_\infty^3} \qquad (4.4\text{-}27)$$

Se ha obtenido una solución numérica exacta de la Ec. 4.4-14, y a partir de ella se ha calculado* también la fuerza resistente. El resultado es de la misma forma que la Ec. 4.4 -27, pero la constante es 1,328. Esta comparación da una idea del comportamiento cuantitativo del método aproximado de la capa límite utilizado aquí.

Los ejemplos precedentes representan los tipos más sencillos de los problemas de capa límite. Para el flujo bidimensional incompresible en estado estacionario alrededor de un objeto más complicad0 que una lámina plana (véase Fig. 4.4—3), se utiliza la siguiente generalización de la Ec. 4.4-14:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy\right)\frac{\partial v_x}{\partial y} = v_\infty\frac{dv_\infty}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (4.4\text{-}28)$$

2 La solución numérica fue obtenida por H. BLASIUS, *Z. Math. Phys.*, **56**, 1-37 (1908). o bien, *NACA Tech. Memo. No.* 1256; véase también H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Pergamon Press, Londres (1955), § 7 f.

en la que $v_\infty(x)$ describe la variación de la «velocidad de corriente libre» con x, para el borde exterior de la capa límite. Esta velocidad de flujo externo se halla mediante la teoría de flujo potencial expuesta en § 4.3. La Ec. 4.4-28 es válida para superficies que no tienen demasiada curvatura; x es la coordenada a lo largo de la superficie, e y es la coordenada perpendicular a dicha superficie.

La Ec. 4.4-28 puede integrarse con respecto a y, teniendo en cuenta el hecho de que v_x tiende a v,(x) para valores grandes de y. El resultado es

$$-\frac{1}{\rho}\tau_{yx}\Big|_{y=0} = \frac{d}{dx}(\delta_2 v_\infty^2) + \delta_1 v_\infty \frac{dv_\infty}{dx} \qquad (4.4\text{–}29)$$

estando el *espesor de desplazamiento* δ_1 y el *espesor de cantidad de movimiento* δ_2 definidos por

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy \qquad (4.4\text{–}30)$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) dy \qquad (4.4\text{-}31)$$

Las Ecs. 4.4-28 y 29 constituyen la base de la resolución de numerosos problemas de flujo bidimensional incompresible de capa límite en régimen estacionario. Existen ecuaciones análogas para flujo estacionario, fluidos compresibles y capas límite tridimensionales.3 *La* Ec. *4.4-28 es* la *ecuación de Prandtl de la capa límite.* Esta ecuación se ha resuelto numéricamente pára unos cuantos problemas;[3,4] dichas soluciones se consideran como las soluciones «exactas» de los problemas de capa límite.5 Las soluciones «aproximadas» son las que se obtienen suponiendo perfiles análogos para v_x/v_∞ en las Ecs. 4.4-29, 30 y 31, en función de un espesor de capa límite mucho mayor, tal como se ha hecho en los ejemplos ilustrativos. La Ec. 4.4-29 se denomina generalmente *balance de von Kármán de cantidad de movimiento de la capa límite.*

A pesar de que se han obtenido numerosas soluciones exactas y aproximadas de capa límite, todavía queda bastante trabajo que realizar por lo que respecta a la aplicación de los métodos a sistemas que tienen interts en ingeniería. Por ejemplo, el flujo en el costado posterior de los objetos sumergidos no está sujeto al cálculo de capa límite, ya que en esta región ocurre «flujo de retroceso» y las ecuaciones de Prandtl de la capa límite no son válidas.

---

[3] H. SCHLICHTING, *op. cit.*

[4] S. I. PAI, *Viscous Flow Theory*, Van Nostrand. Princeton (1957).

[5] Para una discusión de las soluciones exactas para la transferencia simultánea de cantidad de movimiento, materia y energia, véase § 19.3.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Se pueden obtener las ecuaciones de flujo «estacionario» a partir de las de flujo «no estacionario» haciendo $\partial/\partial t = 0$ o $D/Dt = O$?

2. Comprobar que la Ec. 4.1-1 es dimensionalmente correcta.

3. ¿Cómo se evalúa la integral del denominador de la Ec. 4.1-12?

4. ¿Qué ocurre si se intenta resolver la Ec. 4.1-21 por el método de separación de variables, sin admitir antes que la solución puede expresarse como la suma de una solución de estado estacionario y otra de no estacionario?

5. Sobre un gráfico cuidadosamente rotulado, exponer el significado de $J_1(\alpha_n)$ que aparece en la Ec. 4.1-40.

6. Comprobar que la C.L.3 de la Ec. 4.2-5 se ha expresado correctamente.

7. ¿Es irrotacional el flujo newtoniano parabólico en un tubo circular? ¿Y el flujo reptante alrededor de una esfera?

8. Demostrar que para el flujo bidimensional ideal, la función de corriente cumple la ecuación de Laplace, $\nabla^4\psi = 0$. Compárese con la transmisión del calor, donde $\nabla^2 T = 0$.

9. ¿Cuál es el significado de la «paradoja de D'Alembert»?

10. Sugerir algunas otras funciones satisfactorias para la función $\phi(\eta)$ de la Ec. 4.4-8.

11. Sugerir algunos problemas de flujo viscoso en los que es de esperar que no sean aplicables los métodos de capa límite.

12. Comprobar la Ec. 4.4-21.

13. Demostrar cómo se obtiene el balance de cantidad de movimiento de von Kármán (Ec. 4.4-29) a partir de la ecuación de capa límite de Prandtl (Ec. 4.4-28).

PROBLEMAS

4.A_1 Tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario en el flujo ea un tubo

a. Un aceite pesado, cuya viscosidad es $3{,}45 \times 10^{-4}$ m^2 seg^{-1}, está en reposo en un gran tubo vertical de 0,70 cm de radio. Por efecto de la gravedad, el fluido comienza, súbitamente, a verter desde el fondo del tubo. ¿Qué tiempo se necesita para que la velocidad en el centro del tubo difiera en un 10 por ciento de su valor final?

b. ¿Cuál sería el resultado si se utilizase agua a 20° C?

Respuesta: a. $6{,}4 \times 10^{-2}$ seg.
b. 22 seg.

4.B_1 Velocidades en las proximidades de una esfera en movimiento

Una esfera de radio R desciende con flujo reptante a través de un fluido estacionario de viscosidad μ, con una velocidad límite v_∞. ¿A qué distancia horizontal de la esfera, en un plano perpendicular a la dirección de caída, será la velocidad del fluido 0,01 veces la velocidad límite de la esfera ?

Respuesta: A unos 37 diámetros de la esfera aproximadamente.

4.C_1 Construcción de líneas de corriente en el flujo ideal alrededor de un cilindro

Representar las lineas de corriente para el flujo alrededor de un cilindro, utilízando la información del ejemplo 4.3-1 y siguiendo este procedimiento:

a. Seleccionar un valor de Ψ = C (es decir, escoger una línea de corriente).

b. Representar $Y = C + K$ (líneas paralelas al eje X) e $Y = K(X^2 + Y^2)$ (círculos tangentes en el origen de coordenadas y cuyo radio es $1/2K$).

c. Hallar gráficamente las intersecciones de las lineas y los círculos que poseen los mismos valores de K.

d. Unir estos puntos para obtener la linea de corriente correspondiente a Ψ = C.

e. Elegir otro valor de C y repetir el procedimiento anterior para generar una nueva linea de corriente.

4.D_1 Comparación del resultado exacto con el de capa hite para el flujo en las inmediaciones de una pared que se pone súbitamente en movimiento

Comparar los valores de v_x/V, obtenidos a partir de la Ec. 4.1-13, con los de la Ec. 4.4−10, para los siguientes valores de $y/\sqrt{4\nu t}$: (a) 0,2, (6) 0,5, (c) l,O. Expresar el resultado como tanto por ciento de error de la velocidad local.

Respuesta: *a* + 1.5 por ciento
b + 2,5 por ciento
c − 26 por ciento

4.E_2 Flujo pseudoplástico no estacionario en las inmediaciones de una pared en movimiento

Ampliar el ejemplo 4.4-1 para describir el flujo no estacionario de un fluido pseudoplástico en las proximidades de una superficie plana que se pone bruscamente en movimiento. Utilizar el modelo de Ostwald-de Waele (ley de la potencia) de la Ec. 1.2-3 para describir el fluido. Demostrar que el espesor de la capa limite es

$$\delta(t) = \left[\frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{m(n+1)V^{n-1}}{\rho}\, t^{n+1}\right]^{1/(n+1)} \qquad \text{(4.E-1)}$$

cuando se utiliza en este caso el mismo perfil $\phi(\eta)$ que en el ejemplo 4.4−1.

4.F_2 Utilización del balance de cantidad de movimiento de von Kármán

Utilizar la Ec. 4.4-29, con el perfil de velocidad de la Ec. 4.4-24, con el fin de obtener (*a*) el espesor de la capa límite correspondiente a la Ec. 4.4-25 y (*b*), la fuerza resistente que actúa sobre la lámina plana, correspondiente a la Ec. 4.4-27.

4.G_2 Flujo ideal en las proximidades de un punto de estancamiento

a. Demostrar que el potencial complejo $\text{IV} = -v_0 z^2$ puede describir el flujo en las proximidades de un punto de estancamiento. (Véase Fig. 4.G.)

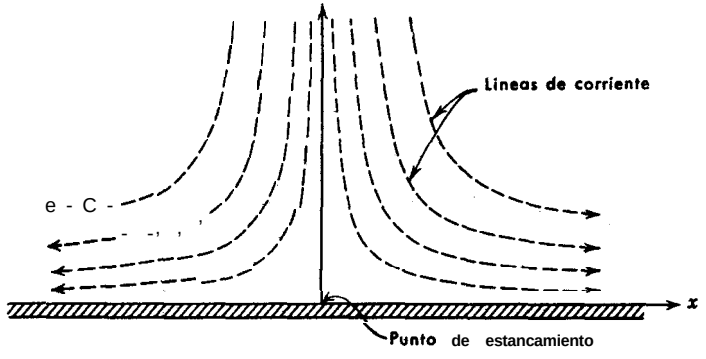


Fig. 4.G. Flujo ideal en las proximidades de un punto de estancamiento (flujo bidimensional).

b. ¿Cuáles son los componentes de la velocidad $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$?
c. ¿Cuál es el significado físico de v,?

4.H$_2$ Flujo ideal alrededor de una esfera

Para el flujo potencial estacionario alrededor de una esfera, con una velocidad de aproximación v_∞ (véase Fig. 2.6–1), la función de corriente y el potencial de velocidad son

$$\psi = +\frac{v_\infty R^2}{2r}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{v_\infty r^2}{2}\operatorname{sen}^2\theta \tag{4.H-1}$$

$$\phi = -\frac{v_\infty R^2}{2r^2}\cos\theta - v_\infty r\cos\theta \tag{4.H-2}$$

La función de corriente está relacionada con los componentes de la velocidad en la forma que se indica en la Tabla 4.2-1, mientras que el potencial de velocidad se relaciona con dichos componentes mediante $\boldsymbol{v} = -\nabla\phi$, que para el caso de coordenadas esféricas,

$$v_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{4.H-3}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{4.H-4}$$

a. Demostrar que, lejos de la esfera, las Ecs. 4.H–1,2 dan $v_s = v_\infty$. (*Observación:* $v_s = v_r \cos\theta - v_\theta \operatorname{sen}\theta$.)
b. Demostrar que la velocidad en un punto cualquiera de la superficie esférica es $v_\theta = -\frac{3}{2}v_\theta \operatorname{sen}\theta$.
c. Demostrar que la distribución de presión sobre la superficie esférica es $p - p_\infty = (\rho v_\infty^2/2)(1 - \frac{9}{4}\operatorname{sen}^2\theta)$.

4.I$_2$ Flujo en un vórtice[1]

a. Demostrar que el potencial complejo

$$w = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{4.I-1}$$

describe el flujo en un vórtice. Demostrar que la velocidad tangencial viene dada por

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{4.1-2}$$

y que $v_r = 0$. Este tipo de flujo se denomina a *veces vdrtice libre.*
b. Comparar la variación de v_θ con r, correspondiente a la Fc. 4.1-2, con la función $v_\theta(r)$ que interviene en el ejemplo 3.5-2. Este tipo de flujo se denomina a *veces vdrtice forzudo.*
Los vórtices reales, tales como los que se forman en tanques agitados, se comportan de una forma intermedia entre estas dos idealizaciones.

---

[1] Vórtices en tanques agitados han sido estudiados experimentalmente por S. NAGATA, N. YOSHIOKA y T. TOKOYAMA, *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Kyoto University, vol. XVII, número III, julio 1955.

4.J$_3$ Ecuaciones básicas para el flujo a través de medios porosos[2,3,4]

Para el flujo de un fluido a través de un medio poroso, las ecuaciones de continuidad y movimiento pueden substituirse por

ecuación de continuidad modificada
$$\epsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho v_0) \tag{4.J–1}$$

ley de D'Arcy:[5]
$$v_0 = -\frac{\kappa}{\mu}(\nabla p - \rho g) \tag{4.J–2}$$

en la que ϵ *es* la ***porosidad*** (es decir, la relación entre el volumen de huecos y el volumen total) y κ *es* la ***permeabilidad*** del medio poroso. La velocidad v_0 que interviene en estas ecuaciones es la ***velocidad superficial*** (velocidad volumétrica de flujo a través de la unidad de área de la sección del solido más el fluido) promediada en una pequeña región de espacio (pequeña con respecto a las dimensiones macroscópicas del sistema de flujo pero grande con respecto al tamaño del poro). Las magnitudes ρ y p son valores medios en una región de flujo que es grande con respecto al tamaño del poro. Combinando las Ecs. 4.J–1 y 2, e introduciendo el símbolo $\mathscr{P}$ (definido por $\nabla \mathscr{P} = \nabla p - \rho g$), se llega a

$$\left(\frac{\epsilon \mu}{\kappa}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\nabla \cdot [\rho \nabla \mathscr{P}]) \tag{4.J–3}$$

para viscosidad μ y permeabilidad κ constantes. La Ec. 4.J–3 y la ecuación de estado describen el movimiento de un fluido en un medio poroso. En la mayoría de los casos, la ***ecuación de estado*** puede expresarse así

$$\rho = \rho_0 p^m \exp \beta p \tag{4. J-4}$$

en la que ρ_0 es la densidad del fluido a la presión unidad, y

Para líquidos	$m = 0$
Caso 1: incompresibles	$\beta = 0$
Caso 2: compresibles	$\beta \neq 0$
Para gases	$\beta = 0$
Caso 3: expansión isotérmica	m = 1
Caso 4: expansión adiabática	$m = 1/\gamma = C_v/C_p$

Demostrar que, combinando las Ec. 4.J–3 y 4.J–4 y haciendo simplificaciones para estos cuatro casos, se puede obtener

---

2 M. MUSKAT, *Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media,* McGraw-Hill (1937).

3 A. HOUPEURT, *Éléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux,* Institut Francais du Pétrole, París (1957). Desgraciadamente este libro contiene numerosos errores tipográficos.

4 P. C. CARMAN, *Flow of Gases Through Porous Media,* Butterworths, Londres (1956).

5 H. C. BRINKMAN, *Appl. Sci. Research,* Al, 27-34, 81-86 (1947), ha sugerido la siguiente modificación empírica de la ley de D'Arcy:

$$0 = -\nabla p - \frac{\mu}{\kappa} v_0 + \mu \nabla^2 v_0 + \rho g \tag{4.J–2a}$$

El término $\mu \nabla^2 v_0$ se introduce para tener en cuenta la distorsión de los perfiles de velocidad en las proximidades de las paredes.

Caso 1: $$\mathbf{VW} = \mathbf{0} \text{ o bien } \nabla^2 p = 0 \qquad (4.J-5)$$

Caso 2: $$\frac{\epsilon\mu\beta}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2\rho - (\nabla \cdot \rho^2\beta g) \qquad (4.J-6)$$

caso 3: $$\frac{2\epsilon\mu\rho_0}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2\rho^2 \qquad (4.J-7)$$

caso 4: $$\frac{(m+1)\epsilon\mu\rho_0^{1/m}}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2\rho^{(1+m)/m} \qquad (4.J-8)$$

Como los términos de gravedad para gases, Casos 3 y 4, son pequeños con respecto a los términos de presión, se acostumbra despreciarlos. Obdrvese que el Caso 1 conduce a la *ecuación de Laplace,* el Caso 2, sin tener en cuenta tal término de gravedad, a la *ecuación de conducción del calor o ecuación de difusión,* y los Casos 3 y 4 dan ecuaciones no lineales.

4.K$_3$ Flujo radial a través de un medio poroso

Un fluido circula a través de una envoltura cilíndrica porosa cuyos radios interno y externo son r_1 y r_2. Las presiones en dichas superficies valen p_1 y p_2, respectivamente. La longitud de la envoltura cilíndrica es h.

a. Hallar la distribución de presión, la velocidad de flujo radial y la velocidad volumétrica de flujo, para el caso de un fluido incompresible.

b. Repítase el calculo para el caso de un líquido compresible y un gas ideal.

Respuesta: a. $$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}$$

$$v_{0r} = -\frac{\kappa}{\mu r}\frac{p_2 - p_1}{\ln p_2/p_1}$$

$$Q = \frac{2\pi\kappa h(p_2 - p_1)}{\mu \ln (r_2/r_1)}$$

b. $$Q = \frac{2\pi\kappa h(\rho_2 - \rho_1)}{\beta\mu \ln (r_2/r_1)}$$

$$Q = \frac{\pi\kappa h\rho_0(p_2^2 - p_1^2)}{\mu \ln (r_2/r_1)}$$

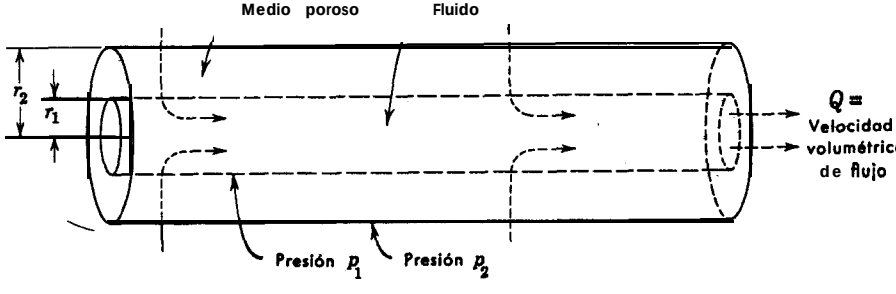


Fig. 4.K. Flujo radial a través de un medio poroso

4.L$_4$ Flujo no estacionario en un anillo

a. Tomando el ejemplo 4.1-2 como guía, deducir la ecuación análoga para el flujo *axial no* estacionario en un anillo coaxial. Comparar los resultados con la solución publicada.[6]

b. Obtener una solución para el flujo *tangencial* no estacionario en un anillo coaxial, cuando el fluido está en reposo para $t < 0$, y el cilindro exterior gira con velocidad angular Ω dando lugar a flujo laminar para $t > 0$. Comparar los resultados con los de la bibliografía.[7]

4.M$_4$ Flujo a través de un medio poroso en un tubo

a. Un tubo de radio R está lleno de un material poroso de permeabilidad uniforme κ. Utilizar la Ec. 4.J−2*a* para hallar la distribución de velocidad en el medio poroso, teniendo en cuenta que la velocidad en la superficie del tubo es cero.

b. Expresar la velocidad volumétrica de flujo, mediante la velocidad de flujo dada por la ley de D'Arcy multiplicada por un factor de corrección para tener en cuenta los «efectos de pared».

c. Demostrar que el resultado del apartado *(b)* se transforma en la ley de Hagen-Poiseuille cuando κ tiende a ∞.

d. Buscar valores típicos de μ y κ y determinar si el factor de corrección del apartado *(b) es* o no normalmente importante en los cálculos industriales.

e. El factor de corrección del apartado *(b), ¿será* mayor o menor que la corrección que se necesita para tener en cuenta la no distribución al azar del relleno en las proximidades de la pared del tubo?

Respuesta: b. $$Q = \pi R^2 \left(\frac{\Delta p}{L}\frac{\kappa}{\mu}\right)\left(1 - 2\frac{\sqrt{\kappa}}{R}\frac{I_1(R/\sqrt{\kappa})}{I_0(R/\sqrt{\kappa})}\right)$$

4.N$_4$ La ecuación de Bernoulli para flujo no viscoso

Partiendo de la Ec. 3.U−2, demostrar que para *el* flujo *no viscoso, irrotacional, estacionario,* cuya fuerza externa deriva de un potencial $(\mathbf{g} = -\nabla\Phi)$, la ecuación de movimiento puede integrarse entre dos puntos cualesquiera «1» y «2» de un campo de flujo, para obtener

$$\tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + (\Phi_2 - \Phi_1) = 0 \qquad \text{(4.N-1)}$$

Ésta es la *ecuación de Bernoulli.*

También se puede demostrars que se llega a la misma expresión cuando la ecuación de movimiento para flujo *estacionario* no *viscoso* (pero no necesariamente irrotacional) se integra entre dos puntos «1» y «2» situados sobre la misma línea de corriente.

La generalización de la ecuación de Bernoulli para fluidos viscosos se trata 'en § 3.3.

---

6 W. MÜLLER, *Z. angew. Math. Mech.*, **16, 227-228 (1936).**

7 R. B. BIRD y C. F. CURTISS, *Chem. Eng. Sci.*, 11, 108-113 (1959).

8 H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York (1945), pp. 20-21.

CAPITULO 5

DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD EN FLUJO TURBULENTO

En los capítulos anteriores se han estudiado solamente problemas de flujo laminar. Como se ha visto, las ecuaciones diferenciales que describen el flujo laminar son conocidas y el único factor que limita la aplicación de las ecuaciones de variación es la complejidad matemática que se encuentra en los sistemas de flujo laminar en los que intervienen varios componentes de la velocidad que no desaparecen.

En este capítulo se verá que no se dispone de métodos directos para calcular los perfiles de velocidad en flujo turbulento. En realidad, las ecuaciones de continuidad y movimiento son aplicables al flujo turbulento, lo cual es lógico, si se tiene en cuenta que el tamaño medio de los remolinos es en este caso grande en comparación con el recorrido libre medio de las moleculas del fluido. Si se pudiesen resolver estas ecuaciones se obtendrían los valores instantáneos de la velocidad y la presión, que en el caso del flujo turbulento presentan grandes fluctuaciones alrededor de sus valores medios. (Véase § 5.1.) Como estas soluciones no pueden hallarse, es preciso desarrollar otros métodos de ataque del problema.

En § 5.2 se indica como pueden promediarse las ecuaciones de variación en un corto intervalo de tiempo, para obtener las ecuaciones de variación de «tiempo ajustado». Estas ecuaciones describen las distribuciones de velocidad y presión de tiempo ajustado; estos perfiles corresponderían a la velocidad medida con un tubo de Pitot y las presiones determinadas con un manómetro. La única dificultad consiste en que la ecuación de movimiento de tiempo ajustado contiene los componentes $\tau_{xy}^{(t)}$ de la «densidad de flujo turbulento». Asi como en el flujo laminar los componentes τ_{xy} podían expresarse según la ley de Newton de la viscosidad, las magnitudes $\tau_{xy}^{(t)}$ han de tratarse en general empíricamente.

En § 5.3 se resumen las expresiones empíricas de $\tau_{xy}^{(t)}$ que se han hecho populares de las últimas décadas. Se indican también algunos ejemplos sobre la forma en que éstas se han utilizado para obtener información acerca de las distribuciones de velocidad de tiempo ajustado. Obsérvese que para cada solucion que se obtiene hay que determinar por lo menos una constante, a partir de medidas experimentales. Por lo tanto, las teorías semiempíricas no permiten calcular totalmente ***a priori*** los perfiles de velocidad. Sin embargo, estas teorías encuentran grandes aplicaciones en ingeniería.

Teniendo en cuenta el movimiento caótico que tiene lugar en la turbulencia, parece evidente que han de obtenerse resultados satisfactorios mediante los métodos que tengan en cuenta los movimientos y consecuencias del azar. Hasta ahora no existe una teoría estadística de la turbulencia que sea completamente satisfactoria. Sin embargo, se ha avanzado mucho en las investigaciones teóricas y experimentales acerca del comportamiento de diversas magnitudes estadísticas que deben explicarse, en última instancia, mediante una teoría estadística afortunada. En § 5.4 se presenta al lector una visión rápida del método estadístico, estudiando la caída de turbulencia detrás de una rejilla.

En esta breve introducción a ta turbulencia trataremos principalmente de la descripción del flujo turbulento totalmente desarrollado en un fluido incompresible. No se considerarán todos los métodos teóricos para la predicción del comienzo de turbulencia,[1] ni los métodos experimentales desarrollados para demostrar la estructura interior de los flujos turbulentos.[2,3] El lector comprenderá que la literatura sobre este tema ha crecido hasta alcanzar unas enormes proporciones. Todo lo que podemos hacer en un texto elemental es presentar algunos conceptos que sirvan de base para una posterior información.

§ 5.1. FLUCTUACIONES Y MAGNITUDES DE TIEMPO AJUSTADO

Antes de proceder a la descripción del flujo turbulento desde el punto de vista analítico, haremos algunas consideraciones acerca de la naturaleza física del flujo turbulento. Para la mayor parte de las discusiones utilizaremos como base el flujo en un tubo circular.

En § 2.3 se ha demostrado que para el flujo ***laminar*** en un tubo circular, la distribución de velocidad y la velocidad media vienen dadas por

$$\frac{v_z}{v_{z,\text{máx}}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]; \qquad \frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\text{máx}}} = \frac{1}{2} \tag{5.1-1,2}$$

Se ha visto también que la caída de presión es directamente proporcional a la velocidad volumétrica de flujo.

Para el flujo ***turbulento,*** se ha demostrado experimentalmente que las magnitudes de tiempo ajustado $\bar{v}_z$ y $\langle \bar{v}_z \rangle$ están dadas aproximadamente por

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,\text{máx}}} \doteq \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}; \qquad \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,\text{máx}}} \doteq \frac{4}{5} \tag{5.1-3,4}$$

Estas expresiones son bastante satisfactorias para el intervalo del número de Reynolds de 10^4 a 10^5; más adelante se dan expresiones más exactas. En este intervalo del

---

1 H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), capítulo 16.
2 A. A. TOWNSEND, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press (1956).
3 S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1939).

número de Reynolds la caída de presión es, aproximadamente, proporciona! a la potencia 7/4 de la velocidad volumétrica de flujo. En la Fig. 5.1— 1 se comparan los perfiles laminar y turbulento de velocidad.

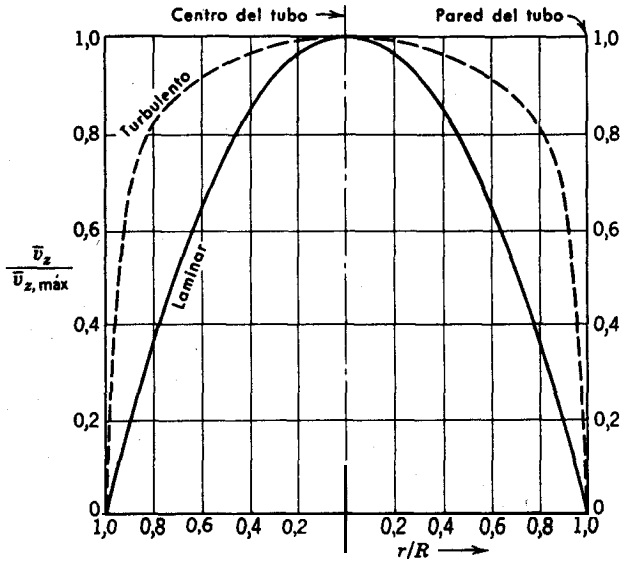


Fig. 5.1-1. **Comparación** cualitativa de las distribuciones de velocidad para flujo laminar y turbulento.

Para tubos circulares, el flujo es laminar cuando Re = $D\langle v_z\rangle\rho/\mu$ es menor que aproximadamente **2,1** x 103, si bien se establece un movimiento sinuoso **estable**[1] para un número de Reynolds del orden de 1225. Por encima de **2,1** x 103 puede mantenerse temporalmente el movimiento laminar si **los** tubos son muy lisos y se evitan las vibraciones, pero si se produce una perturbación en el sistema, o existe una rugosidad apreciable en la superficie, el movimiento laminar se transforma en un movimiento al azar que caracteriza al flujo turbulento.

En realidad, esta afirmación constituye una simplificación, puesto que el movimiento a través del tubo no es completamente al azar, si bien lo son prácticamente las fluctuaciones de la velocidad en el centro del tubo. Sin embargo, en las proximidades de la pared, las fluctuaciones en la dirección axial son mayores que en la radial y todas ellas tienden a cero en la pared misma. Resulta por lo tanto evidente que existe una marcada variación del comportamiento físico con la distancia radial. A pesar de que este **cambio** es continuo, se acostumbra considerar tres zonas arbitrarias en el interior del tubo: la ***subcapa*** *laminar,* en la que se utiliza la ley de Newton

1 R. S. PRENGLE y R. R. **ROTHFUS,** ***Ind. Eng. Chem.,*** *47, 379-386* (1955).

de la viscosidad para describir el flujo; la ***zona de transición,*** en la que los efectos laminares y turbulentos son igualmente importantes; y la ***región de turbulencia totalmente desarrollada,*** en la que los efectos estrictamente laminares son despreciables. En la Fig. 5.1-2 se indican estas regiones, que no deben de tomarse demasiado al pie de la letra.

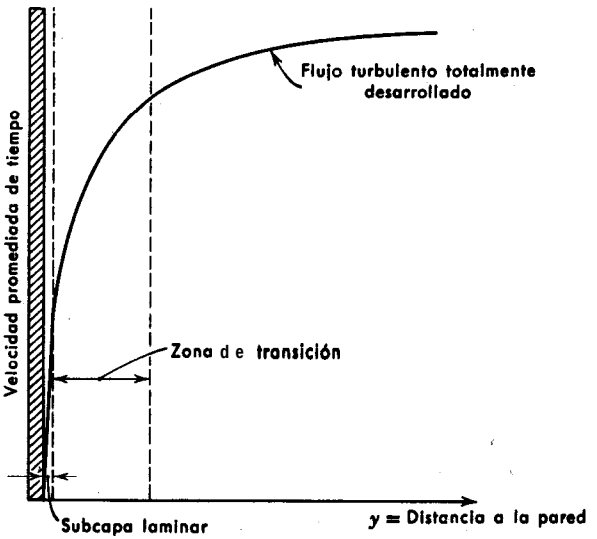


Fig. 5.1-2. Distribución de velocidad para el flujo turbulento en el interior de tubos; región próxima a la pared del tubo.

Hasta aquí se ha tratado esencialmente de la velocidad de tiempo ajustado y vamos a volver ahora sobre las fluctuaciones de la velocidad. Fijaremos nuestra atención sobre el comportamiento del fluido en un punto del tubo en el que el flujo es turbulento. Supongamos que para dicho punto se observa que la diferencia de presión que da lugar al flujo aumenta lentamente, de forma que la velocidad media aumenta también lentamente, en cuyo caso, el componente axial de la velocidad se comportará en la forma que se indica en la Fig. 5.1-3. La velocidad instantánea v_z es una función que oscila irregularmente. Definimos la velocidad de tiempo ajustado $\bar{v}_z$ tomando un promedio de tiempo de v_z en un intervalo de tiempo t_0 que es grande con respecto al tiempo de oscilación turbulenta, pero pequeño en relación con el tiempo de variación de la diferencia de presión que da lugar al flujo:

$$\bar{v}_z = \frac{1}{t_0}\int_t^{t+t_0} v_z\, dt \tag{5.1-5}$$

La velocidad instantánea puede por lo tanto expresarse como la suma de la velocidad de tiempo ajustado $\bar{v}_z$ y una velocidad de fluctuación v'_z

$$v_z = \bar{v}_z + v_z' \tag{5.1–6}$$

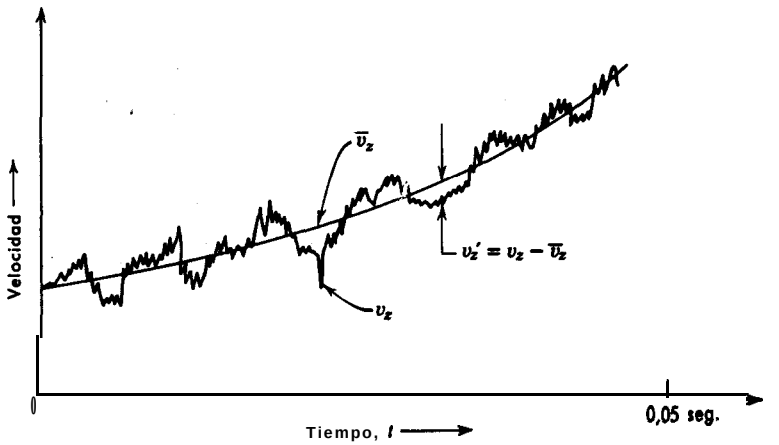


Fig. 5.1-3. **Oscilación** del componente de velocidad alrededor de un valor medio.

Para la presión se puede escribir una expresión fluctuante análoga. A partir de las definiciones anteriores resulta evidente que $\overline{v_z'} = 0$ pero, en cambio, $\overline{v_z'^2}$ no será cero, y de hecho $\sqrt{\overline{v_z'^2}}/\langle \tilde{v}_z \rangle$ es una medida de la magnitud de la perturbación **turbu-**

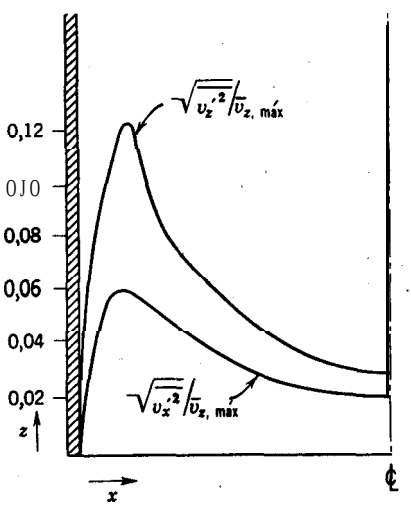


Fig. 5.1-4. Fluctuaciones **turbulentas** para el flujo en la dirección z en un canal rectangular.

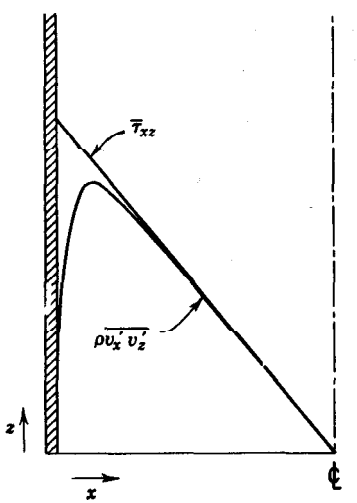


Fig. **5.1–5.** Esfuerzo de Reynolds para el flujo en un canal rectangular. **La** magnitud $\bar{\tau}_{xz}$ es la suma de $\bar{\tau}_{xz}^{(t)}$ y $\bar{\tau}_{xz}^{(t)}$.

lenta. Esta relación, que se conoce con el nombre de «intensidad de turbulencia», puede alcanzar valores de 1 a 10 por ciento para el flujo en un tubo.

Es conveniente tener alguna idea acerca del orden de magnitud de las fluctuaciones turbulentas; en las Figs. 5.1-4 y 5.1-5 se presentan ejemplos de curvas para el flujo turbulento entre dos láminas planas. En la Fig. 5.1-4 se observa que las fluctuaciones en la dirección de flujo son mayores que en la dirección perpendicular al mismo, tendiendo las dos a igualarse en el centro de la conducción (es decir, tendencia hacia la ***isotropía).*** De acuerdo con la Fig. 5.1-5 se observa que la densidad de flujo de cantidad de movimiento en la mayor parte del canal resulta casi totalmente de la transferencia turbulenta. El transporte molecular de cantidad de movimiento sólo es importante en las proximidades de la pared (este punto se amplía en el ejemplo 5.3-3). En la discusión que sigue es preciso recordar las curvas de las Figs. 5.1-4 y 5.

§ 5.2 AJUSTE DE TIEMPO DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE

En esta sección se deducen las ecuaciones que describen la velocidad y presión de tiempo ajustado para un fluido incompresible. Para ello, se expresan las ecuaciones de continuidad y movimiento, substituyendo v_x por $\bar{v}_x + v'_x$ y p por $\bar{p} + p'$:

(ecuación de continuidad)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y + v_y') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_z + v_z') = 0 \tag{5.2-1}$$

(ecuación de movimiento)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\bar{v}_x + v_x') = &-\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho(\bar{v}_x + v_x')(\bar{v}_x + v_x')\right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\rho(\bar{v}_y + v_y')(\bar{v}_x + v_x') \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z}\rho(\bar{v}_z + v_z')(\bar{v}_x + v_x')\right) \\ &+ \mu\nabla^2(\bar{v}_x + v_x') \\ &+ \rho g_x\end{aligned} \tag{5.2-2}$$

En este caso se ha utilizado la ecuación de movimiento según la forma de la **Ec.** 3.2-5, con los componentes del esfuerzo de un fluido newtoniano de densidad p. Los componentes y y z pueden expresarse de una forma análoga.

Se puede tomar ahora el promedio de tiempo de las Ecs. 5.2-1 y 2, de acuerdo con la **Ec.** 5.1-5, para obtener:

ecuación de continuidad de tiempo ajustado

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \tag{5.2-3}$$

ecuación de movimiento de tiempo ajustado

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\bar{v}_x = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\bar{v}_x\bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\bar{v}_y\bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho\bar{v}_z\bar{v}_x\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v_x'v_x'} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v_y'v_x'} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v_z'v_x'}\right) + \mu\nabla^2\bar{v}_x + \rho g_x \tag{5.2-4}$$

Éstas son las ecuaciones de continuidad de tiempo ajustado y movimiento de tiempo ajustado para el componente x. Comparándolas con las ecuaciones de §§ 3.1, 2, se observa que la ecuación de continuidad es la misma que antes, salvo que los componentes de la velocidad de tiempo ajustado substituyen a los componentes de la velocidad instantánea. También en la ecuación de movimiento, v_x, v_y, v_z y p se han substituido por $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$ y $\bar{p}$; pero, además, intervienen nuevos términos (subrayados con la línea de puntos), que están relacionados con las fluctuaciones de velocidad turbulenta. Por comodidad vamos a introducir la notación

$$\bar{\tau}_{xx}^{(t)} = \rho\overline{v_x'v_x'}; \qquad \bar{\tau}_{xy}^{(t)} = \rho\overline{v_x'v_y'}; \text{ etc.} \tag{5.2-5,6}$$

Estos términos con los componentes de la ***densidad de flujo turbulento de cantidad de movimiento,*** $\bar{\tau}^{(t)}$, que generalmente se denominan esfuerzos ***de Reynolds.***

Para abreviar, expresamos las ecuaciones de continuidad y movimiento de tiempo ajustado en notación vectorial:

ecuación de continuidad de tiempo ajustado

$$(\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \tag{5.2-7}$$

ecuación de movimiento de tiempo ajustado

$$\rho\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla\bar{p} - [\nabla\cdot\bar{\tau}^{(t)}] - [\nabla\cdot\bar{\tau}^{(t)}] + \rho g \tag{5.2-8}$$

También en este caso se subraya con una línea de puntos el término adicional que aparece como consecuencia del ajuste de tiempo. La magnitud $\bar{\tau}^{(t)}$ viene dada por las expresiones de las Tablas 3.4-5, 6 y 7, sólo que v se substituye siempre por $\bar{v}$.

La principal conclusión de esta sección es que las ecuaciones que se resumen en las Tablas 3.4-2, 3 y 4 pueden utilizarse para plantear problemas de flujo turbulento con tal de que se cambie v_i por $\bar{v}_i$, p por $\bar{p}$, y τ_{ij} por $\bar{\tau}_{ij}^{(t)} + \bar{\tau}_{ij}^{(t)}$.

§ 5.3 EXPRESIONES SEMIEMPÍRICAS PARA LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS

Para hallar los perfiles de velocidad mediante la Ec. 5.2-8 es preciso disponer de alguna expresión para $\bar{\tau}^{(t)}$. Con este fin se han utilizado diversas relaciones semiempíricas que aquí mencionaremos solamente. El lector que desee saber cómo se han «deducido» estas expresiones debe consultar los trabajos originales.

Viscosidad de remolino de Boussinesq[1]

Una de las expresiones más antiguas propuestas por analogía con la ley de Newton de la viscosidad, es

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{5.3–1}$$

siendo $\mu^{(t)}$ un «coeficiente turbulento. de viscosidad» o «viscosidad de remolino» que, en general, varía considerablemente con la posición.

Longitud de mezcla de Prandtl[2,6]

Suponiendo que los remolinos se mueven en un fluido de igual forma que lo hacen las moléculas en un gas (en realidad es una analogía muy incorrecta), Prandtl obtuvo una expresión para la transmisión de cantidad de movimiento en un fluido, en la que la longitud de mezcla juega un papel aproximadamente equivalente al del recorrido libre medio en la teoría cinética de los gases. (Véase § 1.4.) Con esta suposición Prandtl obtuvo la relación

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{5.3-2}$$

La *longitud de mezcla* l también es una función de la posición, y Prandlt obtuvo algunos éxitos considerando que l es proporcional a la distancia y medida desde la superficie sólida, es decir, $l = \kappa_1 y$. Taylor llegó también a un resultado análogo al de la Ec. 5.3-2 mediante la teoría del transporte de vorticidad.[3]

Hipótesis de semejanza de von Kármán[4,5,6]

Basándose en consideraciones adimensionales, von Kármán sugirió que los esfuerzos de Reynolds han de ser de la forma

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho \kappa_2^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{5.3-3}$$

---

1 T. V. BOUSSINESQ, Mém. *prés. Acad. Sci.*, Tercera edición, *París*, XXIII, *46* (1877).
2 L. PRANDTL, Z. *angew. Math. Mech.*, *5*, 136 (1925).
3 G. I. TAYLOR, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A135, 685-701 (1932).
4 T. VON KÁRMÁN, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math-physik. Kl.* (1930); también *NACA*, TM611.
5 R. G. DEISSLER, *NACA Report* 1210 (1955).
6 H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), capítulo XIX.

siendo κ_2 una constante «universal» cuyo valor es **0,40** para algunos autores y **0,36** para otros (estos valores se han determinado a partir de los datos del perfil de velocidades para el flujo en un tubo).

Fórmula empírica de Deissler para la región próxima a la pared[5]

Deissler ha propuesto la siguiente expresión empírica para ser utilizada en las proximidades de superficies sólidas, donde la ecuación de von Kármán y la de Prandtl resultan inadecuadas

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho n^2 \bar{v}_x y(1 - \exp\{-n^2 \bar{v}_x y/\nu\}) \frac{d\bar{v}_x}{dy} \tag{5.3-4}$$

siendo n una constante, cuyo valor, determinado empíricamente por Deissler a partir de las distribuciones de velocidad para el flujo en un tubo, es 0,124.

En los ejemplos ilustrativos que se presentan a continuación, se indica la forma en que se utilizan las relaciones anteriores para obtener alguna información acerca de los flujos turbulentos. Al aplicar estas relaciones a sistemas curvilíneos, los investigadores han despreciado generalmente, para simplificar, los efectos de curvatura.'

---

7 Para escribir las adecuadas relaciones en coordenadas curvilíneas, es preciso expresar $\bar{\tau}^{(t)}$ en forma tensorial. Por ejemplo, la expresión de la hipótesis de semejanza de von **Kármán,** de acuerdo con la deducción original de este autor, es

$$\bar{\tau}^{(t)} = -\rho\kappa_2^2 \left| \frac{[\frac{1}{2}(\Delta:\Delta)]^{3/2}}{[\frac{1}{2}(\Omega:\Omega)]} \right| \Delta \tag{5.3-3a}$$

siendo $\Delta_{ij} = (\partial\bar{v}_i/\partial x_j) + (\partial\bar{v}_j/\partial x_i)$ y $\Omega_{ij} = (\partial\bar{v}_i/\partial x_j) + (\partial\bar{v}_j/\partial x_i)$. En esta expresión $\bar{w}_i$ es el componente *i*ésimo de la vorticidad $\bar{w} = [\nabla \times \bar{v}]$, y el producto de doble punto de los tensores **A** y **Ω** es la operación definida en § A.4. Para flujo de cizalla plano, la Ec. 5.3−3*a* se transforma en la Ec. 5.3-3. Para flujo axial simétrico en un tubo con $\bar{v}_z = \bar{v}_z(r)$ y $\bar{v}_\theta = \bar{v}_r =$ Ola Ec. 5.3−3*a* se reduce a

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\rho\kappa_2^2 \left| \frac{\left(\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right)^3}{\left(\frac{d^2\bar{v}_z}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right)^2} \right| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \tag{5.3-3b}$$

Para el flujo tangencial entre dos cilindros que giran con $\bar{v}_\theta = \bar{v}_\theta(r)$ y $\bar{v}_r = \bar{v}_z = 0$, la Ec. 5.3 −3*a* se transforma en

$$\bar{\tau}_{r\theta}^{(t)} = -\rho\kappa_2^2 \left| \frac{\left(\frac{d\bar{v}_\theta}{dr} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\right)^3}{\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\bar{v}_\theta}{dr} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\right)\right]^2} \right| \left(\frac{d\bar{v}_\theta}{dr} - \frac{\bar{v}_\theta}{r}\right) \tag{5.3-3c}$$

que está de acuerdo con T. von **Kármán,** *Collected Works,* Butterworths, Londres (1956), p. 459. (Los autores desean expresar su agradecimiento al doctor J. B. Opfell y al profesor W. H. Corcoran en relación con la anterior discusión.)

Ejemplo 5.3-1. Deducción de la ley de distribución logadtmica para el flujo en un tubo (lejos de la pared)

Hallar la distribución de velocidad de tiempo ajustado para el flujo turbulento en un tubo largo, utilizando la relación de la longitud de mezcla de Prandtl. El radio y la longitud del tubo son R y L.

Solución. Sea $s = R - r$ la distancia medida desde la pared del tubo, y supóngase que $l = \kappa_1 s$. Para el flujo axial en tubos, la Ec. 5.3-2 resulta

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = +\rho\kappa_1^2(R-r)^2\left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right)^2 = +\rho\kappa_1^2 s^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{ds}\right)^2 \tag{5.3-5}$$

La ecuación de movimiento se obtiene a partir de la Ec. 5.2−8. Para el caso de que $\bar{v}_z = \bar{v}_z(r)$ y el fluido sea incompresible, se llega a

$$0 = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\bar{\tau}_{rz}) \tag{5.3-6}$$

siendo $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(l)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$ Integrando esta ecuación, con la condición límite de que $\bar{\tau}_{rz} = 0$ para r = 0, se obtiene

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R}{2L}\cdot\frac{r}{R} = \tau_0\left(1 - \frac{s}{R}\right) \tag{5.3-7}$$

en la que τ_0 es el esfuerzo cortante de pared (para $s = 0$). En el núcleo turbulento (o sea, para la mayor parte de los valores de s) $\bar{\tau}_{rz}^{(l)}$ será despreciable con respecto a $\bar{\tau}_{rz}^{(t)}$; en otras palabras, el transporte de cantidad de movimiento por moléculas es pequeño en comparación del que tiene lugar por el movimiento de remolino. Por consiguiente, las Ecs. 5.3-5 y 5.3 -7 pueden combinarse para obtener

$$\rho\kappa_1^2 s^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{ds}\right)^2 = \tau_0\left(1 - \frac{s}{R}\right) \tag{5.3-8}$$

Prandtl hace aquí una simplificación matemática (físicamente injustificable) que consiste en tomar el segundo miembro igual a τ_0. Con esto se simplifica algo el aspecto matemático, y se ha comprobado que el resultado difiere muy poco del que se obtiene por integración de la Ec. 5.34. Por tanto, tomando la raíz cuadrada, se obtiene

$$\frac{d\bar{v}_z}{ds} = \pm\frac{1}{\kappa_1}v_*\frac{1}{s} \tag{5.3-9}$$

debiendo utilizarse el signo más. En esta expresión v_* es $\sqrt{\tau_0/\rho}$, que tiene las dimensiones de una velocidad. Integrando la Ec. 5.3-9 desde el borde exterior de la capa de transición $s = s_1$ hasta una posición cualquiera de s, se obtiene

$$\bar{v}_z - \bar{v}_{z1} = \frac{1}{\kappa_1}v_*\ln\frac{s}{s_1} \qquad s \geq s_1 \tag{5.3-10}$$

o bien en variables adimensionales ($v^+ = \bar{v}_z/v_*$, $s^+ = sv_*\rho/\mu$):

$$v^+ - v_1^+ = \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{s^+}{s_1^+} \tag{5.3-11}$$

Deissler[5] encontró, a partir de datos experimentales de distribución de velocidad, que el mejor valor de κ_1 es 0.36, y que a su vez el borde exterior de la zona de transición puede tomarse satisfactoriamente como $s_1^+ = 26$ (siendo $v_1 = 12{,}85$). Con estos valores recomendados por Deissler, la Ec. 5.3 – 11 se hace

$$v^+ = \frac{1}{0.36} \ln s^+ + 3.8 \tag{5.3-12}$$

Se ha encontrado que esta ***distribución logarítmica*** describe bastante bien los perfiles de velocidad para el flujo turbulento con Re > 20 000 (excepto, por supuesto, cerca de las paredes del tubo).

Ejemplo 5.3-2. Distribución de velocidad para el flujo en un tubo (cerca de la pared)

Utilizar la fórmula empírica de Deissler para calcular el perfil de velocidad en la subcapa laminar y en la región de transición.

Solución. Sumando la ley de Newton de la viscosidad y la expresión de Deissler, se obtiene para la región cercana a la pared $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(l)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} - \rho n^2 \bar{v}_z (R - r)\left(1 - \exp\left\{-n^2 \bar{v}_z (R - r)/\nu\right\}\right) \frac{d\bar{v}_z}{dr} \tag{5.3-13}$$

Substituyendo esta expresión en la Ec. 5.3 -7 y tomando $1 - (s/R)$ igual a 1, que es una buena aproximación junto a la pared, se llega a

$$\tau_0 = +\mu \frac{d\bar{v}_z}{ds} + \rho n^2 \bar{v}_z s\left(1 - \exp\left\{-n^2 \bar{v}_z s/\nu\right\}\right) \frac{d\bar{v}_z}{ds} \tag{5.3-14}$$

Integrando desde $s = 0$ hasta s, y expresando el resultado en función de variables adimensionales, se obtiene

$$v^+ = \int_0^{s^+} \frac{ds^+}{1 + n^2 v^+ s^+ (1 - \exp\{-n^2 v^+ s^+\})} \qquad 0 < s^+ < 26 \tag{5.3-15}$$

habiéndose encontrado empfrícamente que para tubos largos y lisos n vale 0,124. Para hallar v^+ en función de s^+ hay que utilizar procedimientos iterativos; en la Fig. 5.3 – 1 se indica gráficamente el resultado. Para valores pequeños de s^+, la Ec. 5.3 – 15 se reduce a

$$v^+ = s^+ \qquad 0 < s^+ < 5 \tag{5.3-16}$$

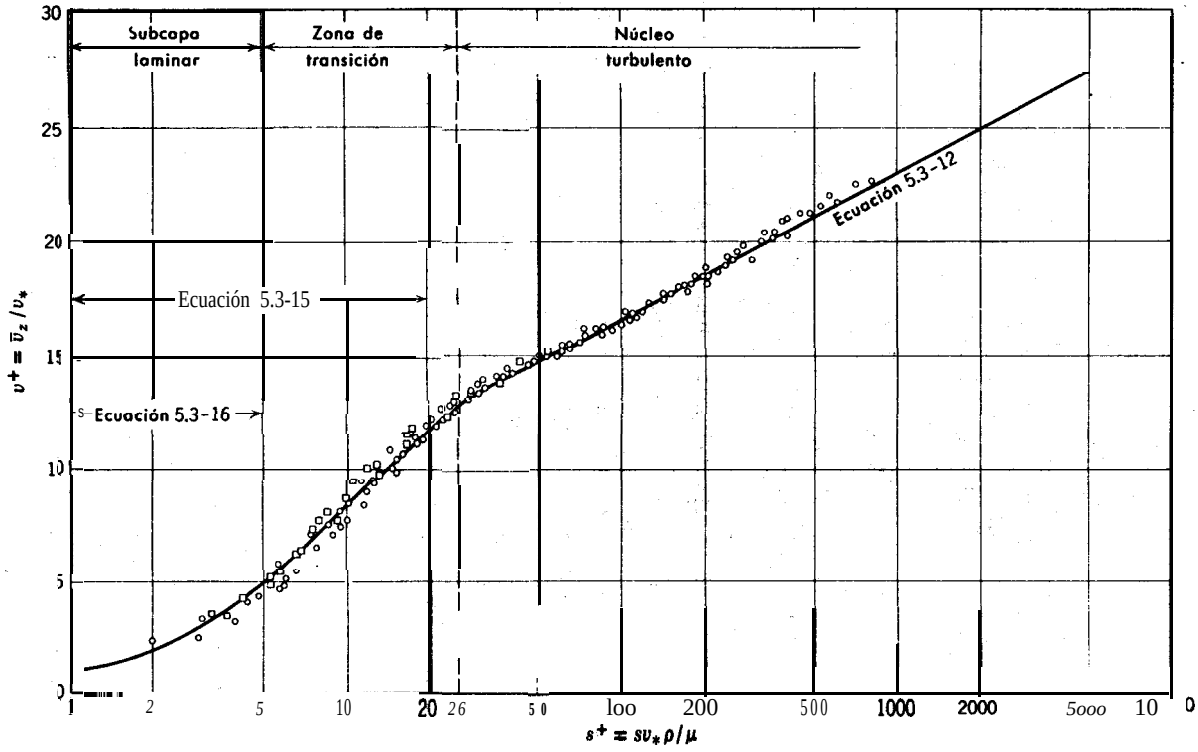


Fig. 5.3-1. Distribución de velocidad para el flujo turbulento isotérmico en tubos. [R. G. Deissler, *NACA Rept* 1210 **(1955).]** Los datos experimentales son los de R. G. Deissler *[NACA Tech.* 3016 **(1953)]** y J. Laufer *[NACA Tech.* Note 2954 **(1953)],** que corresponden a los círculos y cuadrados, respectivamente.

Este resultado puede obtenerse también integrando sobre la subcapa laminar la ley de Newton de la viscosidad. Los datos experimentales del perfil de velocidad concuerdan satisfactoriamente con la curva de la Fig. 5.3 — 1 para Re > 20 000. Para una comparación del trabajo de diversos experimentadores, véase Corcoran, Opfell, y Sage.[8]

Se ha estudiado la influencia de la rugosidad sobre las distribuciones de velocidad para el flujo en un tubo, pudiendo encontrarse en la obra de Schlichting[9] un cuidadoso resumen de este trabajo. En los últimos capítulos de este mismo libro se presentan también resúmenes de estudios teóricos sobre otros sistemas de flujo turbulento, tales como flujo en eyectores, flujo entre cilindros que giran, flujo en las cercanías de discos que giran y flujo alrededor de cilindros estacionarios. La discusión de estas materias cae fuera del alcance de este libro.

Ejemplo 5.3-3. Valor relativo de la viscosidad molecular y la viscosidad de remolino

Determinar la relación $\mu^{(t)}/\mu$ para $s = R/2$, en el caso de flujo estacionario de agua en un largo tubo circular liso en las siguientes condiciones:

R = radio del tubo = 8 cm.
τ_0 = esfuerzo cortante de pared = 1,63 dina cm^{-2}
ρ = densidad = 0,9996 g cm^{-3}
ν = viscosidad cinemática = 1,02 x 10^{-2} cm^2 seg^{-1}

Solución. La viscosidad de remolino esta definida por

$$\bar{\tau}_{rz} = -\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} - \mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_z}{dr}$$

$$= +(\mu + \mu^{(t)}) \frac{d\bar{v}_z}{ds} \qquad (5.3\text{–}17)$$

Despejando de esta relación $\mu^{(t)}/\mu$, y expresando el resultado en función de las variables adimensionales del ejemplo anterior, se obtiene:

$$\frac{\mu^{(t)}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\bar{\tau}_{rz}}{d\bar{v}_z/ds} - 1$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{\tau_0(1 - s/R)}{d\bar{v}_z/ds} - 1$$

$$= \frac{[1 - (s/R)]}{dv^+/ds^+} - 1 \qquad (5.3\text{–}18)$$

---

8 Un resumen crítico. de diversos resultados empíricos puede verse en W. H. CORCORAN, J. B. OPFELL y B. H. SAGE, *Momentum Transport in Fluids*, Academics Press, Nueva York (1956), capítulos III y IV.

9 H. SCHLICHTING, *op. cit.*, pp. 416-426.

Para s = $R/2$, el valor de s^+ es

$$s^+ = \frac{sv_*\rho}{\mu} = \frac{(R/2)\sqrt{\tau_0/\rho}\,\rho}{\mu} = 500 \tag{5.3-19}$$

Mediante la Ec. 5.3 12 se calcula dv^+/ds^+ para este valor de s^+ :

$$\frac{dv^+}{ds^+} = (1/0{,}36)\ (1/500) \tag{5.3-20}$$

Substituyendo en la Ec. 5.3 — 18 se obtiene

$$\mu^{(t)}/\mu = 1/2(0{,}36)\ (500) - 1 = 89 \tag{5.3-21}$$

Este resultado pone de manifiesto que, lejos de la pared del tubo, el transporte molecular de cantidad de movimiento es despreciable en comparación del transporte de remolino.

§5.4 EL TENSOR DE CORRELACIÓN DE SEGUNDO ORDEN Y SU PROPAGACIÓN (LA ECUACIÓN DE VON KÁRMÁN-HOWARTH).[1,2]

En § 5.2 se ha visto que el ajuste de tiempo de la ecuación de movimiento conduce al tensor de esfuerzo de Reynolds, cuyos componentes son $\rho\overline{v_i'v_j'}$. Las magnitudes v'_i y v'_j son las fluctuaciones de velocidad en las direcciones *i* y j en un punto, y $\overline{v_i'v_j'}$ es una medida de la «correlación» entre las fluctuaciones.

En las dos últimas décadas se ha trabajado intensamente para establecer las correlaciones entre las fluctuaciones en *dos* puntos. Estas magnitudes, que se pueden medir, dan el tamaño y la orientación de los remolinos. En el estudio que sigue se representan las fluctuaciones en el' punto *B'* mediante una sola comilla y las del punto *B''* por dos:

$\overline{p'v_i''}$ = el componente *i* de un vector que describe la correlación de la fluctuación de presión en *B'* con la fluctuación de velocidad en *B''* en la dirección *i.*

$\overline{v_i'v_j''}$ = el componente *ij* de un tensor de segundo orden que describe la correlación de las fluctuaciones de velocidad en *B' y B".*

$\overline{v_i'v_j'v_k''}$ = el componente *ijk* de un tensor de tercer orden que describe la correlación de dos fluctuaciones de velocidad en *B'* con una en *B".*

Se ha estudiado ampliamente el comportamiento de estas correlaciones para la turbulencia isotrópica homogénea en un fluido para el cual $\bar{v} = 0$; aquí se considera solamente este caso, que *es el* más sencillo de todos. *Se* define la ***turbulencia***

[1] T. VON KÁRMÁN y L. HOWARTH, *Proc. Roy. Soc. (London),* A164, 192-215 (1938).
[2] G. I. TAYLOR, *Proc. Roy. Soc. (London),* A 151, 421-478 (1935).

isotrópica como la condición en virtud de la cual el valor de tiempo ajustado de una **función** de los componentes de la velocidad y sus derivadas espaciales en un determinado punto, definido con respecto a un cierto sistema de ejes, permanece invariable si los ejes se **rotan** o reflejan en un plano que pasa por el origen; concretamente, $\overline{v_1'^2} = \overline{v_2'^2} = \overline{v_3'^2}$ (0 sea, = $\overline{v'^2}$) y $\overline{v_1' v_2'} = \overline{v_2' v_3'} = \overline{v_1' v_3'} = 0$. La ***turbulencia homogénea*** se define como el estado para el cual las distintas magnitudes de tiempo ajustado. son independientes de la posición; en particular, $\overline{v'^2} = \overline{v''^2}$. Se ha encontrado3 que se puede conseguir aproximadamente una turbulencia **isotrópica** homogénea local con $\bar{v} = 0$, en el flujo detrás de una rejilla uniforme, si se considera que el sistema coordenado se mueve con la velocidad de la corriente.

A continuación se definen correlaciones adimensionales para la turbulencia isotrópica :

$$P_i = \frac{\overline{p' v_i''}}{\sqrt{\overline{p'^2}\,\overline{v'^2}}} \tag{5.44}$$

$$R_{ij} = \frac{\overline{v_i' v_j''}}{\overline{v'^2}} \tag{5.4-2}$$

$$T_{ijk} = \frac{\overline{v_i' v_j' v_k''}}{(\overline{v'^2})^{3/2}} \tag{5.4-3}$$

Es preciso deducir una ecuación de variación para el tensor de correlación de segundo orden R_{ij}. Para ello, se utiliza el siguiente procedimiento:

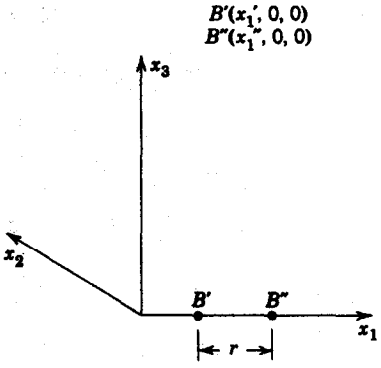


Fig. 5.4-1. B' y B'' están ambos sobre el eje x_1, siendo $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$

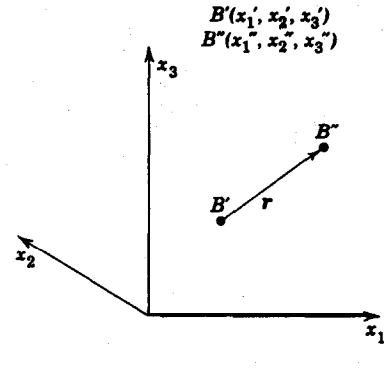


Fig. 5.4-2. Localización arbitraria de B' y B", siendo los componentes de r Et, ξ_2, ξ_3.

3 A. A. TOWNSEND, ***The Structure of Turbulent Shear Flow,*** Cambridge University Press (1956). p.p. 33 y SS.

a. Para cada una de las tres correlaciones P_i, R_{ij} y T_{ijk}, (i) se hallan, mediante la condición de isotropía, los componentes que no desaparecen, cuando tanto B' como B'' están sobre el eje x_1 (véase Fig. 5.4-1); (ii) se establece la forma general de la correlación que ha de garantizar que la correlación está dotada de las adecuadas propiedades de transformación; (iiij se aplica la ecuación de continuidad para obtener relaciones entre los componentes que no desaparecen.

b. Se utilizan después las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener la ecuación de von Kármán-Howarth que describe la correlación de segundo orden.

En la deducción se representa la localización de B' mediante las coordenadas x'_i y la de B'' por las coordenadas x_i''. La distancia de B' a B'' se designa mediante el vector r de componentes $\xi_i = x_i'' - x_i'$. (Véase Fig. 5.4-2.)

La correlación P_i

Consideremos primeramente el caso especial en el que tanto B' como B'' están sobre el eje x_1. Debido a la isotropía $\overline{p'v_2''} = \overline{p'v_3''} = 0$, puesto que estas magnitudes cambian de signo cuando los ejes rotan 180° alrededor del eje x_1. Los demás componentes, debido a la isotropía, serán a lo sumo una función de r y t; por lo tanto, para las posiciones de B' y B'' que se indican en la Fig. 5.4— 1, se puede escribir

$$P_1 = \frac{\overline{p'v_1''}}{\sqrt{\overline{p'^2}\,\overline{v'^2}}} = s(r, t) \qquad (5.4\text{–}4)$$

Una expresión vectorial que simplifica la Ec. 5.4—4 para $i = 1$, es

$$P_i = \frac{\overline{p'v_i''}}{\sqrt{\overline{p'^2}\,\overline{v'^2}}} = s(r, t)\,\frac{\xi_i}{r} \qquad (5.4\text{-}5)$$

lo cual da también $P_2 = P_3 = 0$. Puesto que esta expresión se transforma de igual forma que un vector, es la expresión general de P_i cuando B' y B'' están localizados arbitrariamente.

Utilizamos ahora la ecuación de continuidad en el punto B'', que es

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i''}{\partial x_i''} = 0 \qquad (5.44)$$

Como p' depende solamente de x'_i y t, se puede introducir p' en la Ec. 5.4-6 para obtener (después del ajuste de tiempo)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i''}\,\overline{p'v_i''} = 0 \qquad (5.4\text{-}7)$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\overline{p'v_i''} = 0 \qquad (5.4\text{-}8)$$

Introduciendo después la Ec. 5.4-5 en la Ec. 5.4-8 se llega a la siguiente ecuación diferencial para $s(r, t)$:

$$\frac{ds}{dr} + 2\frac{s}{r} = 0 \qquad \textbf{(5.4-9)}$$

cuya solución es $s = C/r^2$. Como $s(r)$ no se hace infinito cuando $r = 0$, la constante de integración C tiene que ser cero. Por consiguiente, $s(r) = 0$, y se llega a la conclusión de que

$$P_i = 0 \quad 0 \quad p'v_i'' = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3 \qquad (5.4-10)$$

No existe, pues, correlación entre la fluctuación de presión en un punto y la fluctuación de velocidad en un punto contiguo.

La correlación R_{ij}

Consideremos de nuevo el caso especial de que B' y B'' están ambos sobre el eje x_1. Teniendo en cuenta la isotropía:

$\overline{v'_1 v''_2} = \overline{v'_1 v''_3} = 0$ ya que estas magnitudes cambiarían de signo al girar 180° alrededor del eje x_1.

$\overline{v'_2 v''_3} = \overline{v'_3 v''_2} = 0$ puesto que cambiarían de signo al reflejarse en el plano $x_1 x_3$.

Los demás componentes no nulos son funciones de r y t. Por consiguiente, se puede escribir

$$R_{11} = \frac{\overline{v_1' v_1''}}{\overline{v'^2}} = f(r, t) \qquad (5.4-11)$$

$$R_{jj} = \frac{\overline{v_j' v_j''}}{\overline{v'^2}} = g(r, t) \qquad j = 2, 3 \qquad (5.4-12)$$

Cuando B' y B'' están los dos sobre el eje x_1, la matriz de R_{ij} es de la forma siguiente :

$$||R_{ij}|| = \begin{Vmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{Vmatrix} \qquad \textbf{(5.4-13)}$$

Esta matriz puede seoararse en dos partes:

$$||R_{ij}|| = \begin{Vmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} f-g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (5.4-14)$$

La expresión del tensor de segundo orden que se transforma en las Ecs. 5.4—11, 12 para R_{11}, R_{22} y R_{33}, y da también $R_{ij} = 0$ para $i \neq j$, es

$$R_{ij} = g(r, t)\delta_{ij} + [f(r, t) - g(r, t)]\frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \qquad \textbf{(5.4–15)}$$

Puesto que esta expresión se transforma como un tensor de segundo orden, es la expresión general de R_{ij} cuando B' y B'' están localizados arbitrariamente.

Utilizando la ecuación de continuidad en B'' (Ec. 5.4—6), se puede escribir (después de multiplicar por v'_j)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i''} v_j' v_i'' = 0 \qquad (5.4\text{-}16)$$

Dividiendo por $\overline{v'^2}$ y efectuando el ajuste de tiempo, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i''} R_{ji} = 0 \qquad \textbf{(5.447)}$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} R_{ji} = 0 \qquad (5.4\text{-}18)$$

Substituyendo la Ec. 5.4-15 en esta última expresión se llega a

$$f - g = -\frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r} \qquad \textbf{(5.4–19)}$$

que permite expresar la Ec. 5.4— 15 totalmente en función de $f(r,$ t):

$$R_{ij} = \left(f + \frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r}\right)\delta_{ij} + \left(-\frac{1}{2} r \frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \qquad \textbf{(5.4-20)}$$

De esta forma, se han expresado todos los componentes R_{ij} mediante la función escalar $f(r,$ t),

La correlación T_{ijk}

Consideremos una vez más el caso especial en el que B' y B'' están sobre el eje x_1. Por razones de isotropia, análogas a las utilizadas anteriormente, se puede demostrar[1] que existen en este caso siete componentes no nulos que pueden expresarse mediante tres funciones escalares:

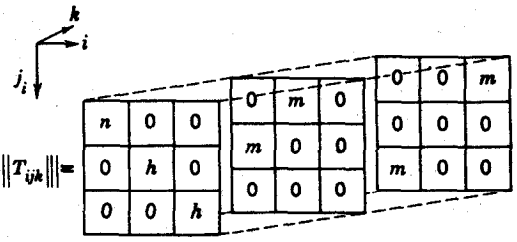
$$T_{111} = \frac{\overline{v_1'^2 v_1''}}{(v'^2)^{3/2}} = n(r, t) \tag{5.4-21}$$

$$T_{122} = T_{133} = T_{212} = T_{313} = m(r, t) \tag{5.4-22}$$

$$T_{221} = T_{331} = h(r, t) \tag{5.4-23}$$

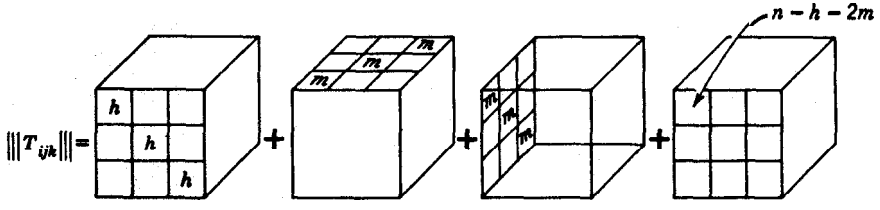
De forma que cuando B' y B'' están ambos sobre el eje x_1, la matriz de T_{ijk} es de la forma siguiente :

(5.4-24)



Esta matriz puede dividirse en cuatro partes:

(5.4-25)



Todos los cubos que no están señalados son cero. Por lo tanto, una expresión adecuada del tensor de tercer orden, que reproduce la Ec. 5.4-25, es

$$T_{ijk} = h\delta_{ij}\frac{\xi_k}{r} + m\delta_{jk}\frac{\xi_i}{r} + m\delta_{ik}\frac{\xi_j}{r} + (n - h - 2m)\frac{\xi_i\xi_j\xi_k}{r^3} \tag{5.4-26}$$

Teniendo en cuenta que esta expresión se transforma como un tensor de tercer orden, representa la expresión general de T_{ijk} cuando B' y B'' están localizados arbitrariamente.

Aplicando la ecuación de continuidad, de forma análoga que en los dos casos precedentes, se llega a la conclusión de $n = -2h$ y $m = -h - \frac{1}{2}r(\partial h/\partial r)$, lo que permite expresar la Ec. 5.4-26 totalmente en función de h:

$$T_{ijk} = h\delta_{ij}\frac{\xi_k}{r} + \left(-h - \frac{1}{2}r\frac{\partial h}{\partial r}\right)\left(\delta_{jk}\frac{\xi_i}{r} + \delta_{ik}\frac{\xi_j}{r}\right) + \left(-h + r\frac{\partial h}{\partial r}\right)\frac{\xi_i\xi_j\xi_k}{r^3}$$

(5.4-27)

Vamos a deducir ahora una ecuación para R_{ij}, a partir de la ecuación de Navier-Stokes, para el caso de que 6 = 0. En el punto B' el componente i de la ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} + \Sigma_j v_j'\frac{\partial v_i'}{\partial x_j'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \nu\Sigma_j\frac{\partial^2}{\partial x_j'^2}v_i' \qquad (5.4\text{-}28)$$

Al multiplicar esta ecuación por v_k'' y proceder al ajuste de tiempo (utilizando el hecho de que $\overline{p'v_k''} = 0$), se obtiene,

$$\overline{v_k''\frac{\partial v_i'}{\partial t}} - \Sigma_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\overline{v_i'v_j'v_k''} = \nu\Sigma_j\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\overline{v_i'v_k''} \qquad (5.4\text{-}29)$$

En este caso se ha utilizado la ecuación de continuidad $\Sigma_j\partial v_j/\partial x_j = 0$.

Una multiplicación análoga por v'_i del componente k de la ecuación de movimiento en B'' y el ajuste de tiempo, conduce a

$$\overline{v_i'\frac{\partial v_k''}{\partial t}} - \Sigma_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\overline{v_j'v_k'v_i''} = \nu\Sigma_j\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\overline{v_i'v_k''} \qquad (5.4\text{–}30)$$

Sumando estos dos resultados se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{v'^2}R_{ik} - (\overline{v'^2})^{3/2}\Sigma_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}(T_{ijk} + T_{kji}) = 2\nu\overline{v'^2}\Sigma_j\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}R_{ik} \qquad (5.4\text{-}31)$$

Esta ecuación de R_{ik} contiene también la correlación de tercer orden T_{ijk}. De igual forma, una ecuación de T_{ijk} sólo puede expresarse en función de una correlación de cuarto orden, y así sucesivamente.

Es decir, que resulta toda una «jerarquía» de ecuaciones para las funciones de correlación, y, por consiguiente, no es posible resolver con exactitud para hallar R_{ik}.

Se efectúa ahora la operación de «contracción» en la Ec. 5.4-31 (tomando $i = k$ y sumando sobre i):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'^2}\Sigma_i R_{ii}) - 2(\overline{v'^2})^{3/2}\Sigma_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Sigma_i T_{iji} = 2\nu\overline{v'^2}\Sigma_j\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}\Sigma_i R_{ii} \qquad (5.4\text{-}32)$$

De acuerdo con las Ecs. 5.4—20 y 27, las expresiones $\Sigma_i R_{ii}$ y $\Sigma_i T_{iji}$ son,

$$\Sigma R_{ii} = \left(3 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) f \qquad (5.4\text{-}33)$$

$$\Sigma T_{iji} = -\frac{\xi_j}{r}\left(4 + r\frac{\partial}{\partial r}\right) h \qquad (5.4\text{-}34)$$

Estas expresiones se substituyen en la Ec. 5.4—32, [en la que $\Sigma_i \partial^2/\partial\xi_j^2$ se ha reemplazado por su equivalente en coordenadas esféricas: $\partial^2/\partial r^2 + (2/r)\,\partial/\partial r$] con lo que, después de efectuar algunas simplificaciones, se obtiene:

$$\left(3 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{v'^2} f + 2(\overline{v'^2})^{1/2}\left(\frac{4}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) h - 2\nu\overline{v'^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) f\right] = 0 \qquad (5.4\text{-}35)$$

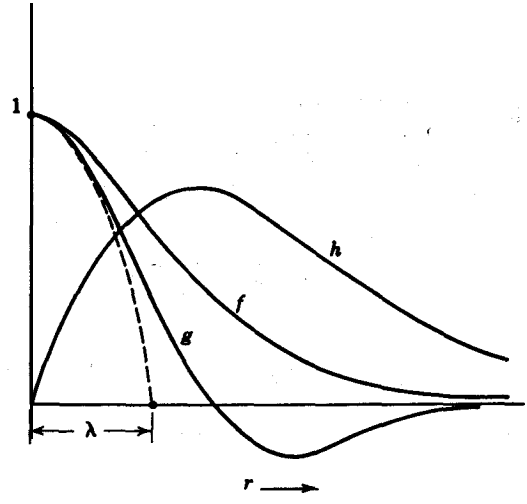


Fig. 5.4-3. Descripción gráfica de la forma de las funciones *f*, *g*, h. La microescala de Taylor de turbulencia es la intersección sobre el eje r de una parábola que ajusta la curva $g(r)$ para valores pequeños de *r*.

La integración de esta ecuación indica que la expresión que esta entre corchetes es igual a C/r^3, siendo C una constante de integración. Como [ ], no se hace infinito cuando $r \to 0$, C tiene que ser cero, y por lo tanto, se obtiene finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'^2} f) = 2\nu\overline{v'^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\nu} h\right) \qquad (5.436)$$

que es la ecuación de von Kármán-Howarth para la función de correlación de segundo orden f (r, t). Las medidas de f, h y $\overline{v'^2}$, realizadas con un anemómetro de alambre caliente, indican que esta ecuación se cumple dentro de los errores experimentales.[4] Basándose en esta concordancia entre la teoría y las medidas experimentales, algunos autores[5] justifican la utilización de la ecuación de Navier-Stokes como punto de partida para la descripción del flujo turbulento. En la Fig. 5.4-3 se indican las formas generales de las funciones f, g y h. La integral bajo la curva $f(r)$, es decir, $\int_0^\infty f(r)\,dr$, es una medida del tamaño de remolino, que se conoce con el nombre de *escala de turbulencia.* Se ha dedicado una considerable atención al estudio de la Ec. 5.4-36 o su transformador de Fourier[1,6], habiéndose obtenido varias soluciones límite que han contribuido al mejor conocimiento de la estructura de la turbulencia. Para una más amplia información, el lector debe acudir a los trabajos originales, así como a diversos libros dedicados al estudio de la turbulencia. [3,7,8,9]

Ejemplo 5.4-1. Caída de turbulencia detrás de una rejilla

Tómese $r = 0$ en la ecuación de von Kármán-Howarth y hállese una ecuación para la variación de $\overline{v'^2}$ con el tiempo (es decir, la «caída» de la intensidad de turbulencia). Utilícese la expresión de Taylor para la microescala de turbulenciaa, con el fin de realizar una integración de la ecuación de caída.

Solución. Cuando r = 0, se tiene que $f = 1$ y $h = 0$. Puesto que $f(r, t)$ es una función de orden par de r,

$$f(r, t) = 1 + \frac{1}{2!}f_0''r^2 + \frac{1}{4!}f_0''''r^4 + \cdots \qquad (5.4\text{–}37)$$

Y

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=0} = 5f_0'' \qquad (5.4\text{-}38)$$

Por lo tanto, para r = 0, la Ec. 5.4-36 se hace

$$\frac{d}{dt}\overline{v'^2} = 10\nu f_0''\overline{v'^2} = -10\nu\frac{\overline{v'^2}}{\lambda^2} \qquad (5.4\text{-}39)$$

en la que se ha introducido la longitud λ, que se denomina «microescala de turbulencia» de Taylor y cuyo significado geométrico se indica en la Fig. 5.4-3.

---

[4] R. W. STEWART, *Proc. Camb. Phil. Soc., 47,* 146-157 (1951).
[5] A. A. TOWNSEND, *op. cit.*, p. 35.
[6] T. VON KÁRMÁN y C. C. LIN, *Advanced Applied Mechanics,* Academic Press, vol. II (1951).
[7] G. K. BATCHELOR, *The Theory of Homogeneous Turbulence,* Cambridge University Press (1953).
[8] J. O. HINZE, *Turbulence,* McGraw-Hill, Nueva York (1959).
[9] L. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics,* Addison-Wesley, Reading (1960), capítulo 3.

Mediante la aplicación del análisis dimensional al estudio de los datos de la caída de turbulencia, Taylor[2] propuso que λ está relacionada con la separación M de las mallas de la red que produce la turbulencia, según la siguiente ecuación:

$$\frac{\lambda}{M} = A\sqrt{\frac{\nu}{M\sqrt{\overline{v'^2}}}} \tag{5.4-40}$$

en la que A es una constante. Substituyendo esta expresión en la Ec. 5.4-39 y reemplazando d/dt por $V(d/dx)$, donde V es la velocidad (uniforme) de tiempo ajustado del fluido, se obtiene

$$V\frac{d}{dx}\overline{v'^2} = -\frac{10\nu\overline{v'^2}}{M^2A^2}\left(\frac{M(\overline{v'^2})^{1/2}}{\nu}\right) \tag{5.4-41}$$

La integración de esta ecuación conduce a

$$\frac{V}{\sqrt{\overline{v'^2}}} = \frac{5}{MA^2}x + \text{constante} \tag{5.4-42}$$

Este comportamiento se ha observado experimentalmente para la caída de la intensidad de turbulencia con la distancia, detrás de una rejilla, habiéndose encontrado que A tiene un valor de 1,95 a 2,20. La idoneidad de la Ec. 5.4-42 lleva a la conclusión que la propuesta de Taylor de la **Ec. 5.4−40** proporciona una útil información acerca de la relación existente entre el tamaño del remolino y el espaciado de **malla.**

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿**Por qué** no puede utilizarse la **Ec.** 5.1-3 para hallar la **fuerza** resistente que **actúa** sobre la pared el **tubo,** evaluando el gradiente de velocidad en la pared?

2. Definir la presión instantánea, la presión de **tiempo** ajustado y la **fluctuación** de **presión.**

3. Discútase el significado **físico** de las curvas de la Fig. **5.1−5** en función de los **términos** $[\nabla \cdot \bar{\tau}^{(t)}]$ y $[\nabla \cdot \bar{\tau}^{(t)}]$ de la **Ec.** 5.2-8.

4. ¿ **Qué** relación existe entre el tensor R_{ij} de **§** 5.4 y los esfuerzos de Reynolds de **§ 5.2?**

5. ¿**La** transición de movimiento laminar-turbulento tiene siempre lugar para el valor del número de Reynolds **Re** = **2,1** x 10^3**?**

6. Comparar el flujo laminar y turbulento en un tubo por lo que respecta a (a) el **perfil** de velocidad, *(b)* la **relación** de velocidad media a **velocidad** máxima. (c) variación de velocidad de flujo con la **caída** de presión.

7. Resumir todas las suposiciones que conducen a la **Ec.** 5.3 − 12 (corrientemente denominada «**perfil** universal de velocidad»).

8. Deducir la **Ec.** 5.3-16 por los dos métodos que se sugieren en el libro.

9. ¿**Por** qué es de esperar que la función f de von **Kármán-Howarth** sea cero para valores grandes de r?

10. La turbulencia para el flujo en un tubo, ¿**es homogénea** o **isotrópica?**
(Utilícense las Figs. 5.1-4 y 5, y las definiciones de **§** 5.4.)

11. Resumir las suposiciones inherentes a la **ecuación** de von **Kármán-Howarth.**

12. Explicar **cómo** ha desaparecido el signo del valor absoluto al pasar de la **Ec.** 5.3-2 a la **Ec. *5.3-5.***

PROBLEMAS

5.A_1 Caída de presión necesaria para la transición de flujo laminar a turbulento

Un fluido de viscosidad 18,3 cp y densidad 1.32 g cm-3 circula por un tubo horizontal de ll mm de diámetro. ¿Para que gradiente de presión (expresado en atm/m) comenzará el flujo a ser turbulento ?

Respuesta: 414 atm/m.

5.B_1 Distribución de velocidad para el flujo turbulento en mm tubería

Por una tubería larga, recta, horizontal y lisa, de 15 cm de diámetro interno, circula agua. a 20° C. El gradiente de presión a lo largo de la tubería es 0,040 atm/km.

a. Hallar el esfuerzo cortante de pared τ_0, expresado en atm.

b. Suponiendo que el flujo es turbulento, determinar las distancias radiales medidas desde la pared de la tubería, para las cuales $\bar{v}/\bar{v}_{max}$ = 0,0, 0,1, 0,2, 0,4, 0,7, 0,85 y 1,0. Utilizar la Fig. 5.3-1 para los cálculos.

c. Representar el perfil completo de velocidad, $\bar{v}/\bar{v}_{max}$ frente a $s = R - r$.

d. ¿Está justificada la suposición de flujo turbulento?

e. ¿Cuál es la velocidad volumétrica de flujo?

5.C_2 Velocidad media de flujo para el flujo turbulento en un tubo

Para el flujo turbulento en un tubo circular liso resulta a veces conveniente emplear la función ajustada mediante una curva:[1]

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,máx}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \tag{5.C-1}$$

siendo los valores de n, para números de Reynolds del orden que se indican, los siguientes: Re = 4 x 10^3, n = 6; Re = 1,1 x 10^5, n = 7; y Re = 3,2 x 10^6, n = 10. Demostrar que la relación de la velocidad media a la máxima es

$$\frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,máx}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \tag{5.C-2}$$

y comprobar el resultado de la Ec. 5.1-4.

b. Obtener la relación de la velocidad media a la máxima mediante la integración de la Ec. 5.3 — 12 extendida a toda la sección del tubo (es decir, que se desprecia el error que se comete por no tener en cuenta la subcapa laminar). ¿En que se diferencia la forma de este resultado del obtenido en el apartado *(a)*?

5.D_2 Distribución de velocidad en un canal rectangular

Un fluido circula en la dirección z por un canal rectangular de semiespesor h (en la dirección y) con flujo turbulento totalmente desarrollado. Se supone que el canal es muy ancho en la dirección x, de forma que $\bar{v}_z = \bar{v}_z(y)$.

---

[1] H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, Braun, Karlsruhe (1951), pp. 364-366.

a. Demostrar que la ecuación que describe el núcleo turbulento de acuerdo con la hipótesis de semejanza de von **Kármán,** es

$$\tau_0 \frac{y}{h} = \rho\kappa_2^2 \frac{(d\bar{v}_z/dy)^4}{(d^2\bar{v}_z/dy^2)^2} \qquad 0 < y < h \tag{5.D-1}$$

siendo τ_0 el esfuerzo cortante de pared, e y la distancia medida desde el plano medio del canal.

b. Integrar la **Ec. 5.D−1** para demostrar que la **distribución** de velocidad está dada por

$$\frac{v_{z,\max} - \bar{v}_z}{v_*} = -\frac{1}{\kappa_2}\left[\ln\left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right) + \sqrt{\frac{y}{h}}\right] \qquad 0 < y < h \tag{5.D-2}$$

en la que $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. (Nota: Al efectuar la **integración** ha de utilizarse la condición límite ficticia de que $d\bar{v}_z/dy = -\infty$ para y = h. **Explíquese.**)

c. ¿**Es** plano el perfil de velocidad $\bar{v}_z(y)$ en el centro del canal (y = O)?

5.E$_3$ Perfil turbulento de velocidad en un tubo (Método de Pai)[2]

En § 5.3 se ha demostrado que puede obtenerse alguna información acerca de la distribución de velocidad de tiempo ajustado, utilizando relaciones empíricas entre la densidad de flujo turbulento de cantidad.de movimiento y el gradiente de velocidad de tiempo ajustado. Otro camino consiste en suponer una **relación** entre la densidad de flujo turbulento de cantidad de movimiento y la distancia. Esta suposición conduce generalmente a integraciones mucho mas sencillas. Considérese, como ejemplo, el flujo en un tubo circular.

a. Demostrar que, para el flujo turbulento en un tubo, las ecuaciones de movimiento de tiempo ajustado se reducen a

$$-\rho\frac{\overline{v_\theta'^2}}{r} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\bar{\tau}_{rr}^{(t)} \tag{5.E-1}$$

$$0 = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\tau}_{rz}^{(t)}) \tag{5.E-2}$$

b. Justificar el postulado de que $\overline{v_\theta'^2}, \bar{\tau}_{rr}^{(t)}, \bar{v}_z$, y $\bar{\tau}_{rz}^{(t)}$ son funciones de r (pero no de θ y z). Demostrar que esto lleva al resultado $-\partial\bar{p}/\partial z = A$, una constante.

c. Introducir los siguientes números adimensionales:

$$\phi = \frac{\bar{v}_z}{v_*}; \qquad \xi = \frac{r}{R}; \qquad \tau = \frac{\bar{\tau}_{rz}^{(t)}}{\tau_0}; \qquad \mathrm{Re}_* = \frac{Rv_*\rho}{\mu} \tag{5.E-3,4,5,6}$$

siendo $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, y τ_0 el esfuerzo cortante de pared. Demostrar que la **Ec. 5.E−2** puede, por consiguiente, expresarse así:

$$0 = B + \frac{1}{\mathrm{Re}_*}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\phi}{d\xi}\right) - \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi\tau) \tag{5.E-7}$$

siendo B una constante que está relacionada con A en una forma sencilla. Demostrar que integrando una vez esta ecuación se obtiene

---

[2] S. 1. PAI, *Viscous Flow Theory*, vol. II, Van Nostrand, Princeton (1957), pp. 41-44.

$$\frac{C}{\xi} = \frac{1}{2} B\xi + \frac{1}{\mathrm{Re}_*} \frac{d\phi}{d\xi} - \tau \qquad (5.E\text{–}8)$$

d. Determinar las constantes B y C utilizando las siguientes condiciones límites (explíquese su significado físico):

$$\text{Para } \xi = 0: \qquad \tau = \text{finito}, \qquad d\phi/d\xi = \text{finito} \qquad (5.E\text{–}9)$$

$$\text{Para } \xi = 1: \qquad \tau = 0, \qquad d\phi/d\xi = Re, \qquad (5.E\text{–}10)$$

y demostrar que la Fc. 5.E–8 se hace finalmente

$$0 = \xi + \frac{1}{\mathrm{Re}_*} \frac{d\phi}{d\xi} - \tau \qquad (5.E\text{–}11)$$

e. La Fc. 5.E–ll puede integrarse si se expresa τ en función de ξ. Teniendo en cuenta la Fig. 5.1–5 se puede sugerir la siguiente función:

$$\tau = \epsilon + (1 - \epsilon)\xi^{2n-1} \qquad (5.E12)$$

siendo $\epsilon \ll 1$ y n un número entero positivo muy grande. ¿Por que es ésta una elección satisfactoria? Demostrar que la Ec. 5.E–12 conduce a la siguiente distribución de velocidad:

$$\frac{\bar{v}_z}{v_{\text{máx}}} = 1 - \left(\frac{n\epsilon}{(n-1)\epsilon + 1}\right)\xi^2 - \left(\frac{1-\epsilon}{(n-1)\epsilon + 1}\right)\xi^{2n} \qquad (SE\text{-}13)$$

que cumple las condiciones límite en la pared.

f. Demostrar que la velocidad media es

$$\frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,\text{máx}}} = \frac{n[(n-1)\epsilon + 2]}{2(n+1)[(n-1)\epsilon + 1]} \qquad (5.E\text{–}14)$$

Las constantes n y ϵ con funciones del número de Reynolds. Pai encontró que $\epsilon = 0{,}0161$ y $n = 33$ para un número de Reynolds $\bar{v}_{z,\text{máx}} R\rho/\mu = 25\,000$ e indicó que se obtiene un buen ajuste de los datos experimentales aun cerca de la pared.

5.F$_3$ Distribución turbulenta de velocidad en un anillo[3]

Las medidas experimentales de perfiles[4,5] sugieren que λ (véase Fig. 5.F) para el flujo turbulento (por lo menos a elevados números de Reynolds) vale aproximadamente lo mismo que λ para el flujo laminar. Se admite, por consiguiente, que para flujo turbulento

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-\kappa}{2\ln(1/\kappa)}} \qquad (5.F\text{–}1)$$

---

3 D. M. METER y R. B. BIRD, A. *I. Ch. E. Journal, 7,* 41-45 (196 1).

4 J. *G.* KNUDSEN *y* D. L. KATZ, *Fluid Dynamics and Heat Transfer,* McGraw-Hill, Nueva York (1958).

5 R. R. ROTHFUS, *tesis doctoral,* Cárnegie Institute of Technology (1948); J. E. WALKER, *tesis doctoral,* Carnegie Institute of Technology (1957); G. A. WHAN, *tesis doctoral,* Carnegie Institute of Technology (1956).

(Véase Ec. 2.4-11.) Demostrar, siguiendo la deducción del ejemplo 5.3-1, que la distribución de velocidad en el anillo, para el mismo grado de aproximación, es,

$$v_{z,\max} - \bar{v}_z = \frac{1}{\kappa_1}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\lambda^2\sqrt{1-\kappa^2}\ln\frac{(\lambda-\kappa)R}{r-\kappa R} \qquad r<\lambda \tag{5.F-2}$$

$$\bar{v}_{z,\max} - \bar{v}_z = \frac{1}{\kappa_1}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\sqrt{1-\lambda^2}\ln\frac{R-\lambda R}{R-r} \qquad r>\lambda \tag{5.F-3}$$

siendo $\tau_0 = \Delta p(R/2L)$, (Ap = caída de presión, L = longitud del anillo).

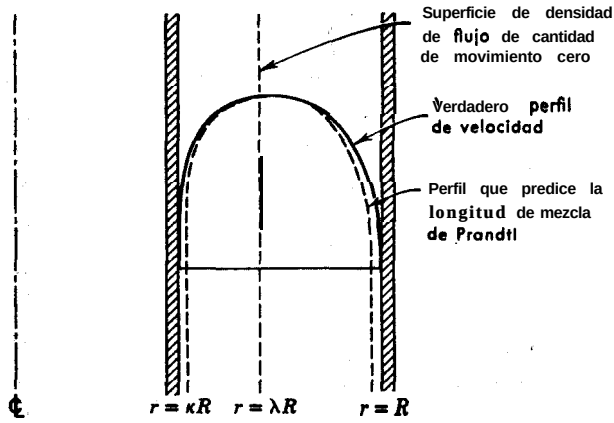


Fig. **5.F.** Perfil turbulento de velocidad en un anillo.

5.G$_3$ Otra deducción de la ecuación de decaimiento de Taylor

Originalmente Taylor[6] dedujo la Ec. 5.4-39 por un camino distinto del expuesto en el ejemplo 5.4-1. Aquí se presenta otra versión de la deducción de Taylor, debida a von Kármán y Howarth:

a. Demostrar primeramente que

$$\overline{\frac{\partial v_k'}{\partial x_i'}v_i''} = \frac{\partial}{\partial x_i'}\overline{v_k'v_i''} = -\overline{v'^2}\frac{\partial R_{kl}}{\partial \xi_i} \tag{5.G-1}$$

b. Derivar esta expresión con respecto a x_j'' para obtener

$$\overline{\frac{\partial v_k'}{\partial x_i'}\frac{\partial v_l}{\partial x_j''}} = \frac{\partial}{\partial x_j''}\overline{\frac{\partial v_k'}{\partial x_i'}v_l''} = -\overline{v'^2}\frac{\partial^2 R_{kl}}{\partial \xi_j\,\partial \xi_i} \tag{5.G-2}$$

c. Demostrar, a partir de *(b),* que cuando B' y B" coinciden

$$\overline{\frac{\partial v_k'}{\partial x_i'}\frac{\partial v_l}{\partial x_j}} = -\overline{v'^2}\left(\frac{\partial^2 R_{kl}}{\partial \xi_i\,\partial \xi_j}\right)_{\xi_1=\xi_2=\xi_3=0} \tag{5.G-3}$$

---

[6] G. I. TAYLOR, *Proc. Roy Soc. (London),* **A151, 421-512 (1935).**

d. Demostrar que, igualando la disminución de energia cinética detrás de una rejilla con la «pérdida» de energía mecánica por disipación viscosa, para turbulencia isotrópica homogénea, se obtiene

$$-\frac{3}{2}\rho V\frac{d}{dx}\overline{v'^2} = 6\mu\left[\overline{\left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_2}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_2}\frac{\partial v_2'}{\partial x_1}\right)}\right] \tag{5.G-4}$$

e. Utilizar el. resultado del apartado (c) y la expresión de R_{kl} en función de f para evaluar las derivadas del apartado *(d)* y obtener la Ec. 5.4-39.

5.H$_3$ Distribución de velocidad en un chorro turbulento plano

El flujo turbulento sin existencia de una superficie que lo limita se denomina «turbulencia libre». Uno de los problemas más sencillos de flujo de cizalla en turbulencia libre es el del flujo en un chorro plano. (Véase Fig. 5.H.)

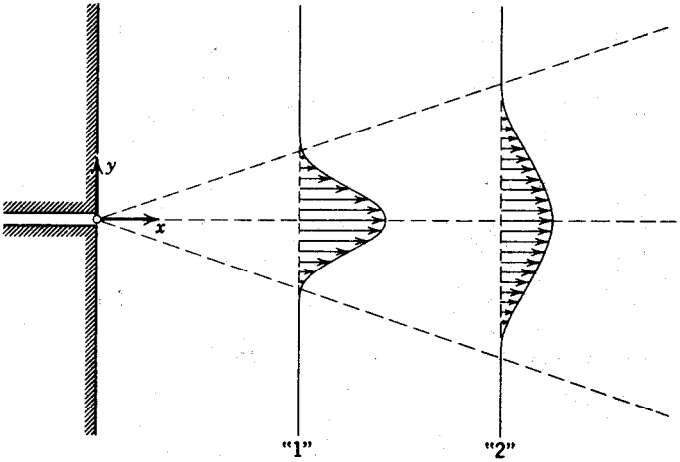


Fig. 5.H. Chorro turbulento plano.

La primera descripción de este sistema se basa en la teoría de longitud de mezcla de Prandtl,[7] en la que l se considera proporcional a x. En este problema se emplea una teoría algo más sencilla, basada en la utilización de la viscosidad de remolino.s.[9]

a. Demostrar que la siguiente forma de los componentes de la velocidad está de acuerdo con la ecuación de continuidad:

$$\bar{v}_x/\nu = x^{-\frac{1}{2}}F'(\eta) \tag{5.H-1}$$

$$\bar{v}_y/\nu = [-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}F(\eta) + \eta x^{-\frac{1}{2}}F'(\eta)]\sigma^{-1} \tag{5.H-2}$$

---

7 W. Tollmien, *Z. angew. Math. Mech.*, **6**, 468-478 (1926).
8 H. Görtler, *Z. angew. Mech.*, *22*, *244-254* (1942).
9 H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), capitulo 23, § 5.

en la que $\eta = \sigma(y/x)$, siendo σ una constante arbitraria y V una velocidad característica, todavía no especificada.

b. Demostrar que la **Ec. 5.H−1** lleva a la conclusión de que la velocidad de flujo de la cantidad de movimiento x a través de un plano (tal como «1» o «2») no varía con x.

c. Demostrar que la ecuación de movimiento de tiempo ajustado, tomando $\nu^{(t)} = \mu^{(t)}/\rho$ proporcional a $x^{1/3}$ (es decir, $\nu^{(t)} = kx^{1/3}$), es

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -k\sqrt{x}\,\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \qquad \textbf{(5.H-3)}$$

d. Demostrar que, de acuerdo con el apartado (o), la **Ec. 5.H−3** resulta

$$\tfrac{1}{2}(F')^2 + \tfrac{1}{2}FF'' + k\sigma^2 F''' = 0 \qquad \text{(5.H-4)}$$

Puesto que intervienen en un producto dos constantes arbitrarias *k* y σ, se puede tomar arbitrariamente que $\frac{k\sigma^2}{V}$ sea igual a $\frac{1}{4}$, de forma que la **Ec. 5.H−4** se reduce a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}(FF') + \frac{1}{4}\frac{d}{d\eta}(F') = 0 \qquad \textbf{(5.H-5)}$$

e. Demostrar que esta ecuación puede integrarse tres veces para obtener

f. Si *J* se define como

$$F = \tanh \eta \qquad \textbf{(5.H-6)}$$

$$J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v}_x^2 \, dy \qquad \textbf{(5.H-7)}$$

demostrar que

$$\bar{v}_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{J\sigma}{\rho}(1 - \tanh^2 \eta) \qquad \textbf{(5.H-8)}$$

Si se toma para σ el valor **7,67**, este resultado conduce a un ajuste de datos bastante bueno para valores de η hasta aproximadamente **1,5**. Por encima de η = **1,5** los valores de $\bar{v}_x$ que se obtienen son demasiado altos.

CAPÍTULO 6

TRANSPORTE DE INTERFASE EN SISTEMAS ISOTÉRMICOS

En los capítulos precedentes se ha visto cómo se pueden plantear y resolver problemas de flujo laminar, y se ha indicado que la solución de problemas de flujo turbulento depende de la utilización de relaciones empíricas entre la densidad' de flujo de cantidad de movimiento y los gradientes de velocidad de tiempo ajustado. Hasta aquí se han considerado siempre sistemas de geometría relativamente sencilla, ya que los problemas geométricamente complejos requieren un trabajo considerable para su solución, siendo preciso generalmente utilizar máquinas calculadoras de gran rapidez. De todas formas, la determinación rigurosa de perfiles de velocidad para una columna de relleno por procedimientos analíticos o numéricos cae completamente fuera del tema.

Muchos problemas ingenieriles de flujo pertenecen a uno de estos dos grandes grupos: flujo *en* conductos y flujo alrededor de objetos sumergidos. Ejemplos de flujo en conductos son el bombeo de petróleo por tuberías, flujo de agua en canales abiertos, extrusión de plásticos y flujo de un fluido a través de un filtro. Ejemplos de flujo alrededor de objetos sumergidos son el movimiento de aire alrededor de las alas de un avión, movimiento de fluidos alrededor de partículas en sedimentación y flujo a través de una bancada de tubos en un cambiador de calor.

En los problemas de flujo en conducciones se trata generalmente de obtener la relación existente entre la caída de presión y la velocidad volumétrica de flujo. En los problemas de flujo alrededor de objetos sumergidos, lo que frecuentemente se desea conocer es la relación entre la velocidad de aproximación del fluido y la fuerza resistente. En los capítulos precedentes se ha visto que si se conocen las distribuciones de velocidad y presión en el sistema, se pueden hallar las relaciones que se desean en ambos casos. (Como ejemplo de los dos grupos que se consideran aquí, véanse las discusiones de §§ 2.3 y 2.6.)

Debido a que para muchos sistemas que presentan gran interés en ingeniería no es posible calcular los perfiles de velocidad y presión, hay que recurrir a otros métodos para hallar la caída de presión en función del caudal y la fuerza resistente en función de la velocidad. Para ello, se utilizan algunos datos experimentales de estas variables Con el fin de construir gráficas o «correlaciones» que permiten estimar el comportamiento de flujo de sistemas geométricamente semejantes. Para el esta-

blecimiento de estas «correlaciones» resulta lógico y conveniente emplear variables adimensionales y tener en cuenta la discusión que se ha presentado en § 3.7.

Este capítulo está dedicado a la obtención y uso de las gráficas del «factor de fricción». La discusión que sigue deberá de considerarse como una introducción al tema, pudiendo encontrar, si se desea, mucha más información en los manuales de ingeniería química, mecánica y civil. Las gráficas del factor de fricción se utilizan para resolver muchos problemas de gran importancia práctica, y es muy conveniente que el estudiante aprenda bien esta cuestión.

§ 6.1 DEFINICIÓN DE FACTORES DE FRICCIÓN

Vamos a considerar el flujo estacionario de un fluido de ρ constante en cada uno de estos dos sistemas: *(a)* el fluido circula por una conducción recta de sección uniforme; *(b)* el fluido circula alrededor de un objeto sumergido-qué tiene un' eje o un plano de simetría paralelo a la velocidad de aproximación del fluido. El fluido ejercerá sobre las superficies sólidas una fuerza F, que puede desdoblarse en dos: F_s, la fuerza que ejercería el fluido aunque entuviese en reposo, y F_k, la fuerza adicional relacionada con el comportamiento cinético del' fluido (para una más amplia discusión de esta notación, véase § 2.6). En los sistemas de tipo *(a)*, F_k tiene la misma dirección que la velocidad media $\langle v \rangle$ 'en la conducción,' y en los sistemas de tipo *(b)*, F_k es de la misma dirección 'que la velocidad de aproximación v_∞.

El valor de la fuerza F_k puede expresarse arbitrariamente para ambos sistemas, como el producto de un área característica A, una energía cinética característica por unidad de volumen K y un número adimensional f, denominado ***factor de fricción:***

$$F_k = AKf \tag{6.1-1}$$

Obsérvese que la Ec. 6.1— 1 no es una ley de mecánica de fluidos sino una definición de f; es evidente, que para un determinado sistema de flujo f no está definido mientras no se especifiquen A y K. Esta definición resulta útil porque el número adimensional .f puede expresarse mediante una función relativamente sencilla del número de Reynolds y la forma del sistema. Antes de presentar estas correlaciones adimensionales de f, vamos a dar algunas relaciones para ver cómo puede obtenerse f, para dos sistemas específicos, a partir de datos experimentales.

Para el *flujo* en *conducciones,* generalmente se toma para A la superficie mojada y para K la magnitud $\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2$. Para tubos circulares de radio R y longitud L, f está definido por

$$F_k = (2\pi RL)(\tfrac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2)f \tag{6.1-2}$$

Generalmente, la magnitud que se mide no es F_k sino la caída de presión $p_0 - p_L$ y la 'diferencia de altura $h_0 - h_L$. Aplicando un balance de fuerza al fluido entre 0 y L en la dirección de flujo, cuando éste está totalmente desarrollado, se obtiene

$$F_k = [(p_0 - p_L) + \rho g(h_0 - h_L)]\pi R^2$$
$$= (\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)\pi R^2 \qquad (6.1\text{-}3)$$

Eliminando F_k entre las Ecs. 6.1-2 y 6.1-3 (para $D = 2R$), se obtiene

$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{D}{L}\right)\left(\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2}\right) \qquad (6.1\text{-}4)$$

Esta ecuación muestra explícitamente cómo se calculafa partir de datos experimentales. El factor f se denomina *a veces factor de fricción de Fanning.*[1]

Para el *flujo alrededor de objetos sumergidos,* se toma generalmente, como área característica A, el área que se obtiene al proyectar el sólido en un plano perpendicular a la'velocidad de aproximación del fluido; y K se toma como $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$, siendo v_∞ la velocidad con que se aproxima el fluido al objeto, medida a una gran distancia de este. Por ejemplo, para el flujo alrededor de esferas de radio R, f se define por

$$F_k = (\pi R^2)(\tfrac{1}{2}\rho v_\infty^2)f \qquad (6.14)$$

Generalmente, la magnitud que se mide no es F_k, sino la velocidad límite del objeto cuando cae en el fluido (esta velocidad límite es por lo tanto v,). Para la caída en estado estacionario de una esfera en el seno de un fluido, la fuerza F_k se equilibra exactamente mediante la fuerza de gravitación que actúa sobre la esfera menos la fuerza de flotación (cf. Ec. 2.6-11):

$$F_k = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{esf}}\, g - \tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad (6.1\text{-}6)$$

Eliminando F_k entre las Ecs. 6.1-5 y 6.1-6, se obtiene

$$f = \frac{4}{3}\frac{gD}{v_\infty^2}\left(\frac{\rho_{\text{esf}} - \rho}{\rho}\right) \qquad (6.1\text{-}7)$$

Esta expresión puede utilizarse para calcular f a partir de datos experimentales de velocidad límite. El coeficiente de fricción definido en las Ecs. 6.1-5 y 7 se denomina a *veces coeficiente de resistencia y* se representa por el símbolo c_D. Vemos que los coeficientes de resistencia para objetos sumergidos, y los factores de fricción para el flujo en conducciones, se definen de la misma forma; por lo tanto, es preferible utilizar un solo símbolo y un solo nombre para designar ambos.

§ 6.2 FACTORES DE FRICCIÓN PARA EL FLUJO EN TUBOS

Vamos a combinar ahora la definición de f de la Ec. 6.1-2 con el análisis dimensional de § 3.7, con el fin de ver de qué variables depende f. Consideramos

[1] La definición de f varía de unos libros a otros y por consiguiente hay que tener mucho cuidado al utilizar fórmulas y tablas en las que intervengan factores de fricción.

como sistema una longitud L de tubería lisa horizontal, tal como se indica en la Fig. 6.2-1. La discusión se limita al flujo estacionario[1] de un fluido de ρ y μ constantes, que circula con una velocidad media $\langle v \rangle$. Se supone que se conoce la presión

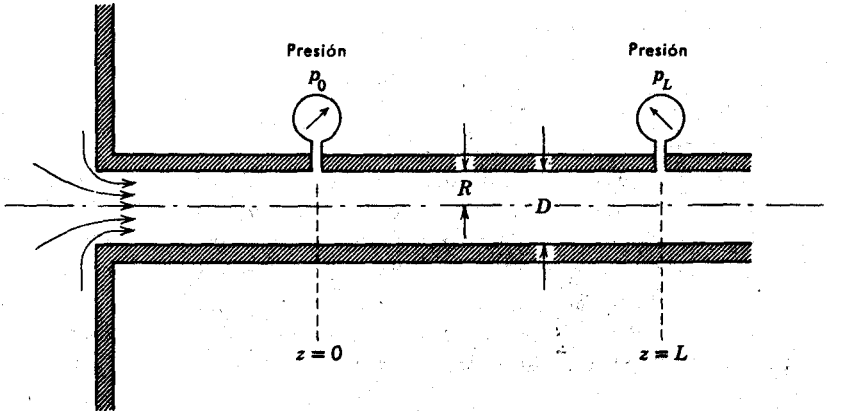


Fig. 6.2-1. Sección de una tubería para el tratamiento de análisis dimensional.

p_0 para $r = 0$ y $z = 0$, así como también la distribución de velocidad en el plano $z = 0$. Para $z < 0$, es evidente que la distribución de velocidad depende de la naturaleza del sistema de flujo. Si esta parte de la tubería es muy larga, v_z para $z = 0$, corresponderá al perfil de velocidad totalmente desarrollado y será independiente de z para $z > 0$. Si la porción de tubería correspondiente a $z < 0$ es muy corta, o no existe, v_z dependerá de z para $z > 0$.

La fuerza del fluido sobre la pared interna de la tubería, tanto para flujo laminar como turbulento, viene dada por

$$F_k = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)\Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz \tag{6.2-1}$$

Igualando las Ecs. 6.2-1 y 6.1-2 se obtiene la siguiente expresión para el factor de fricción :

$$f = \frac{\displaystyle\int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)\Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz}{(2\pi RL)(\tfrac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2)} \tag{6.2-2}$$

Se introducen ahora las magnitudes adimensionales de la sección §3.7: $v_z^* = v_z/\langle v \rangle$,

[1] En el tratamiento que sigue se considera que la presión y la velocidad son de tiempo ajustado. Para abreviar se han suprimido los trazos colocados sobre las variables (véase § 5.1).

$r^* = r/D$, $p^* = (p - p_0)/\rho\langle v\rangle^2$, y Re = $D\langle v\rangle\rho/\mu$. Por tanto, la Ec. 6.2-2 puede escribirse

$$f = \frac{1}{\pi}\frac{D}{L}\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^{L/D}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*}\right)\Big|_{r^*=\frac{1}{2}} d\theta\, dz^* \qquad (6.2\text{–}3)$$

Esta relación es válida para flujo laminar o turbulento en tubos circulares. Resulta, por tanto, que para sistemas de flujo en los que la resistencia depende exclusivamente de fuerzas viscosas (sin resistencia de forma) el producto $f\mathrm{Re}$ es esencialmente un gradiente adimensional de velocidad promediado sobre la superficie.

Recordemos ahora que en principio $(\partial v_z^*/\partial r^*)$ puede calcularse a partir de las Ecs. 3.7-12 y 13 juntamente con las condiciones límite

para $r^* = 1/2$ $\quad v^* = 0$ *(6.2-4)*

para $z^* = 0$ $\quad v^* =$ una función conocida de r^* y θ *(6.2-5)*

para $z^* = 0$ $\quad p^* = 0$ *(6.216)*

Si se resolviesen las Ecs. 3.7-12 y 13, con estas condiciones límite, para obtener p^* y v^*, las soluciones serían necesariamente de la forma[2]

$$v^* = v^*(r^*, \theta, z^*; \mathrm{Re}) \qquad (6.2\text{-}7)$$

$$p^* = p^*(r^*, \theta, z^*; \mathrm{Re}) \qquad (6.2\text{–}8)$$

0 sea que la dependencia funcional incluirá todas las variables reducidas y el único grupo adimensional que aparece en las ecuaciones diferenciales. No se introduce ningún grupo adimensional debido a las anteriores condiciones límite. En consecuencia, $\partial v^*/\partial r^*$ dependerá solamente de r^*, θ, z^*, y Re. Cuando se evalúa el gradiente para $r^* = 1/2$ y se integra sobre z^* y θ, el resultado depende solamente de Re y L/D (que aparece en el límite superior al integrar sobre z^*). Por consiguiente, se llega a la conclusión de que

$$f = f(\mathrm{Re}, L/D) \qquad (6.2\text{-}9)$$

Es decir, que el factor de fricción depende solamente del número de Reynolds y de la relación longitud a diámetro.[3]

Si en el plano z = 0 el perfil de velocidad está totalmente desarrollado, $\partial v^*/\partial r^*$ es independiente de z^*. Efectuando la integración sobre z^* en la Ec. 6.2-3 se obtiene

---

2 Como en esta discusión se considera el flujo de un.fluido de ρ constante en una tubería totalmente llena (es decir, sin superficie libre), la gravedad no influye sobre la distribución de velocidad adimensional. Por consiguiente, en este caso no es preciso tener en cuenta el número de Froude, Fr.

3 Se puede obtener el mismo resultado sin utilizar ninguna ecuación diferencial, con tal de considerar una serie de variables que sean suficientes para especificar la situación física. De acuerdo con el «teorema de pi, de Buckingham», *la relación funcional existente entre* q *magnitudes, cuyas*

LID; este factor se elimina con el factor D/L que aparece delante de la integral. Por consiguiente, en este caso, f es independiente de L/D, y

$$f = f\,(\mathrm{Re}) \qquad (6.2\text{-}10)$$

Si el perfil de velocidad no está totalmente desarrollado en el plano z = 0, pero la longitud de entrada es muy pequeña con relación a L, la integral sobre z^* será muy aproximadamente igual a L/D, y la Ec. 6.2-10 constituye una buena aproximación. Se llega por lo tanto a la conclusión de que la Ec. 6.2-10 es válida cuando (*a*) el perfil de velocidad está totalmente desarrollado o cuando (*b*) $L/D \gg 1$.

Las Ecs. 6.2-9 y 10 son resultados útiles que sirven de guía para la presentación sistemática de datos de velocidad volumétrica de flujo frente a la caída de presión, para el flujo laminar y turbulento en tubos circulares. Es decir, que para tubos *largos* sólo es preciso representar una única curva de f frente a la combinación $D\langle v\rangle\rho/\mu$. Pitnsese que esto es mucho más sencillo que representar separadamente la pérdida de presión frente a la velocidad volumétrica de flujo para valores separados de D, p y μ, que es lo que haría el no iniciado.

Existe una amplia información experimental acerca de la pérdida de presión con la velocidad media (o velocidad volumétrica de flujo) y por consiguiente se puede calcular f a partir de datos experimentales mediante la Ec. 6.1-4. Representando f frente a Re para tubos lisos se obtienen las *curvas de trazado' continuo* que se indican en la Fig. 6.2-2. Estas curvas reflejan el comportamiento laminar y turbulento para el flujo de fluidos en tubos *circulares, largos y lisos.*,

Obsérvese que la curva *laminar* de la gráfica del factor de fricción no es más que una representación gráfica de la ley de Ifagen-Poiseuille correspondiente a la Ec. 2.3-18. Esto puede verse substituyendo una de las $\langle v\rangle$ del denominador de la Ec. 6.1-4 por la expresión de $\langle v\rangle$ de la Ec. 2.3-18. De esta forma, se obtiene para el flujo laminar en tubos largos

$$f = \frac{16}{\mathrm{Re}} \quad \mathrm{Re} < 2{,}1 \times 10^3 \quad \text{estable} \qquad \mathrm{Re} > 2{,}1 \times 10^3 \quad \text{generalmente inestable} \qquad (6.2\text{-}11)$$

---

unidades pueden expresarse en función de u *unidades fundamentales, viene dada en función de* q − u *grupos adimensionales (los grupos* π*).* Si se desea obtener la forma funcional que relaciona $p_0 - p_L$, ρ, $\langle v\rangle$, μ, D, y L, tendremos

$$p_0 - p_L\,[=]\,ml^{-1}t^{-2} \qquad \langle v\rangle\,[=]\,lt^{-1} \qquad D\,[=]\,l$$
$$\rho\,[=]\,ml^{-3} \qquad \mu\,[=]\,ml^{-1}t^{-1} \qquad L\,[=]\,l$$

Por lo tanto, $q = 6$ y $u = 3$. Como grupos adimensionales independientes se pueden elegir los tres siguientes

$$\Pi_1 = \frac{p_0 - p_L}{\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2} \qquad \Pi_2 = \frac{L}{D} \qquad \Pi_3 = \frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu}$$

La elección de estos grupos es arbitraria. Cualquiera de ellos puede substituirse por el producto

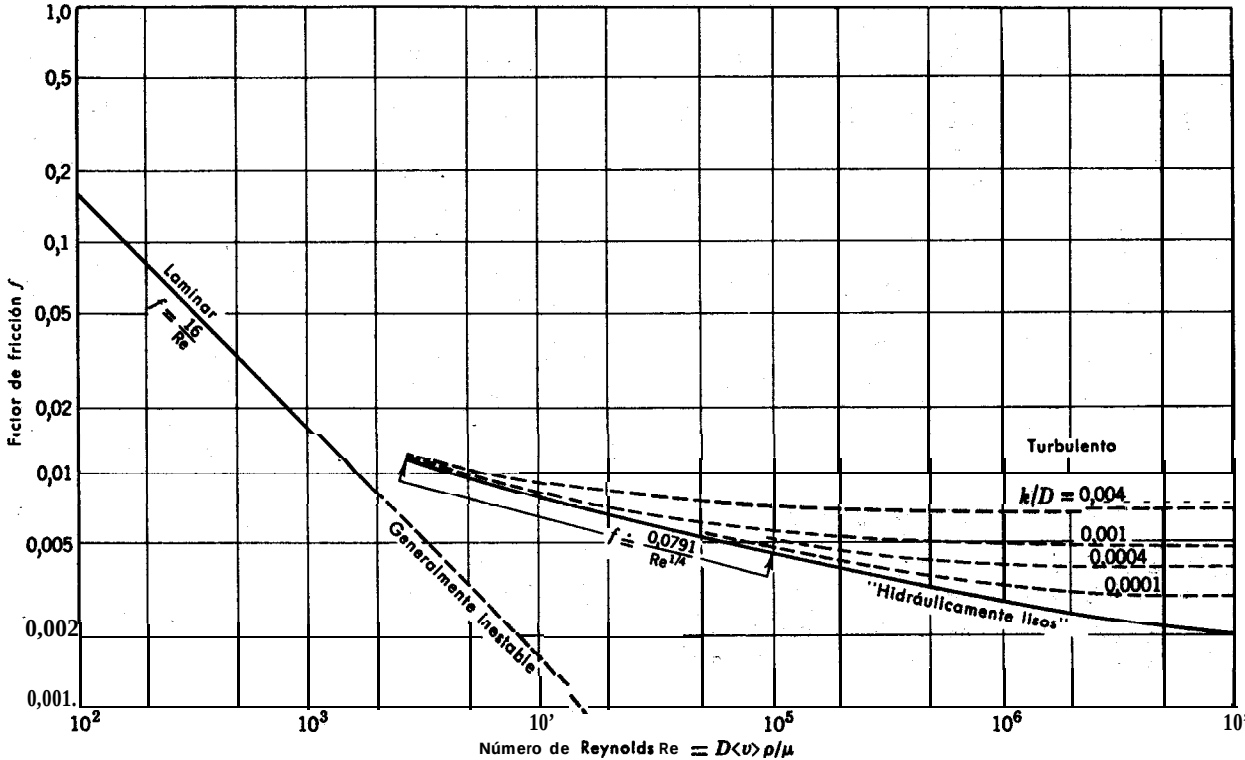


Fig. 6.2-2. Factores de fricción para el flujo en tubos (véase la definición de f en las Ecs. 6.1-2 y 6.1-3). [Curvas de L. F. Moody, *Trans. ASME, 66,671* (1944) presentadas por W. L. McCabe y J. G. Smith, *en Unit Opemtions of Chemical Engineering,* McGraw-Hill, Nueva York (1956)].

siendo Re = $D\langle v\rangle\rho/\mu$; esta ecuación corresponde exactamente a la línea laminar de la Fig. 6.2-2.

La curva análoga para flujo ***turbulento*** de la gráfica del factor de fricción, se ha obtenido a partir de ***datos experimentales.*** También se puede calcular la curva de f frente a Re a partir de alguna de las distribuciones de velocidad en flujo turbulento que se han dado en el Capítulo 5; este tema ha sido tratado ampliamente por Schlichting.[4] Aquí consideraremos solamente la distribución turbulenta de velocidad más sencilla, es decir, la ley de la potencia (1/7):

$$\frac{\bar{v}_z}{v_*} = 8{,}56\left(\frac{sv_*\rho}{\mu}\right)^{1/7} \tag{6.2-12}$$

en la que $v^* = \sqrt{\tau_0/\rho} = \sqrt{(p_0 - p_L)\,R/2L\rho}$ y $s = R - r$. El lector puede comprobar que la velocidad media es

$$\frac{\langle\bar{v}_z\rangle}{v_*} = (0{,}817)(8{,}56)\left(\frac{Rv_*\rho}{\mu}\right)^{1/7} \tag{6.2-13}$$

Forzando la Ec. 6.2-13 a que adquiera la forma de la Ec. 6.1-4, se obtiene para el flujo turbulento en un tubo

$$f = 2\left(\frac{v_*}{\langle\bar{v}_z\rangle}\right)^2 = \left(\frac{2^5}{(8{,}56)^7(0{,}817)^7}\right)^{1/4}\left(\frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu}\right)^{-1/4} \tag{6.2-14}$$

o bien

$$f = \frac{0{,}0791}{\mathrm{Re}^{1/4}} \qquad 2{,}1 \times 10^3 < \mathrm{Re} < 10^5 \tag{6.2-15}$$

Esta ecuación, conocida como ***fórmula de Blasius,*** es satisfactoria para valores del número de Reynolds hasta 10^5 y resulta útil para estimaciones. Utilizando expresiones más exactas para la distribución de velocidad pueden obtenerse relaciones algo más exactas entre f y Re. (Véase problema 6. J.) Para la mayor parte de los cálculos ingenieriles en los que interviene flujo turbulento deberá de utilizarse simplemente la gráfica de la Fig. 6.2-2, puesto que en ella se resumen los datos experimentales en tubos.

Si los tubos circulares son rugosos, se necesita en la región turbulenta una caída de

---

de uno de ellos (elevado a una potencia cualquiera) por cualquiera de los otros elevado a cualquier potencia. El teorema de π nos indica que la relación general debe ser de la forma

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3) = 0 \qquad \text{o} \qquad \Pi_1 = G(\Pi_2, \Pi_3)$$

El teorema de pi tiene el inconveniente de que no selecciona las variables ni determina su importancia relativa; por esta razón, es preferible utilizar la técnica que se sigue en este libro. Para una mayor información sobre el teorema de pi, véase W. H. MCADAMS, *Heat Transmission,* McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, capítulo 5.

[4] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory,* McGraw-Hill, Nueva York (1955), capítulo XX.

presión más elevada, para una determinada velocidad de flujo, que la que indica la línea de trazo continuo de la Fig. 6.2-2. Si se representa por k la altura de las protuberancias, es de esperar que en la correlación intervenga la «rugosidad relativa» k/D. Las líneas de puntos corresponden a las curvas de f frente al Re para distintos valores de k/D. Obsérvese que la rugosidad tiende a hacerse aproximadamente constante a elevados números de Reynolds. El parámetro k/D no es suficiente para definir la forma y distribución de la rugosidad.

Si los tubos no son circulares se puede utilizar un «radio hidráulico medio» empírico, definido por

$$R_h = S/Z \tag{6.2-16}$$

siendo S la sección de la corriente y Z el perímetro mojado. Para el flujo turbulento, puede utilizarse como aproximación la Ec. 6.1-4 y la Fig. 6.2-2, substituyendo el diámetro D del tubo circular por $4R_h$. Es decir, que se calcula la pérdida de presión mediante la fórmula

$$\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2} = \left(\frac{L}{R_h}\right) f \tag{6.2-17}$$

y se obtiene f a partir de la Fig. 6.2-2, utilizando el número de Reynolds definido por

$$\mathrm{Re}_{,,} = \frac{4R_h\langle v\rangle\rho}{\mu} \tag{6.2-18}$$

Este empirismo no es recomendable para el flujo laminar. (Véase problema 6.L.)

Ejemplo 6.2-1. Diferencia de presión necesaria para mm determinada velocidad de flujo

¿ Qué gradiente de presión se requiere para lograr que la N,N-dietilanilina ($C_6H_5N(C_2H_5)_2$ circule por un tubo circular, horizontal, liso, de 3 cm diámetro interno, con una velocidad volumétrica Q = 1,1 litros/seg a 20" C? A esta temperatura la densidad de la dietilanilina es $\rho = 0{,}935$ g cm-s y su viscosidad $\mu = 1{,}95$ cp (o $1{,}95 \times 10^{-2}$ g $\mathrm{cm^{-1}\,seg^{-1}}$).

Solución. Se calcula en primer lugar el número de Reynolds para el flujo

$$\mathrm{Re} = \frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu} = \frac{DQ\rho}{(\pi D^2/4)\mu} = \frac{4Q\rho}{\pi D\mu}$$
$$= \frac{4(1100\ \mathrm{cm^3\,sec^{-1}})(0{,}935\ \mathrm{g\,cm^{-3}})}{\pi(3\ \mathrm{cm})(1{,}95 \times 10^{-2}\ \mathrm{g\,cm^{-1}\,sec^{-1}})} = 2{,}24 \times 10^{4} \tag{6.249}$$

En la Fig. 6.2-2 se encuentra que para este número de Reynolds el valor de f para tubos lisos es 0,0063. Por consiguiente, el gradiente de presión necesario para mantener el flujo, de acuerdo con la Fc. 6.1-4, es

$$\frac{p_0 - p_L}{L} = \frac{4}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \cdot f$$

$$= \frac{4}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{\pi D^2} \right)^4 Q^2 f$$

$$= \frac{32 \rho Q^2 f}{\pi^2 D^5}$$

$$= \frac{(32)(0{,}935)(1100)^2(0{,}0063)}{\pi^2 (3{,}0)^5}$$

$$= 95 \text{ (dinas cm}^{-2}\text{)/cm}$$

$$= 0{,}071 \text{ (mm Hg)/cm} \qquad (6.2\text{-}20)$$

Ejemplo 6.2-2. Velocidad de flujo paca una determinada diferencia de presión

Determinar la velocidad de flujo, en kg por hora, de agua a 20° C, a través de una tubería horizontal de acero, schedule 40, de 8 pulgadas (diámetro interno 20.27 cm) y 305 m de longitud, bajo una diferencia de presión de 0,21 kg cm^{-2}. Utilícese la Fig 6.2-2, y supóngase que $k/D = 2{,}3 \times 10^{-4}$.

Solución. Puesto que se conoce $p_0 - p_L$, se puede utilizar la Ec. 6.1-4 y la Fig. 6.2-2 para hallar $\langle v \rangle$. Sin embargo, la variable $\langle v \rangle$ interviene de forma explícita en el primer miembro de la ecuación e implícitamente en el segundo en f (que depende de Re = $= D\langle v \rangle \rho/\mu$). Es evidente que la solución ha de hallarse por tanteo. No obstante, si hay que calcular varios valores de $\langle v \rangle$, es preferible utilizar un método mas sistemático. Aquí se sugieren dos métodos. Como los datos experimentales se presentan con frecuencia en forma gráfica, es conveniente que el estudiante de ingeniería se acostumbre a desarrollar métodos especiales, tales como los que se describen aquí.

Método A. Puede utilizarse la Fig. 6.2-2 para construir una representación gráficas de Re frente al número Re $\sqrt{f}$ que no contiene $\langle v \rangle$:

$$\text{Re}\sqrt{f} = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} \sqrt{\frac{(p_0 - p_L)D}{2L\rho\langle v \rangle^2}} = \frac{D\rho}{\mu} \sqrt{\frac{(p_0 - p_L)D}{2L\rho}} \qquad (6.2\text{-}21)$$

El término de Re $\sqrt{f}$ se puede calcular, y el número de Reynolds se puede leer en el gráfico de Re frente a Re $\sqrt{f}$. La velocidad media y la velocidad de flujo pueden calcularse a partir del valor de Re.

Método B. Puede utilizarse directamente la Fig. 6.2-2 sin ninguna otra representación, mediante un procedimiento que es equivalente a la resolución gráfica de dos ecuaciones simultáneas. Las dos ecuaciones son

$f = f(\text{Re}, k/D)$ curva representada en la Fig. 6.2-2 (6.2-22)

$f = \dfrac{(\text{Re}\sqrt{f})^2}{\text{Re}^2}$ una linea recta de pendiente -2 en una representación log-log (6.2-23)

[5] Una representación gráfica análoga ha sido propuesta por T. VON KÁRMÁN, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppen,* I, 5, 58-76 (1930); véase por ejemplo, W. L. MCCABE y J. C. SMITH, *Unit Operations of Chemical Engineering,* McGraw-Hill, Nueva York (1956), p. 72.

El procedimiento consiste en calcular Re $\sqrt{f}$ mediante la Ec. 6.2-21 (para lo cual no es preciso conocer $\langle v \rangle$) y representar la Ec. 6.2-23 en la gráfica de log f frente a log Re de la Fig. 6.2-2. El punto de intersección nos da el número de Reynolds del flujo, a partir del cual se puede calcular $\langle v \rangle$.

Para el problema que estamos considerando, tendremos

$$\begin{aligned} p_0 - p_L &= 0{,}21\ (\mathrm{kg_f\ cm^{-2}})\ 9{,}81(\mathrm{kg_m\ m\ kg^{-1}\ seg^{-2}})10^4\ \mathrm{cm^2\ m^{-2}} \\ &= 2{,}06.10^4\ (\mathrm{kg_m\ m^{-1}\ seg^{-2}}) \\ D &= 0{,}2027\ \mathrm{m} \\ L &= 305\ \mathrm{m} \\ \rho &= 998\ \mathrm{kg_m\ m^{-3}} \\ \mu &= 1{,}03\ (\mathrm{cp}) = 1{,}03.10^{-3}\ (\mathrm{kg_m\ m^{-1}\ seg^{-1}}) \end{aligned}$$

Según las Ec. 6.2-21

$$\mathrm{Re}\sqrt{f} = \frac{D\rho}{\mu}\sqrt{\frac{(p_0 - p_L)\,D}{2L\rho}} = \frac{(0{,}2027)\,(998)}{(1{,}03.10^{-3})}\sqrt{\frac{(2{,}06.10^4)\,(0{,}2027)}{2(305)\,(998)}}$$

$$= 1{,}63.\,10^4, \text{ adimensional} \qquad (6.2\text{-}24)$$

La línea de la Ec. 6.2 -23 para este valor de Re $\sqrt{f}$ pasa por $f = 1{,}0$ para Re = $1{,}63 \times 10^4$ y por $f = 0{,}01$ para Re = $1{,}63 \times 10^5$. La intersección de la línea recta que pasa por estos dos puntos con la curva de la Ec. 6.2-22 para $k/D = 0{,}00023$ corresponde a la solución de las dos ecuaciones simultáneas:

$$\mathrm{Re} = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = 2{,}4 \times 10^5 \qquad (6.2\text{–}25)$$

La velocidad de flujo de masa para tubos circulares es $\rho \langle v \rangle \pi D^2/4$; por lo tanto, la Ec. 6.2-25 queda así

$$\mathrm{Re} = \frac{4w}{\pi D\mu} = 2{,}4 \times 10^5 \qquad (6.2\text{-}26)$$

Despejando w se obtiene

$$\begin{aligned} w &= \frac{\pi}{4} D\,\mu\,\mathrm{Re} \\ &= 0{,}7854 \times 0{,}2027 \times 1{,}03 \times 10^{-3} \times 3600 \times 2{,}4 \times 10^5 \\ &= 1{,}42 \times 10^5\ \mathrm{kg_m\ hr^{-1}} \end{aligned} \qquad (6.2\text{-}27)$$

§ 6.3 FACTORES DE FRICCIÓN PARA EL FLUJO ALREDEDOR DE ESFERAS

En esta sección se utiliza la definición de f de la Ec. 6.1–5, juntamente con el análisis dimensional de § 3.7, con el fin de determinar la dependencia de f. Nuevamente se limita el estudio a fluidos de ρ constante; el sistema coordenado que se utiliza es el mismo de § 2.6.

La contribución de F_k a la fuerza que actúa sobre una esfera en un fluido que circula en la dirección $+z$, es la fuerza total $F = F_n + F_t$ menos la fuerza F_s:

$$F_k = (F_n - F_s) + F_t$$

$$= F_{\substack{\text{resistencia}\\\text{de forma}}} + F_{\substack{\text{resistencia}\\\text{de fricción}}} \qquad (6.3\text{–}1)$$

siendo

$$F_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \{-p|_{r=R} \cos\theta\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (6.3\text{-}2)$$

$$F_s = \int_{S_0}^{2\pi}\int_{S_0}^{\pi} \{-(p_0 - \rho g z)|_{r=R} \cos\theta\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (6.3\text{-}3)$$

$$F_t = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{-\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\Bigg|_{r=R} \operatorname{sen}\theta\right\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (6.3\text{–}4)$$

Aquí p_0 es la presión en el plano $z = 0$, que pasa por el ecuador de la esfera.

Si se desdobla ahora f en dos contribuciones análogas a $F_{\text{resistencia de forma}}$ y $F_{\text{resistencia de fricción}}$, y se utiliza la definición de f de la Ec. 6.1-5, tendremos

$$f = f_{\text{forma}} + f_{\text{fricción}} \qquad (6.3\text{-}5)$$

$$f_{\text{forma}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \{-\mathcal{P}^* \cos\theta\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (6.3\text{-}6)$$

$$f_{\text{fricción}} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{\text{Re}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{-\left[r^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{v_\theta^*}{r^*}\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial v_r^*}{\partial \theta}\right]\right\}\Bigg|_{r^*=1} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (6.3\text{-}7)$$

El factor de fricción se ha expresado así en función de variables adimensionales:

$$\mathcal{P}^* = \frac{p - p_0 + \rho g z}{\rho v_\infty^2}; \qquad v_\theta^* = \frac{v_\theta}{v_\infty}; \qquad v_r^* = \frac{v_r}{v_\infty}; \qquad r^* = \frac{r}{R} \qquad (6.3\text{–}8,9,10,11)$$

y el número de Reynolds se ha definido como

$$\text{Re} = \frac{D v_\infty \rho}{\mu} = \frac{2R v_\infty \rho}{\mu} \qquad (6.342)$$

Es evidente que para evaluar f hay que conocer $\mathcal{P}^*$, v_r^* y v_θ^* como funciones de r^*, θ y ϕ. En §§ 2.6 y 4.2 se ha visto como puede deducirse la expresión de la ley de Stokes para la condición de flujo reptante, es decir, flujo muy lento con Reynolds inferior aproximadamente a 0,1.

Para Re $>$ 0.1, se sabe muy poco desde el punto de vista cuantitativo acerca de las distribuciones de presión y velocidad reducidas; sabemos, sin embargo, que para el flujo incompresible estas distribuciones pueden en ***principio*** obtenerse a

partir de las Ecs. 3.7-12 y 3.7-13.1 Éstas han de resolverse con las siguientes condiciones límite :

para $r^* = 1$ $\quad v^*, =^* v_\theta = 0$ (6.3-13)

para $r^* = \infty$ $\quad v^*_z = 1$ (6.3— 14)

para $r^* = \infty$ $\quad \mathscr{P}^* = 0$ (6.3-15)

Puesto que no intervienen nuevos grupos adimensionales debido a las condiciones límite, tendremos que

$$\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*(x^*, y^*, z^*; \text{Re}) \tag{6.216}$$

$$v^* = v^*(x^*, y^*, z^*; \text{Re}) \tag{6.3-17}$$

Y que

$$f = f(\text{Re}) \tag{6.3-18}$$

utilizando argumentos análogos a los de \$6.2. Por consiguiente, mediante el análisis dimensional de las ecuaciones diferenciales que describen el flujo, y la definición del factor de fricción, se llega al resultado de que f puede correlacionarse como una función exclusiva del Re.

Se han determinado muchos datos experimentales para el flujo alrededor de esferas, de forma que se dispone de una gráfica de f frente a Re para esferas lisas. (Véase Fig. 6.3— 1.) Para este sistema no existe una brusca transición entre una curva de flujo laminar inestable y una curva de flujo turbulento estable, tal como se ha indicado en la Fig. 6.2-2 para el caso de tubos para Re $\doteq 2{,}1 \times 10^3$. Al aumentar la velocidad de flujo en este sistema, aumenta la formación de remolinos detrás de la esfera.

La caída de la curva alrededor de Re = 2×10^5 está relacionada con la traslación de la zona de separación de la capa límite desde enfrente hasta detrás del ecuador de la esfera.2

Hemos elegido intencionadamente la discusión de la esfera inmediatamente después de la del tubo, con el fin de resaltar el hecho de que los distintos sistemas de flujo pueden comportarse de forma muy diferente. Las principales diferencias entre los dos sistemas son:

---

1 Para el sistema que estamos considerando, la Ec. 3.7-13 puede escribirse así

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} = -\nabla^*\mathscr{P}^* + \left[\frac{\mu}{Dv_\infty \rho}\right] \nabla^{*2} v^* \tag{6.3-12a}$$

Como se ve, el número de Froude no aparece en las ecuaciones diferenciales ni en las condiciones límite.

2 Véase H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), pp. 34-35.

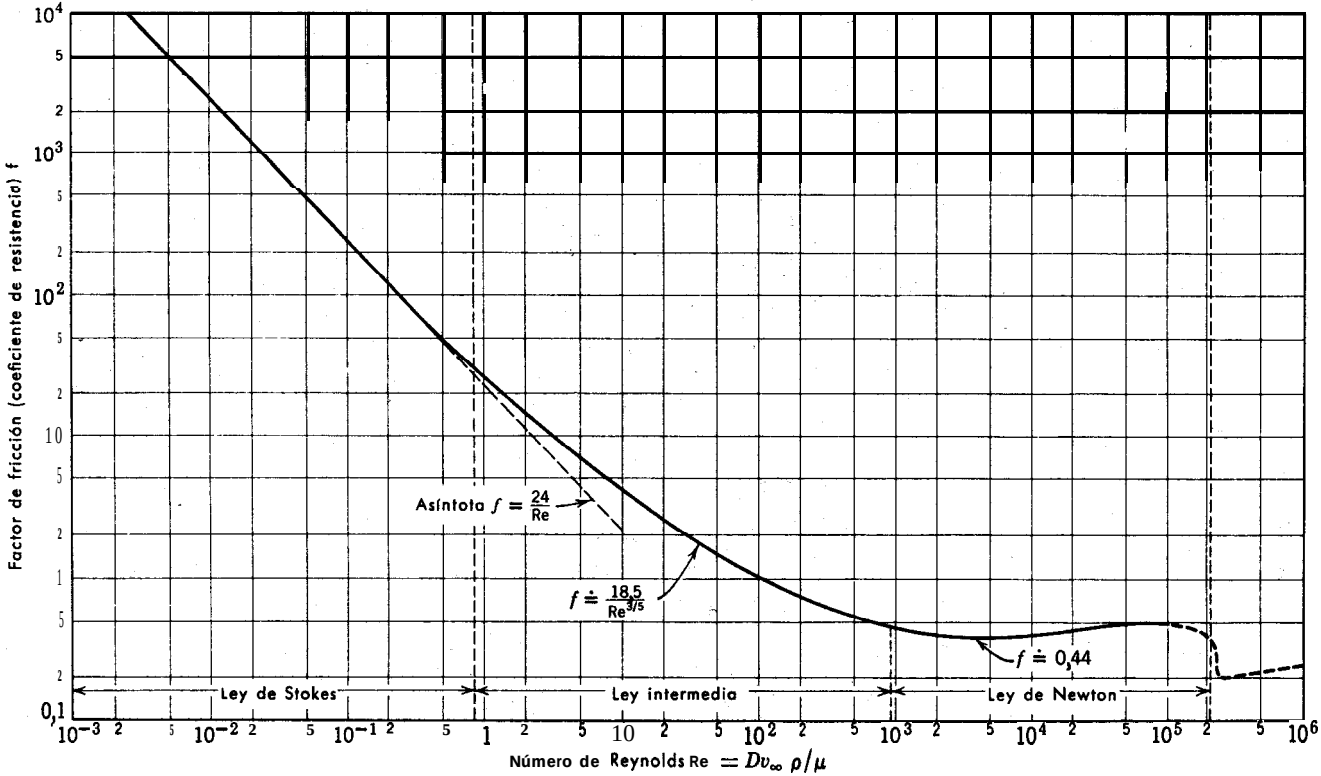


Fig. 6.3-1. Factor de fricción (o coeficiente de resistencia) para esferas que se mueven con una velocidad relativa a un fluido, v_∞. Véase la definición de f en la Ec. 6.1-5. [Curva tomada de C. E. Lapple, «Dust and Mist Collection», en *Chemical Engineers Handbook* (ed. por J. H. Perry) McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición, p. 1018.1

Para tubos existe una transición laminar-turbulenta bastante bien definida para Re $\doteq 2 \times 10^3$.

Para tubos lisos la única contribución a f es la resistencia de fricción.

Para tubos no hay separación de capa límite.

Para esferas, la curva de f no presenta una transición laminar-turbulenta bien definida.

Para esferas existen contribuciones a f debidas a la resistencia de fricción y a la resistencia de forma.

Para esferas existe un viraje de la curva f que está relacionado con un cambio de la zona de separación.

Es conveniente recordar bien la forma general de las curvas de las Figs. 6.2-2 y 6.3-1.

Se ha visto ya anteriormente que para la *región de flujo reptante* la fuerza de resistencia viene dada por la *ley de Stokes,* que resulta de una resolución analítica de las ecuaciones de continuidad y movimiento (omitiendo el término $\rho Dv/Dt$ de la ecuación de movimiento correspondiente a la Ec. 3.2-20). Poniendo la ley de Stokes (Ec. 2.6-14) en la forma de la Ec. 6.1-5 se obtiene

$$F_k = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot \frac{24}{\left(\frac{Dv_\infty \rho}{\mu}\right)} \tag{6.3-19}$$

Por lo tanto, para *flujo reptante* alrededor de una esfera,

$$f = \frac{24}{\mathrm{Re}'} \qquad \mathrm{Re} < 0{,}1 \tag{6.3-20}$$

Esta ecuación corresponde a la porción de recta de la curva log f frente a log Re.

Para valores más altos del numero de Reynolds es muy difícil hacer cálculos puramente teóricos. Algunos investigadores se las han ingeniado para estimar f hasta Re = 10, lo que requiere un gran trabajo. Por lo tanto, la curva de f para Re > 0.1 se ha obtenido a partir de datos experimentales. Algunas veces resulta conveniente disponer de expresiones analíticas sencillas para las regiones de números de Reynolds más elevados. Para *la región intermedia* se puede tomar de forma aproximada

$$f \doteq \frac{18{,}5}{\mathrm{Re}^{3/5}} \qquad 2 < \mathrm{Re} < 5 \times 10^2 \tag{6.3-21}$$

lo que indica una menor dependencia del Re que en la ley de Stokes. Esta expresión es menos exacta que la ley de Stdkes para Re < 2.

Para valores de Re más elevados se observa que el factor de fricción es, aproximadamente, constante. *Ésta es* la *región de la ley de Newton,* para la cual

$$f \doteq 0{,}44 \qquad 5 \times 10^2 < \mathrm{Re} < 2 \times 10^5 \tag{6.3-22}$$

En esta región la fuerza de resistencia que actúa sobre la esfera es, aproximadamente, proporcional al cuadrado de la velocidad del fluido que circula lejos de la esfera. La Ec. 6.3-22 es una aproximación útil para estimaciones rápidas. (No debe de confundirse la «ley» de Newton para la fuerza de resistencia sobre una esfera, con la ley de Newton de la viscosidad o las leyes de Newton del movimiento.)

Se han realizado muchas modificaciones de la Fig. 6.3— 1, pero un estudio sistemático se sale fuera del objeto de este libro. Entre las distintas cuestiones que se han investigado, indicaremos los efectos de pared (véase problema 6.0), caída de gotitas con circulación interna,[3] caída de partículas en fluidos no-newtonianos,[4] sedimentación impedida (es decir, caída de grupos de partículas que se interfieren entre sí),[5] flujo no estacionario,[6] y partículas no esféricas.[7,8]

Ejemplo 6.3— 1. Determinación del diámetro de una esfera descendente

En un estudio experimental de tiempos de reacción se dejan caer esferas de vidrio de densidad $\rho_{esf} = 2{,}62$ g cm^{-3}, a través de teatracloruro de carbono ($\rho = 1{,}59$ g cm^{-3} y $\mu = 9{,}58$ milipoises) a 20" C, y se mide el tiempo con un cronómetro. ¿Cuál ha de ser el diámetro de las esferas para que la velocidad límite sea aproximadamente 65 cm seg^{-1}?

Solución. Para hallar el diámetro de la esfera hay que despejar D de la Ec. 6.1-7. Pero como hay que conocer D para hallar f, que viene dado por la curva de tramo continuo de la Fig. 6.3 — 1, puede utilizarse un procedimiento de tanteo, tomando $f = 0{,}44$ como primera aproximación.

Otro procedimiento consiste en despejar f de la Ec. 6.1-7, teniendo en cuenta que el término f/Re es independiente de D:

$$\frac{f}{\mathrm{Re}} = \frac{4}{3}\frac{g\mu}{\rho v_\infty^3}\left(\frac{\rho_{esf} - \rho}{\rho}\right) \qquad (6.3\text{-}23)$$

El segundo miembro de esta ecuación puede calcularse con los datos del enunciado, y llamaremos a su valor C. Por lo tanto, tenemos dos ecuaciones simultáneas para resolver:

$$f = C\,\mathrm{Re} \qquad \text{(de la Ec. 6.3-23)} \qquad (6.3\text{-}24)$$

$$f = f(\mathrm{Re}) \qquad \text{(dada en la Fig. 6.3-1)} \qquad (6.3\text{-}25)$$

---

3 H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover (1945), sexta edición, pp. 600-601; S. Hu y R. C. KINTNER, A. *Z. Ch. E. Journal*, 1, 42-48 (1955).

4 J. C. SLATTERY, *tesis doctoral*, Universidad de Wisconsin (1959).

5 H. H. STEINOUR, *Znd. Eng. Chem.* 36, 618-624, 840-847, 900-901 (1947); véase también C. E. LAPPLE, *Fluid and Particle Dynamics*, University of Delaware Press, Newark (1951), capítulo 13.

6 R. R. HUGHES y E. R. GILLILAND, *Chem. Eng. Prog., 48, 497-504* (1952).

7 E. S. PETTYJOHN y E. B. CHRISTIANSEN, *Chem. Eng. Prog., 44*, 157 (1948).

8 H. A. BECKER, Can. *J. Chem. Eng.* 85-91 (1959).

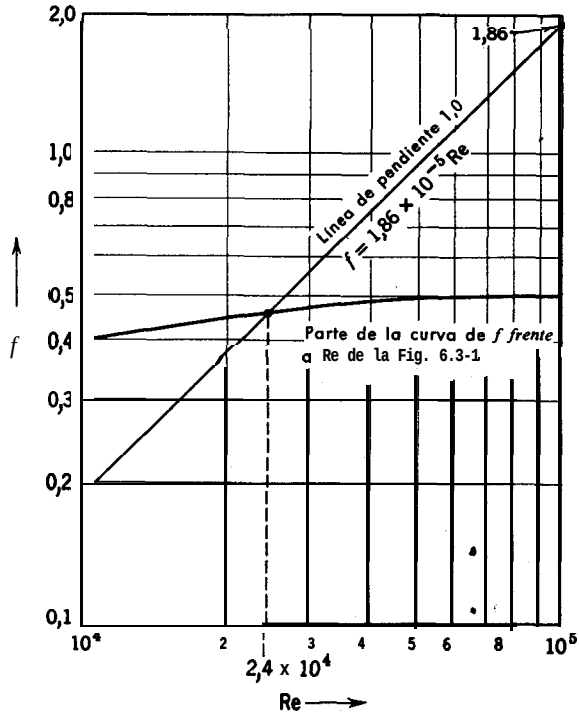


Fig. 6.3-2. Procedimiento gráfico utilizado en el ejemplo 6.3-1.

La Ec. 6.3-24 es una línea recta de pendiente unidad en la representación gráfica de log f frente a log Re.

Para el problema que estamos considerando,

$$C = \frac{4}{3}\frac{(980)(9{,}58 \times 10^{-3})}{(1{,}59)(65)^3}\left(\frac{2{,}62 - 1{,}59}{1{,}59}\right) = 1{,}86 \times 10^{-5} \qquad (6.3\text{-}26)$$

Por consiguiente, de acuerdo con la Ec. 6.3-24, para Re = 10^5, $f = 1{,}86$. En la Fig.. 6.3-2 se representa la línea de pendiente 1 que pasa por $f = 1{,}86$ para Re = 10^5. Dicha línea corta a la curva de la Ec. *6.3 -25* (o sea, la curva de la Fig. 6.3 — 1) para Re $\equiv Dv_\infty\rho/\mu = 2{,}4 \times 10^4$. De esta forma se encuentra que el diámetro de la esfera es

$$D = \frac{\mathrm{Re}\,\mu}{\rho v_\infty} = \frac{(2{,}4 \times 10^4)(9{,}58 \times 10^{-3})}{(1{,}59)(65)} = 2{,}2 \text{ cm}$$

§ 6.4 FACTORES DE FRICCIÓN PARA COLUMNAS DE RELLENO

En las dos secciones precedentes se ha discutido con alguna amplitud la correlación de dos sistemas de flujo muy sencillos, que son muy importantes en los cálculos ingenieriles. Se dispone de gráficas del factor de fricción para diversos tipos de mo-

vimiento de fluidos, tales como flujo en las proximidades de un disco que gira, flujo exterior a un cilindro, flujo exterior a una serie de tubos cilíndricos y flujo alrededor de placas deflectoras. En el *Chemical Engineers' Handbook*[1] se discuten sistemas que tienen interés en ingeniería química y Schlichting[2] trata otros sistemas importantes para los estudios básicos de mecánica de fluidos y aerodinámica. Un sistema muy importante en ingeniería química es la columna de relleno, por su gran aplicación en las operaciones de transferencia de materia.

En términos generales, existen dos grandes métodos teóricos para el estudio de la pérdida de presión a través de lechos porosos. En uno de ellos se considera la columna de relleno como un manojo de tubos enmarañados de sección caprichosa, y la teoría se desarrolla aplicando los resultados anteriores, para tubos rectos, al conjunto de tubos tortuosos. En el segundo método se representa la torre de relleno como un conjunto de objetos sumergidos, y se calcula la perdida de presión sumando las resistencias de las partículas sumergidas. [3,4]

Las teorías del manojo de tubos han tenido algo más éxito y serán las que se estudiarán aquí.

El material de relleno puede estar constituido por esferas, cilindros y diversos tipos de rellenos comerciales para aparatos de contacto.[5] En la discusión que sigue se supone que el relleno es uniforme en todas partes y que no hay «formación de canalillos» (en la realidad se forman generalmente canalillps y no son válidas las fórmulas que se obtienen aquí). Se supone, además, que el diámetro del relleno es pequeño en comparación del diámetro de la columna que lo contiene y que el diámetro de la columna es constante.

De forma análoga a la Ec. 6.1-4, se define el factor de fricción para el lecho de relleno, mediante la expresión

$$\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \frac{L}{D_p} \cdot 4f \tag{6.4-1}$$

en la que D_p es el diámetro de la partícula (que se define más adelante), v_0 es la «velocidad superficial» (la velocidad lineal media que tendría el fluido en la columna si no existiese relleno), y L es la longitud de la columna de relleno. El factor de fricción lo estimaremos separadamente para flujo laminar y turbulento.

En § 2.3 se ha visto que para *flujo laminar* en tubos circulares de radio R,

$$\langle v \rangle = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R^2}{8\mu L} \tag{6.4-2}$$

[1] T. B. DREW, H. H. DUNKLE, y R. P. GENERAIJX, Sección 5 de *Chemical Engineers' Handbook* (J. H. Perry, ed.), McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición.

[2] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), pp. 75-80, 439, 445-447.

[3] H. C. BRINKMAN, *Appl. Sci. Research*, A1, 27-34, 81-86, 333-346 (1949).

[4] W. E. RANZ, *Chem. Eng. Prog., 48, 247-253* (1952).

[5] Véase, por ejemplo McCABE y SMITH, p. 630 (fig. 11.1); M. IEVA, *Tower Packings and Packed-Tower Design*, U. S. Stoneware Co., Akron, Ohio (1953), capítulos 1 y 2.

Imaginemos ahora que un lecho de relleno es un tubo de sección muy complicada cuyo radio hidráulico es R_h. (Véase Ec. 6.2-16.) La velocidad media de flujo en la sección disponible para el paso del fluido es por lo tanto

$$\langle v \rangle = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R_h^2}{2\mu L} \tag{6.4-3}$$

El radio hidráulico puede expresarse en función de la «fracción de huecos» ϵ y la superficie mojada a, por unidad de volumen de lecho, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R_h &= \left(\frac{\text{sección disponible para el flujo}}{\text{perímetro mojado}}\right) \\ &= \left(\frac{\text{volumen disponible para el flujo}}{\text{superficie mojada total}}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{\text{volumen de huecos}}{\text{volumen del lecho}}\right)}{\left(\frac{\text{superficie mojada}}{\text{volumen del lecho}}\right)} = \frac{\epsilon}{a} \end{aligned} \tag{6.4-4}$$

La magnitud a está relacionada con la «superficie específica» a_v (la superficie total de las partículas/volumen de las partículas), mediante. la expresión

$$a = a_v(1 - \epsilon) \tag{6.4-5}$$

La magnitud a_v se utiliza a su vez para definir del diámetro medio de la partícula D_p

$$D_p = 6/a_v \tag{6.4-6}$$

Se elige esta definición puesto que para esferas la Ec. 6.4-6 da exactamente D_p = diámetro de la esfera. Finalmente, obsérvese que el valor medio de la velocidad en los intersticios $\langle v \rangle$, no es de interés general para el ingeniero, pero, en cambio, sí lo es la velocidad superficial v_0; estas dos velocidades están relacionadas por $v_0 = \langle v \rangle \epsilon$.

Combinando estas dos definiciones con la fórmula modificada de Hagen-Poiseuille de la Fc. 6.4-3, se obtiene

$$v_0 = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)R_h^2}{2\mu L}\epsilon = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)\epsilon^3}{2\mu L a^2} = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)\epsilon^3}{2\mu L a_v^2(1-\epsilon)^2}$$

$$= \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)D_p^2}{2L(36\mu)} \frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon)^2} \tag{6.4-7}$$

0, finalmente

$$v_0 = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)}{L} \frac{\epsilon^3 D_p^2}{2(36\mu)} \frac{}{(1-\epsilon)^2} \tag{6.4-8}$$

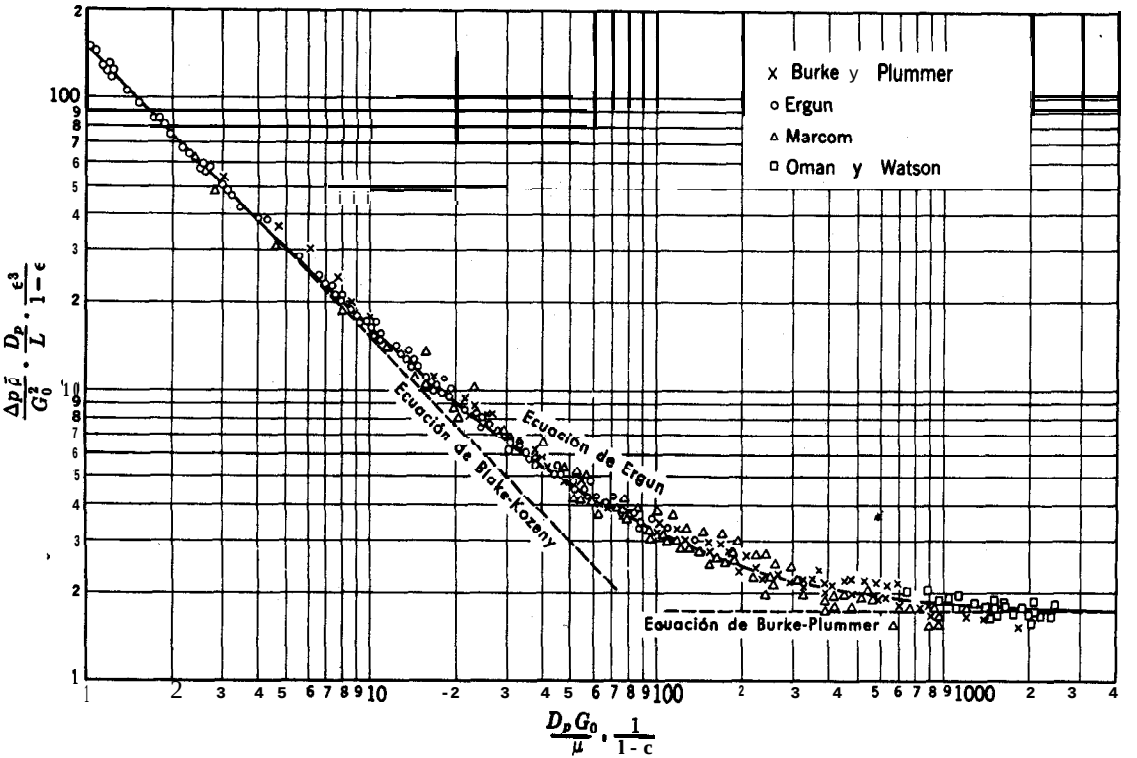


Fig. 6.4-1. **Representación gráfica** del comportamiento general de la **ecuación** de **Ergun** en una representación log-log. **[S. Ergun, *Chem. Eng. Prog.*, 48, 93 (1952).]**

Para el flujo laminar, la suposición del radio hidráulico medio conduce generalmente a caudales demasiado grandes para un determinado gradiente de presión; por lo tanto, debido a esta suposición, es de esperar que el segundo miembro de la Ec. 6.4-8 debiera de ser algo más pequeño. Una segunda suposición que está implícita en la anterior deducción, es que la longitud del camino que recorre el fluido a través del lecho es *L;* es decir, la misma longitud de la columna de relleno. En la realidad el líquido atraviesa un camino muy tortuoso cuya longitud puede ser incluso doble de *L.* Según esto, es de esperar que de nuevo deba disminuir el segundo miembro de la Ec. 6.4-8.

Las medidas experimentales indican que la fórmula teórica se mejora si el 2 del denominador del segundo miembro se substituye por un valor comprendido entre 4 y 5. Mediante el análisis de una gran cantidad de datos se ha obtenido el valor 25/6, que es el que se acepta aquí. Introduciendo este valor en la Ec. 6.4-8 se obtiene

$$v_0 = \frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)}{L} \frac{D_p^2}{150\mu} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^n} \qquad (6.4\text{-}9)$$

que es la ecuación de *Blake-Kozeny.* Este resultado es, generalmente, satisfactorio para fracciones de huecos inferiores a 0,5, y es válida solamente para la región laminar que viene dada por $(D_p G_0/\mu)(1 - \epsilon)^{-1} < 10$, siendo Ge = ρv_0. Obsérvese que la ecuación de Blake-Kozeny corresponde a un factor de fricción para el lecho de

$$f = \left(\frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3}\right) \frac{75}{D_p G_0/\mu} \qquad (6.4\text{-}10)$$

Este resultado se representa en la Fig. 6.4— 1.

Puede repetirse exactamente el mismo tratamiento para el flujo *altamente turbulento* en columnas de relleno. Partimos de nuevo de la definición del factor de fricción para el flujo en un tubo circular. Sin embargo, se observa ahora que para el flujo altamente turbulento en tubos con una apreciable rugosidad, el factor de fricción es una función exclusiva de la rugosidad. Admitiendo que todos los lechos de relleno tienen una rugosidad característica semejante, se puede utilizar un factor de fricción único f_0 para el flujo turbulento. Seguimos ahora el mismo procedimiento de § 6.2 y se hacen las mismas substituciones: $\langle v \rangle = v_0/\epsilon$; $D = 4R_h$; $R_h = \epsilon/a$; $a = a_v(1 - \epsilon)$, y, finalmente, $D_p = 6/a_v$. Esto conduce a los siguientes resultados :

$$\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L} = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \cdot 4f_0 = 6f_0 \cdot \frac{1}{D_p} \cdot \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cdot \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \qquad (6.4\text{-}11)$$

Los datos experimentales indican que $6f_0 = 3{,}50$, con lo que se obtiene

$$\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L} = 3{,}50 \frac{1}{D_p} \frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{1 - \epsilon}{\epsilon^3} \qquad (6.4\text{-}12)$$

que es la. ecuación de ***Burke-Plummer,*** válida para $(D_p G_0/\mu)(1-\epsilon)^{-1} > 1000$. Este resultado corresponde a un factor de fricción que viene dado por

$$f = 0{,}875\,\frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \tag{6.4-13}$$

Obsérvese que la dependencia de ϵ es diferente que para el flujo laminar.

Sumando la ecuación de Blake-Kozeny para el flujo laminar y la de Burke-Plummer para el turbulento, se obtiene

$$\frac{\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L}{L} = \frac{150\mu v_0}{D_p^2}\,\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon} + 1{,}75\rho v_0^2\,\frac{(1-\epsilon)}{D_p\,\epsilon^3} \tag{6.4-14}$$

Esta ecuación puede expresarse en función de grupos adimensionales:[6]

$$\left(\frac{(\mathscr{P}_0 - \mathscr{P}_L)\rho}{G_0^2}\right)\left(\frac{D_p}{L}\right)\left(\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon}\right) = 150\,\frac{(1-\epsilon)}{(D_p G_0/\mu)} + 1{,}75 \tag{6.4-15}$$

Ésta *es* la ***ecuación de Ergun,*** que se ha utilizado con éxito para gases, tomando para la densidad del gas la media artimética de los valores a las presiones extremas. Sin embargo, para grandes caídas de presión es más lógico utilizar la Ec. 6.4-14 con el gradiente de presión en forma diferencial. Obsérvese que G_0 es una constante para todo el lecho, mientras que para un fluido compresible v_0 varía a través del lecho. El diámetro que se utiliza en esta ecuación es el que se ha definido en la Ec. 6.4-6.

Obsérvese que para elevadas velocidades de flujo el primer término del segundo miembro desaparece y la ecuación se transforma en la de Burke-Plummer. A bajas velocidades de flujo, el que desaparece, en cambio, es el segundo término, y se obtiene la ecuación de Blake-Kozeny. En la Fig. 6.4-1 se representa gráficamente el comportamiento general de estas ecuaciones. Indicaremos, sin embargo, que la ecuación de Ergun es una de las muchas que se han propuesto para describir la caída de presión a través de columnas de relleno.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cómo se definiría el factor de fricción para el flujo a través de un anillo y para el flujo transversal alrededor de un cilindro?

2. Utilizar la Ec. 6.1-7 con el fin de obtener expresiones para la velocidad límite de caída de una esfera, para las tres regiones que se consideran en § 6.3.

3. ¿ Es preciso modificar la Ec. 6.1-7 para esferas que son más ligeras que el fluido y por consiguiente para ascenso en vez de caída? En caso afirmativo, ¿cuál será la modificación?

4. ¿Qué precaución hay que tomar al utilizar las fórmulas con factores de fricción tomados de libros de consulta o trabajos originales?

5. ¿Cómo está relacionada la ley de Hagen-Poiseuille con la Fig. 6.2—2?

---

[6] S. ERGUN, *Chem. Eng. Progr.*, *48, 89-94 (1952).*

6. Comprobar las Ecs. 6.2-13 y 15 efectuando las operaciones que se omiten.

7. Comparar los métodos de calculo a seguir cuando se desea utilizar la Fig. 6.2-2 para hallar (a) la caída de presión, *(b)* la velocidad media, (c) el diámetro del tubo para una velocidad e Δp determinadas, *(d)* el diámetro del tubo para una velocidad volumétrica de flujo e Δp determinadas. Debe de evitarse el tanteo.

8. ¿Cómo se tienen en cuenta las condiciones límite en las aplicaciones del análisis dimensional de las secciones §§ 6.2 y 6.3?

9. Contrastar las formas de las curvas de f frente a Re para tubos y esferas. ¿Cual es la variación aproximada de f con el Re en las distintas regiones de estas gráficas?

10. Describir los argumentos físicos que condicen al establecimiento de la forma de la ecuación de Ergun (Ec. 6.4-15).

ll. ¿Por qué la curva de la Fig. 6.2-2, corrapondiente a la zona turbulenta, está situada por *encima y* no por *debajo* de la prolongación de la curva $f = 16/\mathrm{Re}$?

12. ¿Qué relación existe entre la ecuación de Blake-Kozeny (Ec. 6.4-9) y la ley de Darcy? (Véase problema 4.J).

13. ¿Cómo se comportaría el factor de fricción para el flujo *no estacionario* en un tubo? (Vease ejemplo 4.1-2.) ¿Serían aplicables las Ecs. 6.1-3 y 4?

14. Discutir la utilidad de la relación aproximada $f = \sqrt{\frac{24}{\mathrm{Re}}\left(\frac{24}{\mathrm{Re}} + 4.5\right)}$ para el flujo alrededor de esferas.

15. Demostrar, a partir de la Ec. 6.2-3, que f Re/2 puede interpretarse como el valor medio superficial del gradiente adimensional de velocidad en la pared del tubo.

16. Estudiar el flujo de agua en una manguera de caucho de 1,2 cm de diámetro que esta conectada a un grifo cuya presión manométrica es de 5 atm.

17. Comprobar que los segundos miembros de las Ecs. 6.1-4 y 6.1-7 son adimensionales.

18. Un anuncio de baseball dice, «Debido a la eleva& humedad del día de hoy, la pelota no puede llegar tan lejos a través del aire húmedo como lo haría con aire seco». Comentar críticamente la lógica de este anuncio.

PROBLEMAS

6.A$_1$ Diferencia **de presión necesaria para obtener una determinada velocidad de flujo con accesorios**

Hallar la diferencia de presión necesaria para bombear agua a 20°C a través de una tubería de 25 cm de diámetro y 1234 m de longitud con una velocidad de 1,97 $m^3\,seg^{-1}$. La tubería es horizontal y contiene cuatro codos normales de 90" y dos codos de 45". (Un codo normal de 90° es aproximadamente equivalente a la resistencia que ofrece una tubería de 32 diámetros; el de 45" equivale a 15 diámetros.)[1] *Respuesta:* 315 atm.

6.B$_1$ Diferencia de presión necesaria para obtener una determinada velocidad de flujo con variación de altura

Por una tubería normal de 3 pulgadas (diámetro interno 7,79 cm) y 29 *m* de longitud se bomba agua a 20" C hasta un deposito elevado, tal como se indica en la Fig. 6.B. (a) ¿Qué presión es preciso comunicar al agua a la salida de la bomba para elevarla al deposito con una velocidad de 4,09 m^3/h. (A 20" C la viscosidad del agua es de 1,002 cp y su densidad 0,9982 g ml^{-1}.) *(b)* ¿Qué tanto por ciento de la caída de presión se necesita para vencer la fricción de la tubería?

Respuesta: a. 1,03 atm.

---

[1] En § 7.4 se indica otro método para el cálculo de perdidas de carga en accesorios.

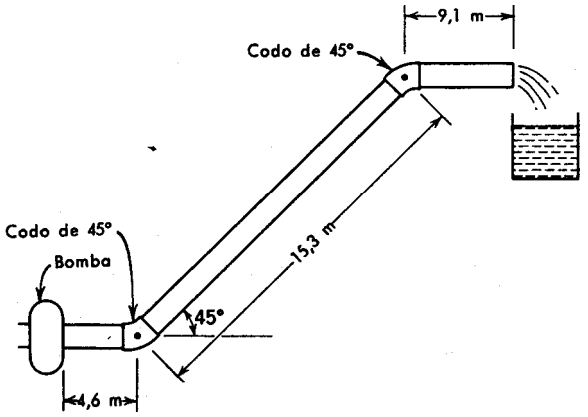


Fig. 6.B. Flujo en una tubería.

6.C_1 Velocidad de flujo para una determinada caída de presión

¿ Cuántos m^3/ hr de agua a 20" C circularan a través de una tubería lisa de 15, 2 cm de diámetro interno y 402 m de longitud, bajo una diferencia de presión de 0,017 atm? (*a*) Hallar la solución por el método *A* del ejemplo 6.2-2; (*b*) Utilizar el método *B* del ejemplo 6.2-2. (c) Comparar el valor de ⟨*v*⟩ que se. obtiene aquí con el del apartado *e* del problema 5.B. Supóngase que la tubería es «hidráulicamente lisa».

Respuesta: a y b: 15,4 m^3 hr^{-1}.

6.D_1 Movimiento de una esfera en un liquido

Una esfera hueca de acero de 5,00 mm de diámetro y 0,0500 g de masa, se deja caer en una columna de líquido y alcanza una velocidad límite de 0,500 cm seg^{-1}. La densidad del líquido es 0,900 g cm-3 y la aceleración local de la gravedad 980,7 cm seg^{-2}. La esfera está suficientemente alejada de las paredes del recipiente, de forma que su efecto es despreciable.

a. Calcular la fuerza de resistencia en dinas.
b. Calcular el coeficiente de resistencia (factor de fricción).
c. Determinar la viscosidad del líquido en centipoises.

Respuesta: a. 8,7 dinas
b. $f = 396$
c. μ = 37ocp.

6.E_1 Cálculos de resistencia cuando no se conoce el diámetro de la esfera

a. ¿Cómo se efectúan los cálculos de resistencia, utilizando la Fig. 6.3-1, cuando no se conoce el diámetro de la esfera? Indicar como se puede evitar una solución por tanteo.
b. Rehacer el problema 2.C utilizando la Fig. 6.3-1.
c. Rehacer el apartado *(b)* para una velocidad del gas de 3 m/seg.

6.F_1 Estimación de la fracción de huecos de un lecho de relleno

Una columna de 942 cm* de sección y 185 cm de altura, esta rellena con partículas esféricas de 2 mm de diámetro. Cuando se mantiene entre los extremos del lecho una diferencia de presión de 10,75 atm, una solución de sacarosa del 60 % fluye a través del lecho con una velocidad de 6640 Kg hr^{-1} a la temperatura de 20° C. A esta temperatura la viscosidad de la solución es μ =

$= 56{,}5$ cp y su densidad $\rho = 1{,}2865$ g cm^{-3}. ¿Cuál es la fracción de huecos del lecho? Discutir la utilidad de este método para obtener la fracción de huecos.

Respuesta: $\epsilon = 0{,}30$

6.G$_2$ Factor de fricción para el flujo alrededor de una lámina plana

a. En \$4.4 se estableció (justamente después de la Ec. 4.4-27) que la solución exacta de las ecuaciones de capa límite laminar, conduce a la siguiente expresión para la fuerza de resistencia que actúa sobre una lámina plana de longitud L y anchura W, mojada por ambos lados:

$$F_k = 1{,}328\sqrt{\rho\mu L W^2 v_\infty^3} \qquad \text{(6.G-1)}$$

Se ha encontrado que esta relación concuerda casi exactamente con las medidas experimentales. Definir un factor de fricción y un número de Reynolds para el sistema y obtener una expresión de f en función de Re.

b. Un tratamiento aproximado de capa límite,[2] basado en la distribución de velocidad de la potencia (1/7), conduce al siguiente resultado para el flujo *turbulento* alrededor de una lamina plana mojada por ambas caras:

$$F_k = 0{,}072\rho v_\infty^2 WL\left(\frac{Lv_\infty\rho}{\mu}\right)^{-1/5} \qquad \text{(6.G-2)}$$

Cuando se pone 0,074 en vez de 0,072, esta relación describe la fuerza de resistencia dentro de los errores experimentales para $5 \times 10^5 < Lv_\infty\rho/\mu < 2 \times 107$. ¿Cómo varía f con un numero de Reynolds convenientemente definido para el flujo turbulento?

6.H$_2$ Factor de fricción para flujo laminar en una rendija

Utilizar los resultados del problema 2.E para demostrar que el factor de fricción para el flujo laminar en una delgada rendija de anchura $2B$ es $f = 12/\mathrm{Re}$, estando el Re definido por $2B\langle v\rangle\rho/\mu$. Comparar este valor de f con el que se obtendría mediante la aproximación del radio hidráulico medio.

6.I$_2$ Factor de fricción para un disco que gira

Un delgado disco circular de radio R se sumerge en una gran masa de fluido de densidad ρ y viscosidad μ. Si para hacer girar el disco con una velocidad angular Ω se necesita un par $\mathcal{T}$, se puede definir un factor de fricción de forma análoga a la Ec. 6.1 – 1:

$$\frac{\mathcal{T}}{R} = A\,K\,f \qquad \text{(6.1-1)}$$

en la que unas definiciones razonables para K y A son $K = 1/2\,\rho R^2\Omega^2$ y $A = 2.\,\pi R^2$. Una forma conveniente de definir el número de Reynolds para este sistema es $\mathrm{Re} = R^2\Omega\rho/\mu$.

a. Para *flujo laminar*, mediante un cálculo exacto de capa limite, se obtiene[3,4]

$$\mathcal{T} = 0{,}616\pi\rho R^4(\mu\Omega^3/\rho)^{1/2} \qquad \text{(6.I-2)}$$

---

[2] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), capítulo 21.
[3] T. VON KÁRMÁN, *Z. angew. Math. Mech.*, **1**, 233-252 (1921).
[4] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), capítulo 5.

Expresar este resultado como una relación entre f y Re.

b. Un tratamientos aproximado de capa límite, basado en la distribución de velocidad de la potencia (1/7), conduce al siguiente resultado para el flujo *turbulento*

$$\mathscr{T} = 0{,}073\rho\Omega^2R^5\left(\frac{\mu}{R^2\Omega\rho}\right)^{1/5} \tag{6.I-3}$$

Expresar este resultado como una relación entre f y Re.

6.J$_2$ Factor de fricción para el flujo turbulento en tubos lisos

Efectuar la deducción correspondiente a las Ecs. 6.2-12 a 15, en la que se obtiene la *ley de resistencia de Blasius* a partir del perfil de velocidad de la potencia (1/7), para el flujo turbulento en tubos circulares lisos. Repetir después este análisis para el perfil logarítmico de velocidad turbulenta :

$$v^+ = 2{,}5 \ln s^+ + 5{,}5 \tag{6.J-1}$$

siendo $v^+ = \bar{v}/v_*$, $s^+ = sv_*\rho/\mu$, y $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. La Ec. 6.J— 1 es la misma que la Ec. 5.3-12, excepto que aquí se han utilizado los coeficientes numéricos recomendados por Schlichting.[6] Demostrar que el anterior perfil de velocidad conduce a esta expresión para el factor de fricción:

$$1/\sqrt{f} = 4{,}07 \log_{10} \mathrm{Re}\sqrt{f} - 0{,}60 \tag{6.J-2}$$

Si se hace una ligera modificación de las constantes numéricas se obtiene un buen ajuste de la curva f frente a Re en el intervalo Re = 2,1 x 103 a Re = 5 x 10^6:

$$1/\sqrt{f} = 4{,}0 \log_{10} \mathrm{Re}\sqrt{f} - 0{,}40 \tag{6.J-3}$$

Ésta es la famosa ley («universal») *de resistencia de Prandtl* para tubos circulares lisos.

6.K$_2$ Factor de fricción en tubos para fluidos no-newtonianos que siguen la ley de la potencia[7,8]

Deducir una expresión del factor de fricción para el flujo laminar en tubos, correspondiente al modelo no-newtoniano que se define en la Ec. 1.2-3.

Respuesta: $f = \dfrac{16}{\mathrm{Re}_n'}$, siendo $\mathrm{Re}_n' = \dfrac{D^n\langle v\rangle^{2-n}\rho/m}{2^{n-3}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^n}$

6.L$_2$ Inconveniencia del radio hidráulico medio para el flujo laminar

a. En § 6.2 se ha hecho resaltar que el radio hidráulico medio no debía utilizarse para el flujo laminar. Utilizar las Ecs. 6.2-17 y 18 para el flujo laminar en un anillo de radios κR y R, con el fin de deducir una expresión para la velocidad media en función de la pérdida de presión, análoga a la expresión exacta de la Ec. 2.4-15.

b. ¿Cuál es el tanto por ciento de error del resultado del apartado *(a)* para $\kappa = 1/2$?

Respuesta: b. 47 %

---

[5] *Ibid.* capítulo 21.

[6] *Ibid.*, pp. 368-369, 373-375.

[7] A. B. METZNER y J. C. REED, *A. I. Ch. E. Journal, 1,* 434-440 *(1955).*

[8] R. B. BIRD, *A. I. Ch. E. Journal, 2, 428* (1956).

6.M_2 Caída de una esfera en la región de la ley de Newton

Una esfera que está inicialmente en reposo y situada en $z = 0$, cae (en la dirección z positiva) por efecto de la gravedad. Las condiciones son tales que, al cabo de un corto intervalo de tiempo, la esfera cae con una fuerza de resistencia F_k proporcional al *cuadrado* de la velocidad (es decir, que es aplicable la ley de resistencia de Newton para esferas).

a. Hallar la distancia z recorrida por la esfera en su caída en función del tiempo t.

b. ¿Cuál es la «velocidad límite» de la esfera? Supóngase que la densidad del fluido es mucho menor que la de la esfera.

Respuesta: *a.* $z = (1/c^2g) \ln \cosh cgr$
siendo $c^2 = (3/8)(0{,}44)(\rho/\rho_{esf})(1/gR)$
b. $1/c$

6.N_3 Potencia comunicada a un tanque agitado

Demostrar, por análisis dimensional, que la potencia comunicada por un agitador a un fluido incompresible en un tanque agitado, para un tanque y agitador determinados. pueden correlacionarse mediante la expresión

$$\left(\frac{P}{\rho N^3 D^5}\right) = \phi\left[\left(\frac{D^2 N \rho}{\mu}\right), \left(\frac{DN^2}{g}\right), (Nt)\right] \qquad (6.N\text{–}1)$$

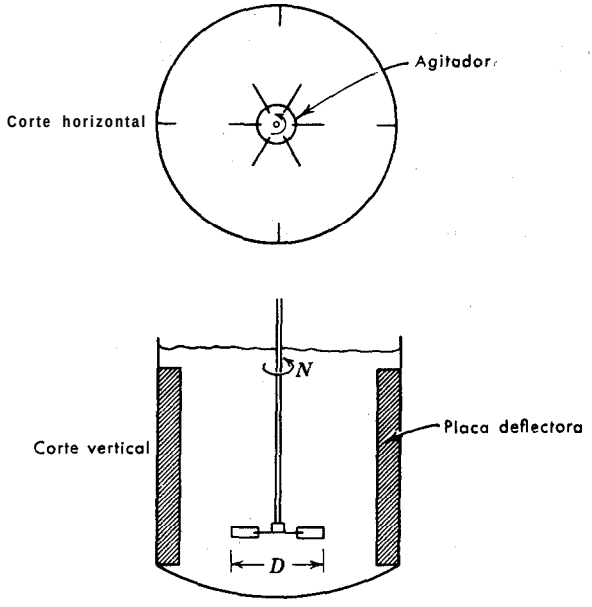


Fig. *6.N.* Tanque provisto de cuatro placas deflectoras verticales y un agitador de seis paletas.

siendo ϕ una función cuya forma ha de determinarse experimentalmente. Las demás variables son:

P = potencia comunicada por el agitador al fluido (FLt^{-1})
N = velocidad de giro del agitador, (t^{-1})

D = diámetro del agitador (L)
g = aceleración de la gravedad (Lt^{-2})
ρ = densidad del líquido (ML^{-3})
μ = viscosidad del líquido $(ML^{-1}t^{-1})$
t = tiempo desde el comienzo de la operación.

Nota: Para la geometría, frecuentemente utilizada, de la Fig. 6.N, la potencia viene dada por la suma de dos integrales, que representan la contribución de la resistencia de fricción de las paredes y del fondo del tanque cilíndrico y la resistencia de forma de las placas deflectoras radiales, respectivamente:

$$P = N \cdot \mathcal{T}$$
$$= N\left[\mu \int\int_S R(\partial v_\theta/\partial n)_{\text{superf}}\, dS + \int\int_A Rp_{\text{superf}}\, dA\right] \qquad \text{(S.N-2)}$$

siendo $\mathcal{T}$ = el par necesario para hacer girar el agitador
= el par resistente del tanque y de las superficies de las placas
S = área de la superficie total del tanque
A = área de la superficie de las placas deflectoras, considerada positiva para el lado situado «a favor de la corriente» y negativa para el lado situado «contra la corriente»
R = distancia radial desde el eje de rotación del agitador hasta un elemento cualquiera de superficie dS o dA
n = distancia medida normalmente en el interior del fluido desde un elemento cualquiera de superficie del tanque, dS o dA

La solución que se desea puede obtenerse ahora por análisis dimensional de las ecuaciones de movimiento y continuidad, expresando las integrales anteriores en forma adimensional. Es conveniente utilizar D, DN, y ρN^2D^2, como longitudes, velocidades y presiones de referencia, respectivamente.

6.O$_3$ Efectos de pared para la caída de una esfera en un cilindro

a. Los experimentos sobre factores de fricción de esferas se realizan generalmente en tubos cilíndricos. Demostrar, por análisis dimensional, que para este dispositivo el factor de fricción para la esfera es una función de

$$f = f(\text{Re}, R/R') \qquad \text{(6.O-1)}$$

siendo Re = $2Rv_\infty\rho/\mu$. (En esta expresión R es el radio de la esfera, v_∞ la velocidad límite de la esfera, y R' el radio del cilindro.) Se ha encontrado empíricamente que para la región de flujo *reptante* la variación de f con R/R' puede estimarse mediante la *corrección de Ladenburg-Faxén:*[9, 10, 11]

$$f = \frac{24}{\text{Re}}\left(1 + 2{,}1\,\frac{R}{R'}\right) \qquad \text{(6.O-2)}$$

---

[9] R. LADENBURG, *Ann. Physik.* (4), 23, 447 (1907); H. FAXÉN, disertación, Uppsala (1921).
[10] Un trabajo importante (y olvidado) sobre el movimiento de particulas en el seno de fluidos es el de L. SCHILLER, *Handbuch der Experimentalphysik*, vol. IV, parte 2. pp. 339-387; véase también H. FALKENHAGEN, *op. cit.*, vol. IV, parte 1, pp. 206-231.
[11] C. E. LAPPLE, *Fluid and Particle Dynamics*, University of Delaware Press Newark (1951), capítulo 13.

Se sabe muy poco acerca de las correspondientes correcciones para la región de flujo turbulento.[11] Tan sólo se ha investigado recientemente sobre los efectos de pared para gotitas.[12]

b. Proyectar una experiencia con el fin de comprobar el gráfico para esferas de la Fig. 6.3 — 1. Seleccionar el tamaño de la esfera, las dimensiones del cilindro y los materiales adecuados para las experiencias.

6.P$_4$ Factores de fricción para el flujo no-newtoniano en un tubo

En el problema 6.K se ha visto como puede obtenerse una relación entre. el factor de fricción y el número de Reynolds, para el flujo en un tubo circular de un fluido que sigue la ley de la potencia. Esto consiste solamente en expresar de nuevo la solución analítica para el flujo laminar en un tubo. Utilizar la expresión para un fluido que sigue la ley de la potencia, correspondiente a la Ec. 3.6-9, y el método del análisis dimensional de § 6.2, con el fin de hallar los grupos adimensionales de los que debe de depender *f*.

6.Q$_3$ Flujo no-newtoniano a través de medios porosos

Utilizar un razonamiento similar al de la sección § 6.4 para deducir una relación análoga a la ley de Darcy (véase Ec. 4.J−2) que sea válida para el modelo de Ostwald-de Waele (ley de la potencia), expuesto en §§ 1.2 y 3.6. Demostrar que

$$v^n = -\frac{k}{\mu_{efect}} \nabla p \tag{6.Q-1}$$

en la que μ_{efect} viene dada por

$$\mu_{efect} = m \left[\frac{2(25/12)^n \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{n+1}}{150} \right] \frac{D_p^{1-n} \epsilon^{n(1-n)}}{(1-\epsilon)^{1-n}} \tag{6.Q-2}$$

En esta expresión, *m* y *n* son los parámetros reológicos, y • es la porosidad del medio, tal como se determinaría mediante. el flujo de un fluido newtoniano a través del mismo. Por otra parte, *k* es la permeabilidad del medio, determinada para el flujo newtoniano. Obsérvese que μ_{efect} no tiene las unidades de viscosidad.

6.R$_4$ Factores de fricción para flujo turbulento en tubos concéntricos

Ampliar la deducción del problema 5.F, con el fin de obtener una expresión del factor de fricción para el flujo turbulento en tubos concéntricos.

---

[12] J. R. STROM y R. C. KINTNER, A. *I. Ch. E. Journal*, *4*, 153-156 (1958).

CAPÍTULO 7

BALANCES MACROSCÓPICOS EN SISTEMAS ISOTÉRMICOS

En §§ 3.1,2 y 3 se han presentado las ecuaciones de variación para sistemas ísotérmicos; estas ecuaciones son enunciados de las leyes de conservación de la materia, conservación de la cantidad de movimiento, y de «falta de conservación» de la energía mecánica, aplicadas a un elemento «microscópico» de volumen a través del cual circula el fluido. En §§ 7.1,2 y 3 se presentan análogos enunciados de conservación para cualquier sistema «macroscópico» de flujo con una entrada y una salida de fluido. (Véase Fig. 7.0—1.) De hecho, estos balances macroscópicos pueden obtenerse por integración de las ecuaciones de variación[1] del Capítulo 3. Aquí se ha adoptado el método más sencillo de deducir los balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento, siguiendo las deducciones de §§ 3.1 y 3.2. Por otra parte, el balance macroscópico de energía mecánica se presenta sin deducir, ya que las deducciones simplificadas son incorrectas y la deducción rigurosa es demasiado larga.[2] La materia objeto de este capítulo se amplía a sistemas no isotérmicos en el Capítulo 15, y a sistemas de varios componentes en el Capítulo 22.

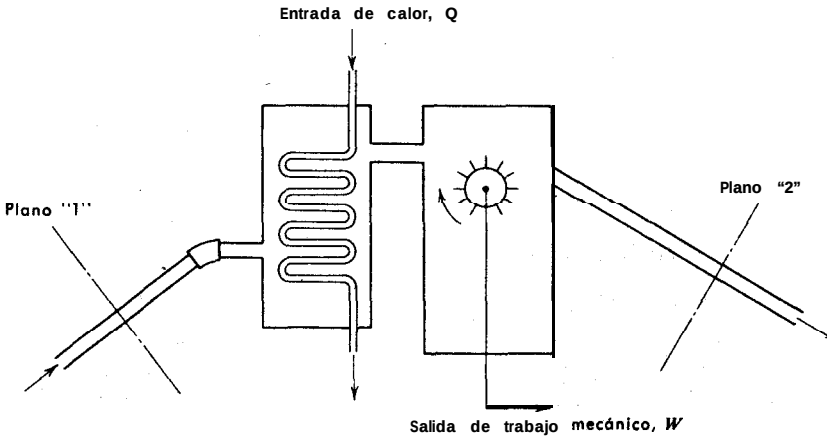
Los balances macroscópicos son muy utilizados en el análisis de sistemas ingenieriles de flujo. Los balances se aplican descartando los términos que resultan despreciables en un determinado problema. Para saber qué términos pueden despreciarse se requiere cierta intuición y en algunos casos se necesitan algunas observaciones experimentales acerca del comportamiento de flujo. Los ejemplos de las secciones §§ 7.4, 7.5 y 7.6 serán de utilidad al lector para iniciarse en los métodos de resolución del problema.

En este capítulo, que es el último de la serie sobre transporte de cantidad de movimiento, se utilizan muchos de los conceptos expuestos en los seis capítulos precedentes: viscosidad, velocidad, perfiles, flujo laminar y turbulento y factores de fricción. Por lo tanto, este capítulo sirve de repaso, a la vez que se desarrollan métodos sistemáticos que son de gran utilidad para resolver numerosos problemas de flujo.

---

[1] R. B. BIRD, *Chem. Eng. Sci., 6,* 123-131 (1957).

[2] Sin embargo, en el ejemplo 7.3 — 1 se da la deducción para el caso especial de flujo estacionario no compresible.



F'g. 7.0-1. Sistema macroscópico de flujo con entrada de fluido por el plano «1» y salida por el plano «2». Para mantener el sistema a temperatura constante puede ser preciso comunicar calor con una velocidad Q. La velocidad de realización de trabajo sobre los alrededores es W. Obsérvese que los signos de Q y W son los convencionales que se utilizan en la mayor parte de los libros de termodinámica.

§ 7.1 BALANCE MACROSCÓPICO DE MATERIA

Consideremos el sistema de la Fig. 7.0—1, en el que existe una sola entrada de fluido (de sección S_1, en el plano «1») y una sola salida (de sección S_2, en el plano «2»). Estos planos de referencia se toman perpendiculares a las paredes del tubo. En esta sección, y en las siguientes, se hacen dos suposiciones que para la mayor parte de los problemas no son muy restrictivas: (a) en los planos «1» y «2» la velocidad de tiempo ajustado es paralela a las paredes de la conducción; (6) la densidad ρ y las demás propiedades físicas no varían a lo largo de la sección transversal de los planos «1» y «2».

Aplicando al sistema de la Fig. 7.0-1 la expresión de la conservación de la materia de la Ec. 3.1— 1, se obtiene

$$\frac{d}{dt} m_{tot} = \rho_1 \langle \bar{v}_1 \rangle S_1 - \rho_2 \langle \bar{v}_2 \rangle S_2 \qquad (7.1\text{–}1)$$

En esta expresión m_{tot} es la masa total[1] de fluido contenida entre los planos «1» y «2». Utilizando el símbolo $w = \rho \langle \bar{v} \rangle S$ para la velocidad y la notación Aw para $w_2 - w_1$ (el valor a la salida menos el valor a la entrada), el ***balance macroscópico de materia en estado no estacionario*** se transforma en

$$\frac{d}{dt} m_{tot} = -Aw \qquad (7.1\text{-}2)$$

[1] Es decir, $m_{tot} = \int \rho \, dV$, estando la integral extendida al volumen de fluido contenido en el Sistema.

Este resultado se puede obtener también por integración directa de la ecuación de continuidad.

En estado estacionario, la masa total de fluido en el sistema no varía con el tiempo, y, por consiguiente, ***el balance macroscópico de materia en estado estacionario es***

$$Aw = 0 \tag{7.1-3}$$

es decir, que la cantidad de materia que entra es igual a la que sale.

§ 7.2 BALANCE MACROSCÓPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Consideremos de nuevo el sistema de la Fig. 7.0— 1, haciendo las dos mismas suposiciones de antes. Aplicando la expresión de la conservación de la cantidad de movimiento de la Ec. 3.2— 1 a este sistema, se obtiene la siguiente ecuación vectorial

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}_{tot} = {} & \rho_1\langle\tilde{v}_1^2\rangle\boldsymbol{S}_1 - \rho_2\langle\tilde{v}_2^2\rangle\boldsymbol{S}_2 \\ & + \{p_1\boldsymbol{S}_1 - p_2\boldsymbol{S}_2\} \\ & - \{\boldsymbol{F}\} + \{m_{tot}\boldsymbol{g}\}\end{aligned} \tag{7.2-1}$$

siendo $\boldsymbol{P}_{tot}$ la cantidad de movimiento **total**[1] del fluido contenido en el sistema. Los dos primeros términos[2] del segundo miembro representan la velocidad de entrada y salida de cantidad de movimiento debido al movimiento global del fluido; se ha despreciado la entrada y salida de cantidad de movimiento relacionada con los componentes de densidad de flujo laminar y turbulento de cantidad de movimiento τ_{xx}, τ_{xy}, etc., debido a que estas contribuciones son comparativamente mucho menores. Los términos entre corchetes representan las distintas fuerzas que actúan sobre el fluido en el sistema: las fuerzas de presión que actúan en los extremos del sistema, la fuerza neta $-\boldsymbol{F}$ de las superficies sólidas que actúa sobre el fluido y la fuerza de gravedad $m_{tot}\,\mathbf{g}$ que actúa sobre la masa total del fluido. Téngase en cuenta que F *es* la ***fuerza del fluido que actúa sobre*** el ***sólido*** y que corresponde a la suma de todas las fuerzas viscosas y de presión.

En la Ec. 7.2-1 $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ se han escrito en negritas para indicar que son vectores. Estos vectores tienen de módulos S_1 y S_2, respectivamente, y su dirección es la de la velocidad de tiempo ajustado en las secciones «1» y «2». Correspondiendo a estos vectores vamos a introducir $\boldsymbol{w}_1 = \rho_1\langle\tilde{v}_1\rangle\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{w}_2 = \rho_2\langle\tilde{v}_2\rangle\boldsymbol{S}_2$, que se definen de igual forma.

---

[1] **La cantidad de movimiento total es** $\boldsymbol{P}_{tot} = \int \rho\tilde{v}\, dV$.

[2] **Mediante** $\langle\tilde{v}^n\rangle$ **se indica que para tubos circulares, por ejemplo,**

$$\langle\tilde{v}^n\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^R \tilde{v}^n r\, dr\, d\theta \Big/ \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta$$

Utilizando esta nueva notación para expresar la Ec. 7.2-1 resulta que el ***balance de cantidad de movimiento en estado no estacionario es***

$$\frac{d}{dt}P_{tot} = -\Delta\left(\frac{\langle\bar{v}^2\rangle}{\langle\bar{v}\rangle}w + pS\right) - F + m_{tot}g \qquad (7.2\text{–}2)$$

Este resultado se puede obtener también integrando la forma de la ecuación de movimiento expresada por la Ec. 3.2−8.

Si el sistema de flujo está en estado estacionario, $dP_{tot}/dt = 0$ y la Ec. 7.2-2 se transforma en ***el balance de cantidad de movimiento en estado estacionario:***

$$F = -\Delta\left(\frac{\langle\bar{v}^2\rangle}{\langle\bar{v}\rangle}w + pS\right) + m_{tot}g \qquad (7.2\text{–}3)$$

Este resultado es útil para calcular las fuerzas que actúan sobre piezas o aparatos, tales como paletas de turbinas y curvas de tuberías; también es útil, juntamente con otros balances macroscópicos, para describir el funcionamiento de eyectores de vapor de agua y otros aparatos en los que hay mezcla de corrientes de fluidos.

La relación $\langle\bar{v}^2\rangle/\langle\bar{v}\rangle$ puede evaluarse si se determinan experimentalmente los perfiles de velocidad o es posible calcularlos -por los métodos que se han expuesto en los Capítulos 2, 3 y 5. En la mayor parte de los problemas ingenieriles de ***flujo turbulento,*** donde el perfil de velocidades es, aproximadamente, plano, se puede substituir $\langle\bar{v}^2\rangle/\langle\bar{v}\rangle$ por $\langle\bar{v}\rangle$. (Véase problema 7.H.)

§ 7.3 BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA MECÁNICA (ECUACIÓN DE BERNOULLI)

En § 3.3 se ha visto que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de § 3.2 se puede transformar en una ecuación que describe la forma en que pueden convertirse entre sí las distintas formas de energía mecánica, y a veces «perderse» por conversión irreversible en energía calorífica. En general, no- es posible hacer 10 mismo con la Ec. 7.2-2. Sin embargo, se puede integrar[1] la Ec. 3.3-2 sobre el volumen del sistema de la Fig. 7.0−1 para obtener el siguiente ***balance macroscópico de energía mecánica en estado no estacionario*** para flujo isotérmico:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + A_{tot}) = -\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle\bar{v}^3\rangle}{\langle\bar{v}\rangle} + \hat{\Phi} + \hat{G}\right)w\right]_{W} - E, \qquad (7.3\text{–}1)^2$$

---

[1] R. B. BIRD, *Chem. Eng. Sci.*, 6, 123-131 (1957). En esta deducción se admite que en todos los puntos del sistema $\partial\hat{\Phi}/\partial t = 0$

[2] Para el flujo de un fluido de ρ constante, la Ec. 7.3-1 se transforma en

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot}) = -\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle\bar{v}^3\rangle}{\langle\bar{v}\rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho}\right)w\right] - W - E_v \qquad (7.3\text{–}1a)$$

En esta expresión, K_{tot}, Φ_{tot} y A_{tot}, son, respectivamente, la energía cinética, la energía potencial y la energía libres (Helmholtz) totales del sistema de flujo; W es la velocidad a la que el sistema realiza trabajo mecánico sobre los alrededores, y E_v es la «pérdida por fricción», es decir, la velocidad con que la energía mecánica se convierte irreversiblemente en energía calorífica. La magnitud $\hat{\Phi}$ es la energía potencial por unidad de masa, y $\hat{G} = \hat{H} - T\hat{S}$ es la entalpia Libre (o energía libre de Gibbs) por unidad de masa.

En aquellos sistemas en los que el comportamiento de flujo es independiente del tiempo, **desaparece** la derivada con respecto al tiempo del primer miembro de la Ec. 7. 3-1. Puesto que $w_1 = w_2 = w$, se puede dividir toda la ecuación por la velocidad de flujo de masa e introducir la notación $\hat{W} = W/w$ y $\hat{E}_v = E_v/w$. Además, para sistemas isotérmicos se puede substituir $\Delta\hat{G}$ por $\int_{p_1}^{p_2}(1/\rho)\,dp$. *De esta* forma *se* obtiene, finalmente, *el balance macroscópico de energía mecánica en estado estacionario:*

$$\Delta\frac{1}{2}\frac{\langle\bar{v}^3\rangle}{\langle\bar{v}\rangle} + \Delta\hat{\Phi} + \int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho}\,dp + \hat{W} + \hat{E}_v = 0 \qquad (7.3\text{-}2)$$

Esta relación *se* denomina a *veces ecuación de Bernoulli,* si bien esta denominación se ha reservado históricamente para fluidos sin fricción con $\hat{W} = 0$ y $\hat{E}_v = 0$. La Ec. 7.3-2 tiene muy numerosas aplicaciones y el principiante debe familiarizarse muy bien con esta importante relación.

Veamos ahora cómo pueden modificarse algunos términos de la Ec. 7.3-2. La relación $\langle\bar{v}^3\rangle/\langle\bar{v}\rangle$, que aparece en la Ec. 7.3-2, puede calcularse por los métodos de los Capítulos 2, 3 y 5, o a partir de los perfiles experimentales de velocidad; pero en la mayor parte de los problemas ingenieriles con flujo *turbulento (es* decir, con perfiles de velocidad aproximadamente planos) $\langle\bar{v}^3\rangle/\langle\bar{v}\rangle$ puede substituirse con buena aproximación por $\langle\bar{v}\rangle^2$ (Véase problema 7.H.)

En los casos habituales, en los que la aceleración de la gravedad es constante en todo el sistema, $\Delta\hat{\Phi}$ se puede substituir por $g\Delta h$, siendo h_1 y h_2 las alturas de los planos «1» y «2», respectivamente.

La integral que aparece en la Ec. 7.3-2 puede evaluarse si se conoce la ecuación de estado (para sistemas isotérmicos, esto implica el conocimiento de p en función de ρ, o *viceversa).* Dos casos especiales son los siguientes:

---

[3] Es decir, $K_{tot} = \int \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2\,dV$, $\Phi_{tot} = \int \rho\hat{\Phi}\,dV$ y $A_{tot} = \int \rho\hat{A}\,dV$, *estando* todas tas integrales extendidas al volumen del sistema de flujo; aquí $\hat{A} = \hat{U} - T\hat{S}$. En realidad, la Ec. 7.3-1 no es totalmente correcta para sistemas de flujo turbulento. La energía cinética total debería expresarse $\int \frac{1}{2}\rho(\bar{v}^3 + \overline{v'^2})\,dV$ y los términos de energía cinética del segundo miembro deberían modificarse con el fin de tener en cuenta el transporte de energía a causa de las fluctuaciones turbulentas. Debido a que se sabe poco acerca de estos efectos, que por otra parte son generalmente pequeños, nos contentaremos con la anterior forma aproximada más sencilla.

gas ideal **isotérmico:**

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho}\, dp = \int_{p_1}^{p_2} \frac{RT}{Mp}\, dp = \frac{RT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (7.3\text{-}3)$$

fluido incompresible :

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho}\, dp = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \qquad (7.3\text{-}4)$$

En la práctica **ingenieril** se admiten con frecuencia estos dos casos limite.

Ejemplo 7.3-1. Deducción del balance de energía mecánica paca flujo estacionario incompresible

Integrar la **Ec.** 3.3-2 con el fin de deducir el balance de **energía mecánica** para el flujo en un sistema como el de la Fig. **7.0−1,** excepto que no hay partes solidas móviles (por consiguiente no hay posibilidad de que el fluido intercambie trabajo con **los** alrededores). **Supóngase** que el fluido es incompresible y considérese solamente el caso de que el comportamiento de tiempo ajustado es estacionario, Utilizar el teorema de divergencia de Gauss para transformar las integrales de volumen en integrales de superficie:

$$\int_V (\nabla \cdot A)\, dV = \int_{S_w} A_n\, dS + \int_{S_1} A_n\, dS + \int_{S_2} A_n\, dS \qquad (7.3\text{–}5)$$

en **la** que V es el volumen de fluido contenido entre «1» y «2». Es conveniente separar la superficie de Ven la superficie de sólido mojado S_w y las **áreas** de las secciones correspondientes a los planos «1» y «2». **Téngase** en cuenta que A_n es el componente de la normal de A dirigido *hacia fiera.*

Solución. Para un fluido incompresible, la **Ec.** 3.3-2 (tomando $g = -\nabla\Phi$ y cambiando el signo) se transforma en

$$\underset{(a)}{-\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2)} \underset{(b)}{- (\nabla \cdot \tfrac{1}{2}\rho v^2 v)} \underset{(c)}{- (\nabla \cdot pv)} \underset{(d)}{- (\nabla \cdot [\tau \cdot \text{al})}$$

$$\underset{(e)}{- (\tau : \nabla v)} \underset{(f)}{+ \rho(v \cdot \nabla\Phi)} \qquad (7.3\text{–}6)$$

La ecuación anterior es tanto válida para flujo laminar como turbulento. A continuación se. procede a la integración, extendiendola al volumen de todo el sistema de flujo:

(a)

$$-\int_V \frac{a}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2)\, dV = -\frac{d}{dt}\int_V \tfrac{1}{2}\rho v^2\, dV = -\frac{d}{dt} K_{\text{tot}} = 0 \qquad (7.3\text{-}7)$$

Esta integral **se** anula debido a que la energla cinética total en el interior del sistema no **varía** con el tiempo.

(b)

$$\int_V (\nabla \cdot \tfrac{1}{2}\rho v^2 v)\, dV = \int_{S_w + S_1 + S_2} \tfrac{1}{2}\rho v^2 v_n\, dS$$

$$= -\tfrac{1}{2}\rho \langle v_1^3 \rangle S_1 + \tfrac{1}{2}\rho \langle v_2^3 \rangle S_2 \qquad (7.3\text{-}8)$$

La integral extendida a S_w es nula, ya que sobre las superficies mojadas v es cero. El primer tbmino adquiere signo negativo, debido a que la velocidad de flujo está dirigida hacia el interior (es decir, opuesta a la normal hacia fuera)

$$(c) \qquad \int_V (V \cdot pv)\, dV = \int_{S_w+S_1+S_2} pv_n\, dS = -p_1\langle v_1\rangle S_1 + p_2\langle v_2\rangle S_2 \qquad (7.3\text{-}9)$$

$$(d) \qquad \int_V (\nabla \cdot [\tau \cdot v])\, dV = \int_{S_w+S_1+S_2} [\tau \cdot v]_n\, dS = 0 \qquad (7.3\text{-}10)$$

La integral sobre S_w es cero por la misma razón; las integrales extendidas a S_1 y S_2 representan el trabajo producido por las fuerzas viscosas al impulsar el fluido hacia el interior o el exterior del sistema y esta contribución puede despreciarse con toda seguridad

$$(e) \qquad \int_V (\tau : \nabla v)\, dV = E_v \qquad (7.3\text{-}11)$$

Esta integral representa la velocidad total de la conversión irreversible de energía mecánica en energía interna.

$$(f) \qquad \rho \int_V (v \cdot \nabla\hat{\Phi})\, dV = \rho \int_V [(\nabla \cdot \hat{\Phi}v) - \hat{\Phi}(\nabla \cdot v)]\, dV$$

$$= \rho \int_{S_w+S_1+S_2} \hat{\Phi} v_n\, dS = -\rho\hat{\Phi}_1\langle v_1\rangle S_1 + \rho\hat{\Phi}_2\langle v_2\rangle S_2 \qquad (7.3\text{-}12)$$

puesto que para un fluido de ρ constante $(\nabla \cdot v) = 0$.

Substituyendo los resultados anteriores en la forma integrada de la Ec. 7.3 -6, se llega a

$$0 = \Delta\tfrac{1}{2}\rho\langle v^3\rangle S + \Delta p\langle v\rangle S + E_v + \Delta\rho\hat{\Phi}\langle v\rangle S \qquad (7.3\text{-}13)$$

Dividiendo por w = $\rho\langle v\rangle$ S, que para el flujo estacionario es una constante, se obtiene

$$0 = \Delta\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \frac{1}{\rho}\Delta p + \hat{E}_v + \Delta\hat{\Phi} \qquad (7.3\text{-}14)$$

Esta ecuación es un caso especial de la Ec. 7.3 -2. El termino $\hat{W}$ puede obtenerse mediante la inclusión de superficies solidas móviles, que permitan transmitir energía mecánica a los alrededores.1 (Véase problema 7.R.)

§ 7.4 ESTIMACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR FRICCIÓN

Debido a la gran utilidad de la Fc. 7.3-2 para el cálculo cuantitativo, se ha dedicado una gran atención al desarrollo de métodos que permiten estimar las pérdidas por fricción $\hat{E}_v$ en las distintas partes de un sistema de flujo. Claro esta que para un sistema cualquiera puede obtenerse experimentalmente $\hat{E}_v$ midiendo todos los demás términos de la Fc. 7.3-2. Lo más frecuente es estimar $\hat{E}_v$ y utilizar luego la Ec. 7. 3-2 para hallar cualquier otra magnitud, tal como la potencia necesaria

para bombear un fluido o la velocidad de flujo para una determinada potencia. Por lo tanto, esta sección se dedica al estudio teórico de los distintos métodos de estimación de $\hat{E}_v$.

Al deducir la Ec. 7.3-1 mediante la integración de la Ec. 3.3-2, se ha visto que el término $\hat{E}_v$ es (véase Ec. 7.3-11)

$$E_v = -\int (\tau : \nabla v)\, dV \tag{7.4-1}$$

Es decir, que E_v es exactamente la integral de la velocidad local de disipación de energía mecánica extendida a todo el volumen del sistema de flujo. En los sistemas sencillos de flujo laminar, E_v puede calcularse directamente a partir de la integral. Sin embargo, para los casos complejos de flujo, que generalmente se presentan en los sistemas ingenieriles, no es posible evaluar la integral de las perdidas por fricción.

Desde luego, puede utilizarse el análisis dimensional para establecer la forma general de E_v. Por ejemplo, para flujo newtoniano incompresible, la Ec. 7.4-1 se transforma en

$$E_v = +\mu \int \Phi_v\, dV \tag{7.4-2}$$

en la que Φ_v es la función de disipación [de dimensiones (velocidad)^2/(longitud)^2] definida en la Tabla 3.4-8. Si el segundo miembro de la Ec. 7.4-2 se hace adimensional utilizando una velocidad característica v_0 y una longitud característica l_0,

$$E_v = (\rho v_0^3 l_0^2)(\mu / l_0 v_0 \rho) \int \Phi_v^*\, dV^* \tag{7.4-3}$$

en la que $\Phi_v^* = (l_0/v_0)^2\, \Phi_v$ y $dV^* = d(V/l_0^3)$. Utilizando los conceptos adimensionales de §§ 3.7 y 6.2, se encuentra que la integral de la Ec. 7.4-3 depende solamente de los distintos grupos adimensionales de las ecuaciones de variación y de los diferentes factores geométricos que intervienen en las condiciones límite. Por consiguiente, si el único grupo adimensional significativo es un número de Reynolds, $\mathrm{Re} = l_0 v_0 \rho / \mu$, la forma general de la Ec. 7.4-3 es

$$E_v = \rho v_0^3 l_0^2 \times \begin{pmatrix} \text{(una función adimensional de Re y} \\ \text{las distintas relaciones geométricas)} \end{pmatrix} \tag{7.4-4}$$

Para el flujo en estado estacionario se opera con el término $\hat{E}_v = E_v / w$, siendo $w = \rho \langle \bar{v} \rangle S$ la velocidad de flujo de masa que pasa a través de *cualquier* sección. Si se elige $\langle \bar{v} \rangle$ como velocidad de referencia v_0 y $\sqrt{S}$ como longitud de referencia l_0, resulta

$$\hat{E}_v = \tfrac{1}{2} \langle \bar{v} \rangle^2 e_v \tag{7.4-5}$$

en la que e_v ***es el factor de pérdidas por fricción,*** que es una función de un número de Reynolds y de las adecuadas relaciones geométricas adimensionales. El factor $\frac{1}{2}$ se ha introducido por semejanza con la forma de otras ecuaciones afines.

Consideremos ahora las pérdidas por fricción en una conducción recta, con el fin de establecer la relación entre el ***factor de pérdidas por fricción*** e_v ***y*** el ***factor de fricción*** f, y entre la ***pérdida por fricción*** $\hat{E}_v$ ***y*** la ***fuerza del fluido sobre el sólido*** F. Consideraremos solamente el caso especial del flujo estacionario de un fluido de ρ constante ***en*** conducciones rectas, de sección S y longitud L, arbitrarias pero constantes. Si el fluido circula merced a un gradiente de presión y a la gravedad (y en la dirección de la gravedad), las Ecs. 7.2-3 y 7.3-2 se transforman en

(cantidad de movimiento) $$F = (p_1 - p_2)S + (\rho SL)g \tag{7.4-6}$$

(energía mecánica) $$\hat{E}_v = \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + gL \tag{7.4-7}$$

Multiplicando la segunda ecuación por ρS y restando, se obtiene

$$\hat{E}_v = \frac{F}{\rho S} \tag{7.4-8}$$

Si además el flujo del fluido es turbulento, puede utilizarse la expresión de F en función del radio hidráulico medio R_h (véase Ec. 6.2—16), para obtener

$$\hat{E}_v = \tfrac{1}{2}\langle v\rangle^2 \frac{L}{R_h} f \tag{7.4-9}$$

en la que f es el factor de fricción que se ha considerado en el Capítulo 6. La Ec. 7.4-9 es de la misma forma que la Ec. 7.4-5, y la comparación de ambas indica que $e_v = (L/R_h)f$.

La Ec. 7.4-9 expresa la pérdida por fricción $\hat{E}_v$ en las longitudes rectas de la conducción. Si en el sistema de flujo existen diversos «obstáculos», tales ***como*** accesorios, variaciones bruscas de diámetro, válvulas o aparatos de medida de flujo, es preciso introducir otras contribuciones a $\hat{E}_v$. Estas contribuciones adicionales pueden expresarse según la forma de la Ec. 7.4-5, determinando e_v mediante uno de estos dos métodos: ***(a)*** resolución simultánea de los balances 'macroscópicos o ***(b)*** medidas experimentales. En la Tabla 7.4-1 se indican algunos valores aproximados de e_v, considerando que la velocidad media ***aguas abajo*** de la perturbación es (0); estos valores corresponden a flujo turbulento, para el cual la variación con el número de Reynolds no es demasiado importante.

Teniendo en cuenta la discusión anterior, se expresa a continuación la Ec. 7.3-2 en la forma ***aproximada*** que se utiliza frecuentemente para los cálculos de flujo turbulento, en un sistema compuesto de varios tipos de conducciones y resistencias adicionales :

$$\Delta\tfrac{1}{2}\langle\bar{v}\rangle^2 + g\,\Delta h + \int_{p_1}^{p_2}\frac{1}{\rho}\,dp + \hat{W} + \Sigma_i\left(\tfrac{1}{2}\langle\bar{v}\rangle^2\frac{L}{R_h}f\right)_i + \Sigma_i(\tfrac{1}{2}\langle\bar{v}\rangle^2 e_v)_i = 0 \qquad (7.4\text{–}10)$$

suma de todos los tramos de conducciones rectas

suma de todos los accesorios, válvulas, aparatos de medida, etc.

donde R_h es el radio hidráulico medio definido en la Ec. 6.2-16, f es el factor de fricción definido en la Ec. 6.1-4 y e_v es el factor de pérdidas por fricción que se indica en la Tabla 7.4-1. Téngase en cuenta que en los primeros términos $\langle\bar{v}\rangle$ representa las velocidades medias en los planos «1» y «2»; en el primer sumatorio, $\langle\bar{v}\rangle$ corresponde a la velocidad media en el segmento iésimo de la conducción; y en el segundo sumatorio $\langle\bar{v}\rangle$ es la velocidad media de flujo *aguas abajo* del iésimo accesorio, válvula u otro obstáculo.

TABLA 7.4 –1

BREVE RESUMEN DE FACTORES DE PÉRDIDA POR FRICCIÓN PARA UTILIZAR EN LA EC. 7.4-10

(Valores aproximados para flujo turbulento)[a]

Obstáculos	e_v
Cambios bruscos del área de la sección transversal[b]	
Entrada normal de tubería	0,05
Contracción brusca	$0{,}45(1-\beta)$
Ensanchamiento brusco[c]	$\left(\frac{1}{\beta}-1\right)^2$
Orificio (de borde afilado)	$2{,}7(1-\beta)(1-\beta^2)\frac{1}{\beta^2}$
Accesorios y válvulas	
Codos de 90” (curvados)	0,4-0,9
Codos de 90° (en ángulo)	1,3-1,9
Codos de 45°	0,3-0,4
Válvula de asiento (abierta)	6-10
Válvula de compuerta (abierta)	0,2

[a] Tomados de H. KRAMERS, ***Physische Transportverschijnselen,*** Technische Hogeschool, Delf, Holland (1958), pp. 53-54.

[b] = (área de la sección menor)/(área de la sección mayor)

[c] Véase la deducción de los balances macroscópicos del ejemplo 7.5 – 1. Cuando $\beta = 0$, $\hat{E}_v = \frac{1}{2}\langle\bar{v}\rangle^2$, siendo $\langle\bar{v}\rangle$ la velocidad aguas arriba del ensanchamiento.

Ejemplo 7.4-1. Potencia necesaria para el flujo en una conducción

¿Qué potencia se necesita para bombear agua en el sistema de la Fig. 7.4−1? El agua ($\rho = 1{,}00$ g cm^{-3}; $\mu = 1{,}0$ cp) se eleva al depósito superior a razón de 0,34 m^3 min^{-1}. Toda la conducción está formada por una tubería circular lisa de 10 cm de diámetro interno.

Solución. La velocidad media en la conducción es

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{(0{,}34)(10)}{\pi(0{,}05)^2} = 0{,}72 \text{ m seg}^{-1}$$

y el número de Reynolds es

$$\text{Re} = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = \frac{(0{,}10)(0{,}72)(10^3)}{10^{-3}} = 7{,}2 \times 10^4$$

por lo tanto, el flujo *es turbulento*

La contribución a $\hat{E}_v$ de las distintas longitudes de tubería será

$$\Sigma_i \left(\tfrac{1}{2} \langle v \rangle^2 \frac{L}{D} 4f \right)_i = \frac{2\langle v \rangle^2 f}{D} \Sigma_i L_i$$

$$= \frac{2(0{,}72)^2(0{,}0049)}{(0{,}10)}(1{,}5 + 90 + 36 + 24 + 12)$$

$$= (0{,}0508)\ (163{,}5) = 8{,}3 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-2}$$

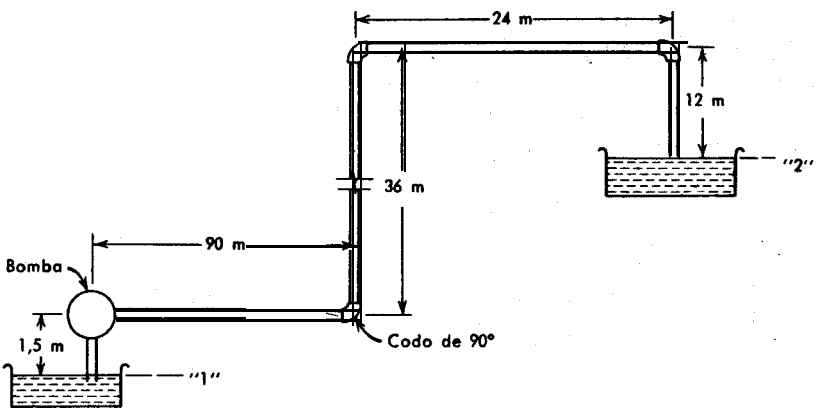


Fig. 7.4-1. Flujo en una conducción con perdidas por fricción provocadas por accesorios.

La contribución a $\hat{E}_v$ de la contracción brusca, de los tres codos de 90°, y del ensanchamiento brusco (véase Tabla 7.4−1), serán

$$\Sigma_i(\tfrac{1}{2}\langle v\rangle^2 e_v)_i = 1/2(0{,}72)^2(0{,}45 + 3.\ \tfrac{1}{2} + 1)$$

$$= 0{,}76\ \text{m}^2\ \text{seg}^{-2}$$

Aplicando la **Ec. 7.4—10** resulta

$$0 + (9{,}81)(37{,}5 - 12) + 0 + W + 8{,}3 + 0{,}76 = 0$$

y despejando $\hat{W}$ se obtiene

$$\hat{W} = -250{,}16 - 8{,}3 - 0{,}76 \doteq -259\ \text{m}^2\ \text{seg}^{-2}$$

Este es el trabajo (por unidad de masa) producido *por* el fluido en la bomba. Por lo tanto, la bomba comunica al fluido que circula en el sistema un trabajo de + 259 $\text{m}^2\ \text{seg}^{-2}$ o 259/9,81 = 26,4 m kg_f/kg_m. La velocidad de flujo de masa es

$$w = Q\rho = (0{,}34/60)(10^3) = 5{,}67\ \text{kg}_m\ \text{seg}^{-1}$$

Por lo tanto

$$-W = -w\hat{W} = (5{,}67)(26{,}4) = 150\ \text{kg}_f\text{m}\ \text{seg}^{-1}$$
$$= 2\ \text{hp}$$

La potencia de la bomba es, pues, 2 hp.

§ 7.5 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE FLUJO ESTACIONARIO

En § 3.5 se ha visto como se plantean las ecuaciones diferenciales para calcular los perfiles de velocidad y presión en sistemas **isotérmicos** de flujo, simplificando las ecuaciones de variación. En esta sección se procede de igual manera con los balances macroscópicos, con el fin de plantear las ecuaciones algebraicas que describen las propiedades de entrada y salida del fluido en el sistema representado en la Fig. **7.0—** 1. Esta sección se reduce a sistemas **isotérmicos** ***estacionarios.***

Para cada problema se utiliza una forma especial de cada uno de los tres balances macroscópicos de las secciones §§ 7.1, 2 y 3. Teniendo en cuenta los términos que se han descartado se tiene automáticamente una lista completa de las suposiciones inherentes al resultado final. Todos los ejemplos ilustrativos que se presentan aquí son de líquidos incompresibles; en el caso de fluidos compresibles se producen con frecuencia considerables efectos caloríficos, y por esta razón no se considerarán hasta el Capítulo **15.**

Ejemplo 7.5-1. Aumento de presión y pérdidas por fricción en un ensanchamiento brusco

Un fluido incompresible circula con flujo turbulento por un tubo circular cuya área de la sección transversal es S_1, y desemboca en un gran tubo de **sección** transversal S_2, tal como **se** indica en la Fig. 7.5-1. Utilizar los balances macroscópicos con el fin de

obtener una expresión de la variación de presión entre «1» y «2» y las pérdidas por fricción debidas al ensanchamiento brusco. Para abreviar, tómese $v_1 = \langle \bar{v}_1 \rangle$ y $v_2 = \langle \bar{v}_2 \rangle$. Los perfiles de velocidad en «1» y «2» pueden considerarse planos.

Solución.

a. Balance de materia. Para flujo estacionario, según la Ec. 7.1-3, tendremos

$$w_1 = w_2 \qquad 0 \qquad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \tag{7.5-1}$$

Para un fluido de ρ constante, resulta (siendo $\beta = S_1/S_2$):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\beta} \tag{7.5-2}$$

b. Balance de cantidad de movimiento. El componente del balance de cantidad de movimiento (Ec. 7.2-3) en la dirección de *flujo es*

$$F = w_1 v_1 - w_2 v_2 + p_1 S_1 - p_2 S_2 \tag{7.5-3}$$

La fuerza F consta de dos partes: la fuerza viscosa que actúa sobre las superficies cilíndricas paralelas a la dirección de flujo y la fuerza de presión que actúa sobre *la* superficie en «forma de arandela» que está inmediatamente después del plano «1» y que es perpendicular el eje de flujo. La primera contribución puede despreciarse y la segunda tomarse igual a $p_1(S_2 - \mathrm{Sr})$, suponiendo que la presión sobre la superficie en forma de arandela es la misma que en «1». Según esto, se llega a

$$-p_1(S_2 - S_1) = \rho v_2 S_2 (v_1 - v_2) + p_1 S_1 - p_2 S_2 \tag{7.5-4}$$

Despejando la diferencia de presión, se obtiene

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2) \tag{7.5-5}$$

o, en función de' la velocidad aguas abajo del ensanchamiento

$$p_2 - p_1 = \rho v_2^2 \left(\frac{}{\beta} - 1 \right) \tag{7.5-6}$$

Obsérvese que el balance de cantidad de movimiento predice (correctamente) un *aumento* de la presión

c. Balance de energía mecánica. La Ec. 7.3-2 para este sistema es

$$\tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \hat{E}_v = 0 \tag{7.5-7}$$

Introduciendo la Ec. 7.5-6 para el aumento de presión, después de algunas simplificaciones, se obtiene

$$\hat{E}_v = \tfrac{1}{2} v_2^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \tag{7.5-8}$$

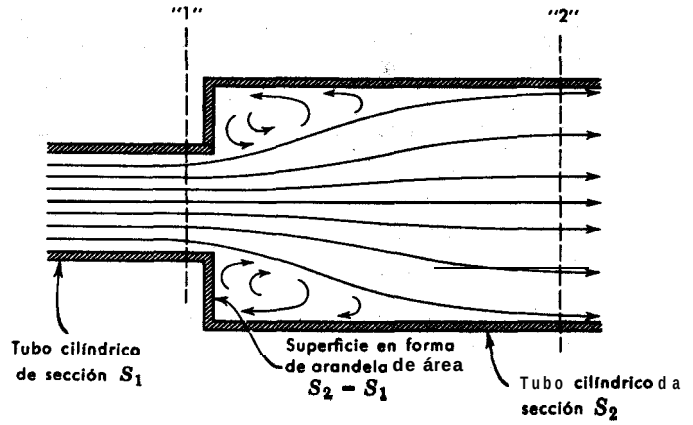


Fig. 7.5-1. Flujo en un ensanchamiento brusco.

que es un valor de la Tabla 7.4— 1. Este ejemplo ha servido para indicar como se utilizan los balances macroscópicos con el fin de obtener una expresión de las pérdidas por fricción en un obstáculo sencillo del sitema de flujo. Para números de Reynolds bajos, la suposición de que los perfiles de velocidad son planos puede conducir a un error considerable. (Véase problema 7.1.)

Ejemplo 7.5-2. Eficacia de un eyector líquido-líquido

En la Fig. 7.5 -2 se representa un diagrama esquemático de un eyector liquido-líquido. Se desea analizar la mezcla de las dos corrientes (del mismo líquido) mediante los balances globales. En el plano «1» confluyen dos corrientes líquidas, una con velocidad v_0 y área de la sección transversal $\frac{1}{3}S_1$, y la otra con velocidad $v_0/2$ y área de la sección transversal $\frac{2}{3}S_1$. El plano «2» se toma suficientemente lejos aguas abajo, de forma que las dos corrientes se han mezclado y la velocidad v_2 es prácticamente uniforme. El flujo es turbulento y los perfiles de velocidad se consideran planos. En este análisis se desprecia F

Solución.

a. Balance de materia. Para el estado estacionario,

$$w_1 = w_2 \quad 0 \quad \rho_1\langle\bar{v}_1\rangle S_1 = \rho_2\langle\bar{v}_2\rangle S_2 \tag{7.5-9}$$

Para un fluido incompresible $\rho_1 = \rho_2 =$ p; y de acuerdo con la geometria del sistema $S_1 = S_2 = S$; por lo tanto,

$$\langle\bar{v}_1\rangle = \langle\bar{v}_2\rangle = \tfrac{1}{3}v_0 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}v_0) = \tfrac{2}{3}v_0 \tag{7.5-10}$$

b. Balance de cantidad de movimiento. Si se desprecia F, el componente del balance de cantidad de movimiento en la dirección del eje de flujo es

$$w_1\frac{\langle\bar{v}_1^2\rangle}{\langle\bar{v}_1\rangle} - w_2\frac{\langle\bar{v}_2^2\rangle}{\langle\bar{v}_2\rangle} + p_1S_1 - p_2S_2 = 0 \tag{7.5-11}$$

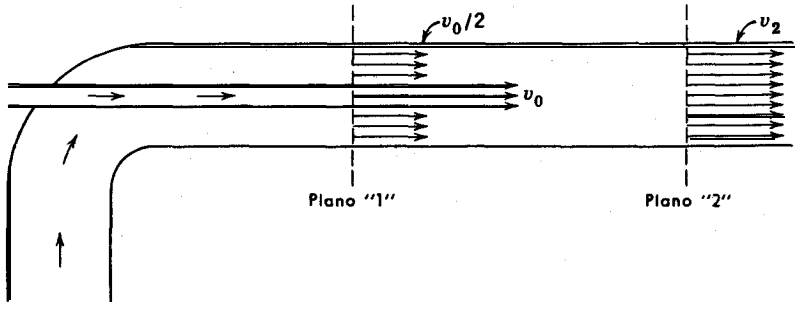


Fig. 7.5–2. Eyector líquido-liquido.

Las relaciones de velocidades medias (suponiendo perfiles planos) son

$$\frac{\langle \bar{v}_2^2 \rangle}{\langle \bar{v}_2 \rangle} = \langle \bar{v}_2 \rangle = \tfrac{2}{3} v_0 \tag{7.5-12}$$

$$\frac{\langle \bar{v}_1^2 \rangle}{\langle \bar{v}_1 \rangle} = \frac{\frac{1}{3} v_0^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{\frac{1}{3} v_0 + \frac{2}{3}\left(\frac{v_0}{2}\right)} = \tfrac{3}{4} v_0 \tag{7.5-13}$$

Substituyendo estas expresiones en la Ec. 7.5-11, y utilizando el resultado del apartado (a), según el cual $w_1 = w_2 = \frac{2}{3}\rho v_0 S$, se llega a

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{18}\rho v_0^2 \tag{7.5-14}$$

Ésta es la expresión del *aumento* de presión que resulta de la mezcla de las dos corrientes.

c. Balance de energía *mecánica.* Si se suprimen $\hat{W}$ y $\hat{\Phi}$, la Ec. 7.3-2, para el caso de un fluido incompresible, se transforma en

$$\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}_2^3 \rangle}{\langle \bar{v}_2 \rangle} - \frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}_1^3 \rangle}{\langle \bar{v}_1 \rangle} + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \hat{E}_v = 0 \tag{7.5-15}$$

Las relaciones de velocidades medias, calculadas como antes, son

$$\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}_2^3 \rangle}{\langle \bar{v}_2 \rangle} - \frac{1}{2}\langle \bar{v}_2 \rangle^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} v_0\right)^2 = \tfrac{2}{9} v_0^2 \tag{7.5-16}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}_1^3 \rangle}{\langle \bar{v}_1 \rangle} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} v_0^3 + \frac{2}{3}\frac{1}{2} v_0^3\right)}{\frac{1}{3} v_0 + \frac{2}{3}\frac{1}{2} v_0} = \tfrac{5}{16} v_0^2 \tag{7.5-17}$$

Substituyendo estas expresiones en la Ec. 7.5-15 y utilizando después la Ec. 7.5-14, se llega a

$$\hat{E}_v = \tfrac{5}{144} v_0^2 \tag{7.5-18}$$

Este análisis conduce a buenos resultados para eyectores líquido-líquido. Sin embargo, en eyectores gas-gas la densidad varía considerablemente, y es preciso incluir en el análisis la ecuación del balance global de energía y una ecuación de estado. (Véase ejemplo 15.4-4.)

Ejemplo 7.5-3. Fuerza que actúa sobre la curvatura de una tubería

Por un codo de 60°, en el que existe una contracción del diámetro interno de 10 a 7,5 cm, circulan 3,4 $m^3\ min^{-1}$ de agua a 95" C. Calcular la fuerza que actúa sobre el codo, sabiendo que la presión a la salida del mismo es de 1,1 atm. (Véase Fig. 7.5-3.)

Solución. El número de Reynolds para el flujo en la tubería de 7,5 cm (siendo $\rho =$ = 0,962 $g\ cm^{-3}$ y μ = 0,299 cp) es

$$\mathrm{Re} = \frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu} = \frac{4Q\rho}{\pi D\mu}$$

$$= \frac{4(3{,}4 \times 10^6/60)\,(0{,}962)}{\pi(7{,}5)\ (2{,}99 \times 10^{-3})} = 3{,}1 \times 10^6$$

Por consiguiente, el flujo es altamente turbulento y por esto se admite que los perfiles de velocidad son casi planos. Para simplificar, se tomará v_1 en vez de $\langle \bar{v}_1 \rangle$, v_1^2 en vez de $\langle \bar{v}_1^2 \rangle$, etc. Los tres balances se aplican en la forma siguiente:

a. Balance de materia. Para el flujo estacionario, $w_1 = w_2$; y, si la densidad del fluido no varía, el balance de materia da

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \equiv \beta \tag{7.5-19}$$

siendo β la relación entre las secciones menor y mayor.

b. Balance de energía mecánica. Para flujo estacionario incompresible, la Ec. 7.3-2 resulta en este caso (no teniendo en cuenta $\hat{W}$ ni $\Delta\hat{\Phi}$):

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 - \tfrac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \hat{E}_v = 0 \tag{7.5-20}$$

De acuerdo con la Tabla 7.4-1 y la Ec. 7.4-5, el factor de fricción resutta aproximadamente igual a $\frac{1}{2}v_2^2 \cdot \frac{2}{5}$ o sea $\frac{1}{5}v_2^2$. Introduciéndolo en la Ec. 7.5 -20 y utilizando el balance de materia, se llega a

$$p_1 - p_2 = \rho v_2^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{1}{5}) \tag{7.5-21}$$

que representa la caída de presión en el codo en función de la velocidad v_2 y el factor geométrico β, que son ambos conocidos.

c. Balance de cantidad de movimiento. En este caso hay que considerar los componentes x e y del balance de cantidad de movimiento; para el componente x tendremos

$$F_x = w_{1x}v_1 - w_{2x}v_2 + p_1S_1 - p_2S_{2x}$$
$$= (\rho v_1 S_1)v_1 - (\rho v_2 S_2 \cos\theta)v_2 + p_1S_1 - p_2S_2\cos\theta$$
$$= \rho v_2^2 S_2(\beta - \cos\theta) + (p_1 - p_2)S_1 + p_2(S_1 - S_2\cos\theta) \qquad (7.5\text{-}22)$$

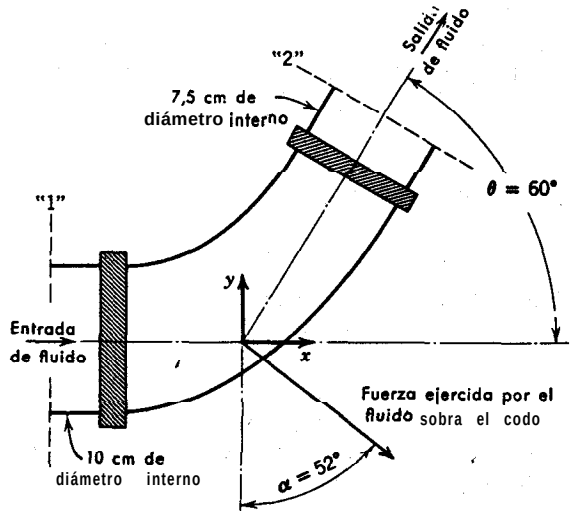


Fig. 7.5-3. Fuerza de reacción en un codo de reducción de una tubería.

Introduciendo la Ec. 7.5 -21, se obtiene

$$F_x = \rho v_2^2 S_2(\beta - \cos\theta) + \rho v_2^2 S_2\beta^{-1}(\tfrac{7}{10} - \tfrac{1}{2}\beta^2) + p_2S_2(\beta^{-1} - \cos\theta)$$
$$= \rho Q^2 S_2^{-1}(\tfrac{7}{10}\beta^{-1} - \cos\theta + \tfrac{1}{2}\beta) + p_2S_2(\beta^{-1} - \cos\theta) \qquad (7.5\text{-}23)$$

Para el componente y, siendo $w_{1y} = 0$ y $S_{1y} = 0$, tendremos

$$F_y = -w_{2y}v_2 - p_2S_{2y} - m_{tot}g$$
$$= -\rho Q^2 S_2^{-1}\,\text{sen}\,\theta - p_2S_2\,\text{sen}\,\theta - \pi R^2 L\rho g \qquad (7.5\text{-}24)$$

siendo L y R la longitud y el radio de un cilindro aproximadamente equivalente.

De esta forma, se han obtenido los componentes de la fuerza de reacción en función de magnitudes conocidas y sólo falta substituir los valores numéricos:

$\rho = 961\ \text{kg}_m\ \text{m}^{-3}$ $\qquad S_2 = 4{,}4 \times 10^{-3} m^2$

$Q = 0{,}0567\ \text{m}^3\ \text{seg}^{-1}$ $\qquad \beta = \dfrac{7{,}5^2}{10} = 0{,}562$

$\cos\theta = 1/2$ $\qquad R \doteq 0{,}0375$ m

$\text{sen}\,\theta = \sqrt{3}/2$ $\qquad L \doteq 0{,}25$ m

$p_2 = 1{,}14 \times 10^4 \text{kg}_f\ \text{m}^{-2}$

$$F_z = \frac{(961)(0{,}0567)^2}{(0{,}0044)(9{,}81)}\left(\frac{7}{10}\frac{1}{0{,}562} - \frac{1}{2} + \frac{0{,}562}{2}\right) + (1{,}14 \times 10^4)(0{,}0044)\left(\frac{1}{0{,}562} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 71{,}6(1{,}24 - 0{,}50 + 0{,}28) + 50(1{,}78 - 0{,}50)$$

$$= 73 + 64 = 137 \ \mathbf{kg}_f \qquad (7.5\text{-}25)$$

$$F_y = -\frac{(961)(0{,}0567)^2}{(0{,}0044)(9{,}81)}\left(\frac{1{,}732}{2}\right) - (1{,}14 \times 10^4)(0{,}0044)\left(\frac{1{,}732}{2}\right) - (3{,}142)(0{,}0375)^2(0{,}25)\,(961)$$

$$= -62 - 43 - 1 = -106 \ \mathbf{kg}_f \qquad (7.5\text{-}26)$$

Por consiguiente, el valor de la fuerza es

$$|F| = \sqrt{137^2 + 106^2} = 173 \ \mathbf{kg}_f \qquad (7.5\text{-}27)$$

El ángulo que forma esta fuerza con la vertical es

$$\alpha = \text{arctg}\ \frac{137}{106} = \text{arctg}\ 1{,}29 = 52° \qquad (7.5\text{-}28)$$

Al considerar el cálculo se observa que todos los efectos son importantes, con la única excepción de la fuerza de 1 kg, correspondiente al peso de fluido.

Ejemplo 7.5-4. Flujo isotérmico de un liquido a través de un orificio

Un método frecuentemente utilizado para determinar la velocidad de flujo en una conducción, consiste en medir la caída de presión que se produce al atravesar un «obstáculo» situado en la conducción. En el caso de un orificio, el obstáculo consiste en una lámina delgada provista de una perforación central, tal como se representa en la Fig. 7.5-4. Aquí vamos a deducir una fórmula para la velocidad de flujo en el orificio. Los demás aparatos de medida de flujo se pueden tratar de una forma análoga. Para resolver esta cuestión se aplica un balance de materia y otro de energía mecánica a la región comprendida entre los planos «1» y «2», en los que están situadas las dos tomas de presión.

Solución.

a. Balance de materia. Para un fluido de densidad constante en un sistema en el que $S_1 = S_2 = S$, el balance de materia conduce a

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = \langle v \rangle \qquad (7.5\text{-}29)$$

b. Balance de energía mecánica. Para un fluido de ρ constante, cuando no hay producción de trabajo ni variación de energía potencial, tendremos:

$$\frac{\langle v_2 \rangle^2}{2\alpha_2} - \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2\alpha_1} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\langle v_2 \rangle^2 e_v = 0 \qquad (7.5\text{-}30)$$

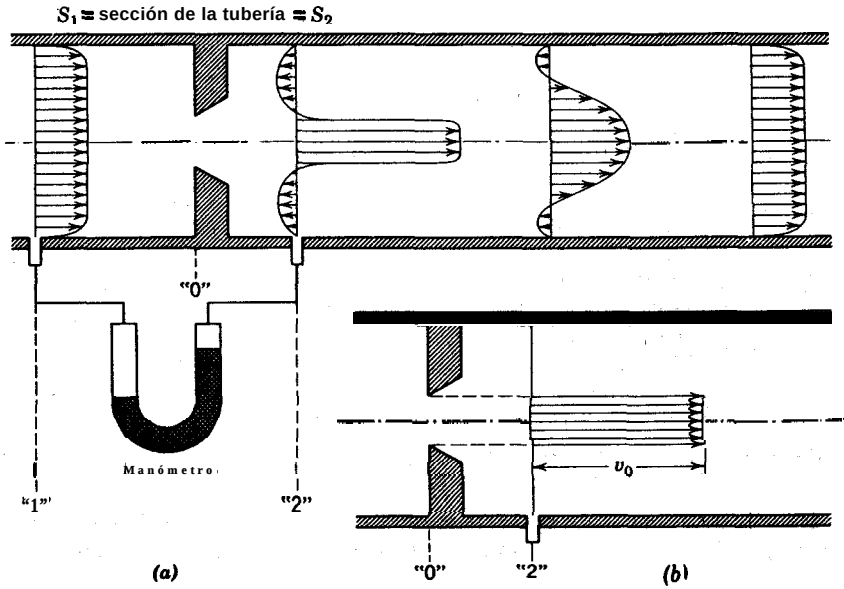


Fig. 7.5-4. (*a*) Orificio de borde afilado, con indicación de los perfiles aproximados de velocidad en distintos planos próximos a la placa del orificio. Obsérvese que el chorro de liquido a la salida del orificio tiene un diámetro algo menor que éste. Para el flujo altamente turbulento el chorro adquiere una sección mínima correspondiente a la *vena* contracta. Obsérvese que junto a la pared se produce algo de flujo de retroceso. El valor de este estrechamiento del chorro, estimado a partir de la teoría del flujo ideal, es C_c = «coeficiente de contracción» = $(S_{\text{vena contracta}}/S_0)$ = $\pi/(\pi + 2)$ = 0,611. [Véase H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, primera edición americana (1945), p. 99.] (*b*) Perfil aproximado de velocidad en el plano «2», utilizado para el cálculo de α_2.

En esta expresión se han introducido los factores α con el fin de tener en cuenta la diferencia *entre* $\langle v \rangle^2$ y $\langle v^3 \rangle / \langle v \rangle$. Combinando las Ecs. 7.5-29 y 30 se obtiene una expresión para $\langle v \rangle$, que al multiplicarla por ρS, resulta

$$w = \rho \langle v \rangle S = PS \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)/\rho}{\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} + e_v}} \tag{7.5-31}$$

De esta forma se obtiene la velocidad de flujo de masa en función de la diferencia de presión. Debido a que los modelos de flujo son complicados, α_1, α_2 y e_v, sólo se pueden obtener de forma aproximada:

i. Se supone que e_v es cero

ii. Se supone que el perfil de velocidad en «1» es plano, de forma que $\alpha_1 = 1$

iii. Se supone que el perfil de velocidad en «2» viene dado por el perfil aproximado de la Fig. 7.5—4b, de forma que $v_e = \langle v \rangle (S/S_0)$, y

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{\langle v_2^3 \rangle}{\langle v_2 \rangle^3} = \frac{S_0[\langle v \rangle (S/S_0)]^3 + (S - S_0)(0)}{S} \frac{1}{\langle v \rangle^3} = \left(\frac{S}{S_0}\right)^2 \tag{7.5-32}$$

Con estas suposiciones, la **Ec.** 7.5-31 se transforma en

$$w = \rho \langle v \rangle S = S_0 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (S_0/S)^2}} \tag{7.5-33}$$

Esta expresión representa la variación fundamental de w con la densidad del fluido, la diferencia de presión (que se puede medir con un manómetro) y las dimensiones del tubo y del orificio. Para tener en cuenta los errores introducidos por las suposiciones (i), **(ii)** e (iii), se acostumbra, en la práctica, a multiplicar el segundo miembro de la **Ec.** 7.5-33 por un ***coeficiente de descarga*** C_d:

$$w = C_d S_0 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (S_0/S)^2}} \tag{7.5-34}$$

Los coeficientes de descarga experimentales se han correlacionado en función de un número de **Reynolds**[1] y (S_0/S). Para valores elevados del número de Reynolds, C_d tiende hacia **0,61.**

§ 7.6 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA PLANTEAR PROBLEMAS DE FLUJO NO ESTACIONARIO

En § 7.5 se ha visto la forma en que se pueden abordar los problemas de flujo **isotérmico** en estado estacionario, mediante los balances **macroscópicos.** En esta sección se considera, la utilización de los balances en estado no estacionario de las Ecs. 7.1-2, 7.2-2 y 7.3-1 para describir el comportamiento de los sistemas macroscópicos en **función** del tiempo. Aunque la literatura ingenieril está llena de ejemplos sobre las aplicaciones de los balances en estado no estacionario, no se ha dedicado, sin embargo, suficiente atención al análisis basado en dichos balances. Aquí se presentan dos problemas de estado no estacionario con el fin de explicar su planteamiento y resolución. En los problemas 7.L y 7.P se presentan más ilustraciones de balances macroscópicos no estacionarios.

Ejemplo 7.6-1. Tiempo de vertido para el flujo en un embudo

Un embudo cónico, cuyas dimensiones se indican en la Fig. 7.6 - 1, está inicialmente lleno de líquido y se vacía por gravedad. Determinar el tiempo de vertido.

Solución. De acuerdo con la geometría del sistema, es evidente que

$$\frac{r_0}{z_0} = \frac{r}{z} = \frac{\bar{r}}{\bar{z}} = \frac{r_2}{z_2} \tag{7.61}$$

[1] G. L. **TUVE** y R. E. **SPRENKLE,** *Instruments, 6, 201-206, 8,* **202-205,** *225, 232-234* (1935); J. H. **PERRY,** *Chemical Engineers Handbook,* **McGraw-Hill,** Nueva York **(1950),** p. 405.

También se, pueden expresar las correspondientes velocidades del fluido, mediante balances de materia, en función de la altura z de la superficie del liquido:

$$v(\bar{z}) = \text{velocidad en un plano cualquiera del líquido} = -\frac{z^2}{\bar{z}^2}\frac{dz}{dt} \qquad (7.6\text{-}2)$$

$$v_2 = \text{velocidad de vertido} = -\frac{z^2}{z_2^2}\frac{dz}{dt} \qquad (7.6-3)$$

a. Balance de energía mecánica. Se considera ahora como sistema el fluido que un instante cualquiera t está por encima del plano $z = z_2$. Al plantear el balance de energía mecánica se tienen en cuenta las siguientes especificaciones: (i) En este sistema no existe el plano «1» ; es decir, que no hay «corriente de entrada», y por lo tanto w_1 es cero. (ii) Se toma como plano «2» el de salida situado en $z = z_2$, donde la velocidad de flujo de masa es w_2. (iii) La superficie libre del líquido se considera como una superficie móvil que

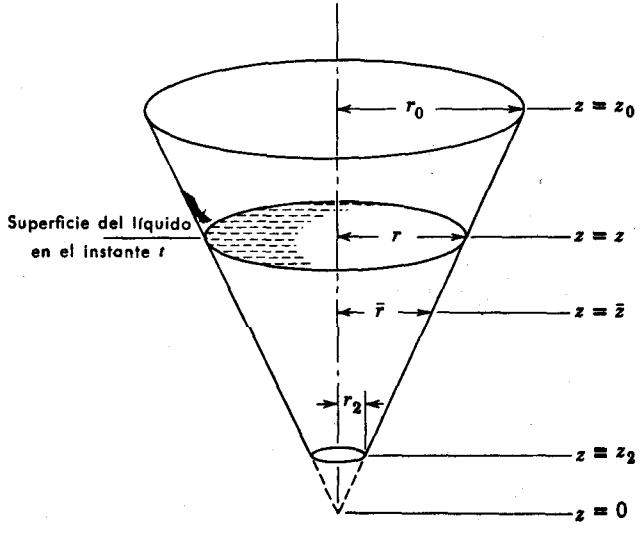


Fig. 7.6-1. Recipiente cónico desde el que vierte un liquido. El término r es el radio de la superficie del líquido situada a la altura z; $\bar{r}$ es el radio del cono para una altura arbitraria $\bar{z}$.

es capaz de intercambiar energía mecánica con los alrededores. Como la superficie libre y el chorro de salida están en contacto con la atmósfera, la presión p es la misma en z = z y z = z_2. Vamos a analizar el sistema utilizando la expresión para densidad constante de la Ec. 7.3-1a:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot}) = -\Delta[(\tfrac{1}{2}v^2 + gz)w] - \Delta(p\langle v\rangle S) - W - E_v \qquad (7.6\text{–}4)$$

La velocidad con la cual los alrededores comunican trabajo al sistema viene dada por la fuerza que 'actúa sobre la superficie libre multiplicada por la velocidad de descenso de dicha superficie; es decir, $-W = p(\pi r^2)(-dz/dt)$. El término $-\Delta(pv)S$ se transforma en $-pv_2S_2 = -p(\pi r_2^2)(z^2/z_2^2)(-dz/dt)$. Esta contribución se compensa exactamente con $-W$, según se puede ver, utilizando las Ecs. 7.6 -1 y 7.6-3. La disipación viscosa E_v es muy pequeña y puede considerarse en este caso igual a cero. También se desprecia el término de energía cinética del primer miembro.[1] Por consiguiente, la Ec. 7.6-4 se transforma en

$$\frac{d}{dt}\int_{z_2}^{z}(\rho g\bar{z})\pi\bar{r}^2\,d\bar{z} = -\tfrac{1}{2}v_2^2w_2 - gz_2w_2 \tag{7.6-5}$$

Dividiendo por $w_2 = \rho v_2\pi r_2^2$ y utilizando la Ec. 7.6-1 para substituir $\bar{r}^2$ por $\bar{z}^2(r_2^2/z_2^2)$, se llega a

$$\frac{g}{v_2z_2^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{z^4 - z_2^4}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}v_2^2 - gz_2 \tag{7.6-6}$$

Efectuando la diferenciación y utilizando luego la Ec. 7.6-3, se obtiene

$$-gz = -\tfrac{1}{2}v_2^2 - gz_2 \tag{7.6-7}$$

de donde

$$v_2 = \sqrt{2g(z - z_2)}\,, \tag{7.6-8}$$

Ésta es la ley *de Torricelli*, que expresa de forma aproximada la velocidad de vertido en función de la altura de la superficie del líquido.

b. Balance de materia. Aplicando el balance de materia en estado no estacionario de la Ec. 7.1-2, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{z_2}^{z}\rho\pi\bar{r}^2\,d\bar{z} = -\rho v_2\pi r_2^2 \tag{7.6-9}$$

Utilizando la Ec. 7.6-1 para substituir $\bar{r}^2$ por $\bar{z}^2(r_2^2/z_2^2)$ y la Ec. 7.6-8 para introducir la expresión de v_2, se llega a

$$\left(\frac{1}{z_2}\right)^2\frac{d}{dt}\frac{1}{3}(z^3 - z_2^3) = -\sqrt{2g(z - z_2)} \tag{7.6-10}$$

Si el orificio inferior es muy pequeño, para la mayor parte del periodo de vertido $z_2 \ll z$ y puede tomarse aproximadamente 2gz en vez de $2g(z - za)$. Según esto, la Ec. 7.6-10 (después de diferenciar con respecto al tiempo) se transforma en

$$z^{3/2}\frac{dz}{dt} = -z_2^2\sqrt{2g} \tag{7.6-11}$$

Integrando con la condición inicial de que z = za para $t = 0$, se obtiene

[1] En el problema 7.P se presenta un ejemplo en el que se incluye el término de energía cinética.

$$z_0^{5/2} - z^{5/2} = \tfrac{5}{2} z_2^2 \sqrt{2g}\, t \qquad \textbf{(7.642)}$$

El tiempo total de vertido se obtiene tomando z = $z_2 \approx 0$:

$$t_{\text{vert}} = \frac{1}{5}\left(\frac{z_0}{z_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \qquad (7.6\text{-}13)$$

A este resultado se ha llegado después de efectuar bastantes suposiciones. La omisión del termino de energía cinética del primer miembro es particularmente importante cuando el nivel del líquido es bajo. También se ha supuesto que no se forma vórtice durante el vaciado del embudo.

Ejemplo 7.6-2. Oscilaciones de un manómetro amortiguado

El fluido contenido en un tubo manométrico esta inicialmente en reposo y se pone bruscamente en movimiento por aplicación de una diferencia de presión $p_a - p_b$. Hallar la ecuación diferencial del movimiento del fluido manométrico para flujo isotérmico incompresible. Obtener una expresión del radio del tubo para el cual tiene lugar el «amortiguamiento crítico». Despreciar la densidad del gas situado por encima del líquido manométrico. La notación se indica en la Fig. 7.6-2.

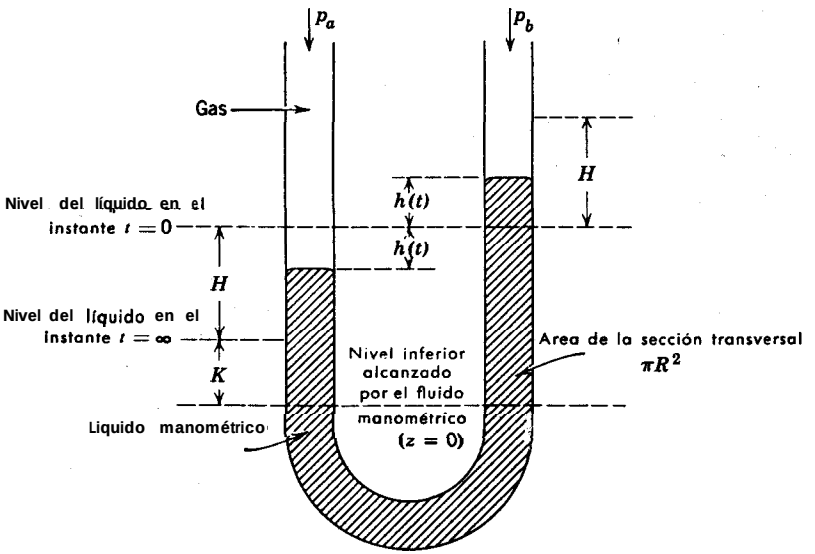


Fig. 7.6-2. Oscilación amortiguada de un fluido manométrico.

Solución. Se toma como sistema el fluido manométrico. En este sistema no existen los planos «1» y «2» de entrada y salida de fluido. Las superficies libres del líquido pueden intercambiar trabajo con los alrededores. Se aplica un balance de energía mecánica según

la forma de la Ec. 7.3 $-1a$. Puesto que w_1 y w_2 son cero, los únicos términos que quedan en el segundo miembro son $-W$ y $-E_v$.

Para evaluar el término de energía cinética y el término E_v se admite un perfil parabólico de la forma

$$v(r, t) = 2\langle v\rangle\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{7.6-14}$$

siendo $\langle v\rangle$ una función del tiempo que se toma como positiva para el flujo de izquierda a derecha. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K_{\text{tot}} &= \frac{d}{dt}\int_0^L\int_0^R \tfrac{1}{2}\rho v^2 \cdot 2\pi r\, dr\, dl \\ &= \pi\rho LR^2\frac{d}{dt}\int_0^1 v^2\frac{r}{R}d\frac{r}{R} \\ &= 4\pi\rho LR^2\int_0^1(1-\xi^2)^2\xi\, d\xi\,\frac{d}{dt}\langle v\rangle^2 \\ &= \tfrac{4}{3}\rho LS\langle v\rangle\frac{d}{dt}\langle v\rangle \end{aligned} \tag{7.6-15}$$

siendo l una coordenada que va a lo largo del eje del tubo manométrico, y L una longitud medida sobre este eje desde una a otra interfase del fluido manométrico (o sea, la «longitud» total)

La variación de energía potencial con el tiempo es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_{\text{tot}} &= \frac{d}{dt}\int_0^L\int_0^R \rho g z\, 2\pi\, r\, dr\, dl \\ &= \frac{d}{dt}\left[\left\{\begin{array}{l}\text{integral extendida a la parte,}\\ \text{que está por debajo de } z=0\\ \text{y que es constante}\end{array}\right\} + \rho gS\int_0^{K+H-h} z dz + \rho gS\int_0^{K+H+h} z\, dz\right] \\ &= 2\rho gSh\frac{dh}{dt}\end{aligned} \tag{7.6-16}$$

El trabajo neto producido por los alrededores sobre el sistema es

$$-W = (p_a - p_b)S\langle v\rangle \tag{7.617}$$

Finalmente, el término de perdidas por fricción es

$$\begin{aligned}E_v &= -\int_0^L\int_0^R(\boldsymbol{\tau}:\nabla v)2\pi r\, dr\, dl \\ &= 2\pi L\mu\int_0^R\left(\frac{dv_z}{dr}\right)^2 r\, dr\end{aligned}$$

$$= 8\pi L\mu\langle v\rangle^2 \int_0^1 (-2\xi)^2 \xi \, d\xi$$

$$= 8LS\mu\langle v\rangle^2/R^2 \qquad (7.6\text{–}18)$$

Substituyendo estos términos en el balance de energía **mecánica** (siendo $\langle v\rangle = dh/dt$)

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \left(\frac{6\mu}{R^2\rho}\right)\frac{dh}{dt} + 2\left(\frac{3}{4}\frac{g}{L}\right)h = \frac{3}{4}\left(\frac{p_a - p_b}{\rho L}\right) \qquad (7.619)$$

que ha de resolverse con la condición inicial de que para $t = 0$, $h = 0$ y $dh/dt = 0$.

La **Ec.** 7.6 – 19 es no homogénea, pero puede transformarse en homogénea introduciendo la nueva variable k, definida por

$$k = 2h - \frac{p_a - Pb}{\rho g} \qquad (7.620)$$

Por tanto, la ecuación del movimiento del fluido manométrico es

$$\frac{d^2k}{dt^2} + \left(\frac{6\mu}{R^2\rho}\right)\frac{dk}{dt} + \left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\right)k = 0 \qquad (7.6\text{-}21)$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden es la misma que describe el movimiento de una masa conectada a un muelle y un amortiguador, o el paso de corriente en un circuito *RLC*.

Una posible solución de la **Ec.** 7.6 -21 es $k = e^{mt}$. Substituyendo esta función en la ecuación, se obtienen los dos valores siguientes

$$m_\pm = \tfrac{1}{2}[-(6\mu/R^2\rho) \pm \sqrt{(6\mu/R^2\rho)^2 - (6g/L)}] \qquad (7.6\text{-}22)$$

y la solución adquiere una. de estas dos formas:

$$k = C_+e^{m_+t} + C_-e^{m_-t} \qquad m_+ \neq m_- \qquad (7.6\text{-}23)$$

$$k = C_1e^{mt} + C_2te^{mt} \qquad m_+ = m_- = m \qquad (7.6\text{–}24)$$

determinándose las constantes a partir de las condiciones iniciales. El tipo de movimiento que adquiere el fluido manométrico depende del valor del discriminante de la **Ec.** 7.6-22:

a. Si $(6\mu/R^2\rho)^2 > (6g/L)$, el sistema está «**superamortiguado**» y el fluido se mueve lentamente hacia su posición final.

b. Si $(6\mu/R^2\rho)^2 < (6g/L)$, el sistema esta «**infraamortiguado**» y oscila alrededor de la posición final con una amplitud cada vez menor.

c. Si $(6\mu/R^2\rho)^2 = (6g/L)$, el sistema está «críticamente amortiguado» y se mueve hacia la posición final en la forma monótona mas rápida.

Por consiguiente, el radio del tubo críticamente amortiguado es

$$R_{cr} = \left(\frac{6\mu^2 L}{g\rho^2}\right)^{1/4} \tag{7.6-25}$$

Si el radio R del tubo es mayor que R_{cr}, se produce un movimiento oscilatorio.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cómo están relacionados los balances macroscópicos con las ecuaciones de variación del Capítulo 3 ?

2. ¿Cómo se define $\langle \bar{v}^n \rangle$ para el flujo axial en un anillo cilíndrico?

3. Comprobar la consistencia dimensional de la Ec. 7.2-3 y explicar el significado de w, S, y g, para algún sistema concreto de flujo.

4. Comprobar la consistencia dimensional de la Ec. 7.3-2 y resumir los métodos de estimación de $\hat{E}_v$.

5. ¿Cómo se evaluarla la integral de la Ec. 7.3-2 para un gas de van der Waals?

6. Evaluar E_v y $\hat{E}_v$ para el flujo laminar en un tubo circular, utilizando la Ec. 7.4— 1; en este caso $-(\tau:\nabla v) = \mu(dv_z/dr)^2$.

7. ¿ Qué relación existe entre el *factor de fricción f y* el *factor de pérdidas por friccidn* e_v para el flujo incompresible en cenales rectos?

8. ¿Cómo se utiliza la Ec. 7.4-10 para calcular la potencia necesaria para obtener una velocidad de flujo determinada y para calcular la velocidad de flujo cuando se conoce la potencia?

9. ¿Cuál sería el error del resultado final del ejemplo 7.4-1 si la estimación de $\hat{E}_v$ estuviese multiplicada por 2? ¿En qué condiciones sería este error más importante?

10. ¿Cómo se afectarían los resultados del ejemplo 7.5-3 si p_2 valiese ll atm en vez de 1,1 atm?

ll. Explicar cómo funciona uu medidor de orificio. Citar algunas de sus ventajas e inconvenientes.

12. ¿Funcionaría correctamente el medidor de orificio de la Fig. 7.5—4 en una nave espacial?

13. Comparar la deducción de la ley de Torricelli del ejemplo 7.6— 1 con la que se efectúa en otros libros, la mayor parte de los cuales basan su deducción en un método de «estado cuasi estacionario». Explicar este término.

14. Completar el análisis del ejemplo 7.6-2 calculando la altura del fluido en función del tiempo. Calcular el radio de amortiguamiento crítico para un sistema real.

15. ¿Qué ocurriría si en la Fig. 7.4-1 la altura de 1,5 m fuese de 15, m?

16. ¿Puede aplicarse la Ec. 7.4-8 para el flujo no-newtoniano incompresible?

PROBLEMAS

7.A$_1$ Aumento de **presión en un ensanchamiento brusco**

Por el ensanchamiento brusco de la Fig. 7.5 —1 fluye una solución acuosa con una velocidad de 1,70 m^3/min. El diámetro interior de la tubería estrecha es de 13 cm y el de la ancha 23 cm. Calcular el aumento de presión en atm, si la densidad de la solución es 1,009 g cm^{-3}.

Respuesta: 0,01 atm.

7.B$_1$ **Flujo** de un gas compresible en **un tubo cilíndrico**

Por una tubería horizontal de 7,6 cm de diámetro interior circula un caudal de 0,127 kg seg^{-1} de nitrógeno gaseoso con flujo turbulento isotérmico a 25" C. Las presiones a la entrada y salida

del tubo son 2 y 1 atm, respectivamente. A partir de los balances macroscópicos de materia y energía mecánica, evaluar las «pérdidas por fricción» $\hat{E}_v$, en kcal kg_m^{-1}, suponiendo que el gas se comporta como ideal.

Respuesta: 14,6 kcal kg_m^{-1}

7.C$_1$ Flujo **incompresible en un anillo**

Por una conducción de 6 m de longitud, formada por dos tubos concéntricos, se hace circular un caudal de agua de 55 m^3 hr^{-1} a 15° C. Los **diámetros** interno y externo del tubo son 7,5 cm y 17.5 cm, respectivamente. La entrada está 1,5 m más baja que la salida. **Utilizar** el radio hidráulico medio para resolver el problema. **Supóngase** que la entrada y la salida están a la misma presión. Se **desea** calcular la potencia de la bomba.

Respuesta: 0,32 hp.

7.D$_1$ Fuerza que actúa sobre una curvatura en U de una **tubería**

Por una curvatura en forma de U de una tubería circulan 85 l /seg de agua a 20° C (p = 0,999 g cm-3 y μ = 1,0 cp). (**Véase** Fig. 7.D.) ¿**Cuál** es la **fuerza** ***neta*** que actúa sobre la tubería en U?

Respuesta: 410 kg_f

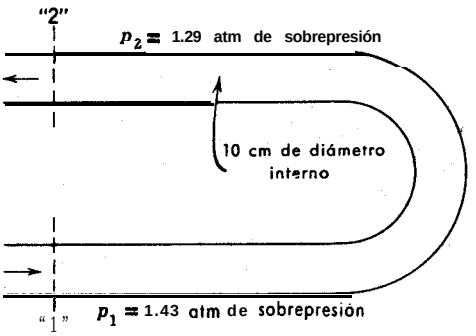


Fig. 7.D. Flujo en una curvatura en U; las dos ramas están a la misma altura.

7.E$_1$ Desintegración de **astillas** de madera

En la manufactura de pasta de papel, las fibras de celulosa de las astillas de la madera se separan de la lignina mediante calentamiento a presión con soluciones alcalinas en grandes tanques **cilíndricos** llamados digestores. Al final del período de «cocción» se abre una **pequeña** portezuela situada en el fondo del digestor y las astillas de madera chocan contra una placa para completar la desintegración y separación de las fibras. Estimar la velocidad de la corriente de descarga y la fuerza que ejerce sobre la lámina en las condiciones que se indican en la Fig. 7.E. para el momento en que se inicia la descarga. Puede despreciarse la fricción contra la pared del digestor y la **pequeña** cantidad de movimiento del fluido en el interior del tanque.

Respuesta: 1275 kg, seg^{-1}; 4950 kg_f

7.F$_1$ Calculo de la velocidad de flujo

Calcular la velocidad de flujo, para agua a 20° C, en el sistema que se indica en la Fig. 7.F. El nivel del liquido en el deposito superior se mantiene constante.

Respuesta: 7,3 m^3 min^{-1}.

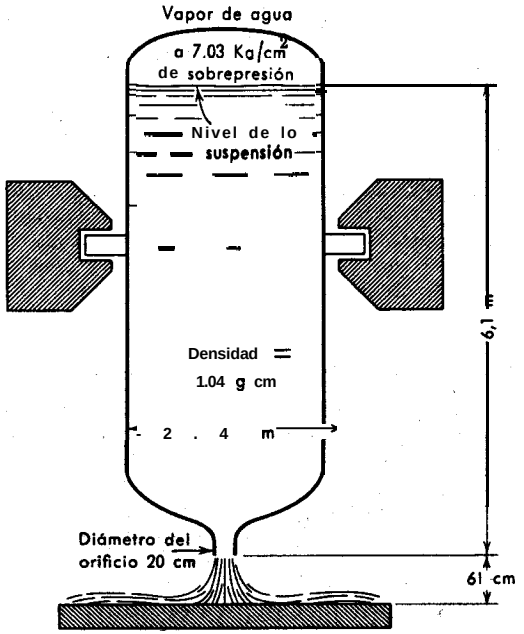


Fig. 7.E. Digestor de pulpa.

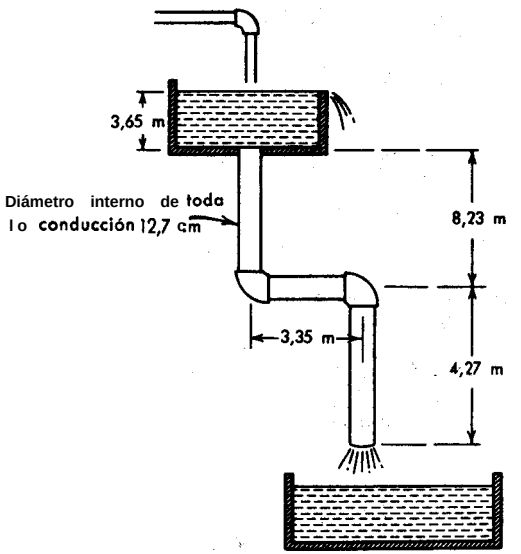


Fig. 7.F. Flujo en un tanque de carga constante.

7.G$_1$ Evaluación de distintas **velocidades medias a partir de medidas con un tubo de Pitot**

Los siguientes datos experimentales[1] se han determinado mediante un tubo de Pitot, para diversas posiciones a lo largo del diámetro de una tubería de 7,77 cm de radio, por la que circula agua.

Posición	Distancia desde el centro del tubo (cm)	Velocidad local (cm seg^{-1})
1	7,11	239,3
2	5.51	316.7
3	3.63	344,7
4	1,83	355,4
5	0,00	359.4
6	1,83	356,6
7	3,63	349,6
8	5,51	338,3
9	7,11	282,2

Representar gráficamente estos datos y utilizar la fórmula de Simpson para calcular $\langle\bar{v}\rangle/\bar{v}_{máx}$ $\langle\bar{v}^2\rangle/\bar{v}^2_{máx}$, y $\langle\bar{v}^3\rangle/\bar{v}_{máx}$.

7.H$_2$ Velocidades medias para flujo turbulento

En §§ 7.2 y 7.3 se ha indicado que para el flujo turbulento se acostumbra substituir (*a*) $\langle\bar{v}^2\rangle/\langle\bar{v}\rangle$ por $\langle\bar{v}\rangle$ y (*b*) $\langle\bar{v}^3\rangle/\langle\bar{v}\rangle$ por $\langle\bar{v}\rangle^2$. ¿Qué tanto por ciento de error se comete al utilizar esta aproximación para el flujo en un tubo? Utilícese la ley de la potencia $\frac{1}{7}$ (véase § 5.1) para estimar el error. *Respuestas: a.* 2 por ciento; *b.* 6 por ciento.

7.I$_2$ Descarga múltiple en una conducción común[2]

Ampliar el ejemplo 7.5-1 de forma que el fluido (incompresible) que circula por varios tubos descargue en otro de mayor diámetro, dando lugar a un considerable aumento de la sección, tal como se indica en la Fig. 7.1.

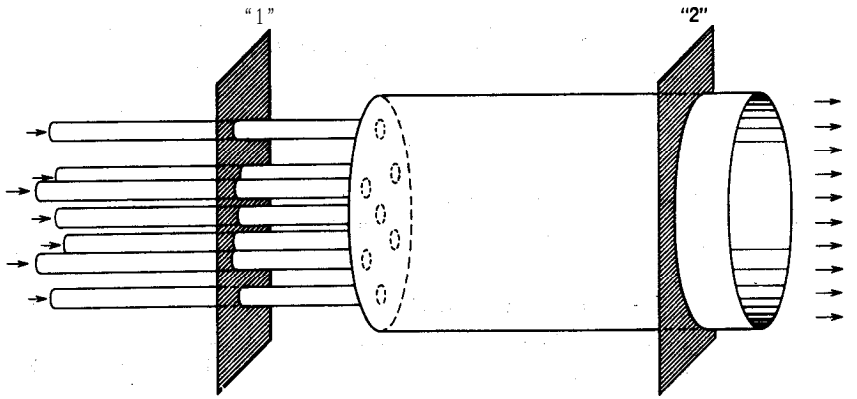


Fig. 7.1. Descarga múltiple es una conducción común; el área total disponible para el flujo en «1» es S_1 y S_2 en «2».

1 B. BIRD, *tesis doctoral* en Ingeniería química, Universidad de Wisconsin (1915).
2 W. M. KAYS, *Trans. ASME, 72,* 1067 (1950).

Estos sistemas son importantes en relación con ciertos tipos de cambiadores de calor, donde las pérdidas por ensanchamientos y contracciones representan una fracción considerable de la pérdida total de presión. Tanto en los tubos pequeños como en el grande el flujo puede ser laminar o turbulento.

a. Demostrar que los balances macroscópicos conducen a las siguientes expresiones para el aumento de presión y las pérdidas por fricción:

$$p_2 - p_1 = \rho\langle v_1\rangle^2(\beta K_1^{(2)} - \beta^2 K_2^{(2)}) \tag{7.I-1}$$

$$\hat{E}_v = \tfrac{1}{2}K_1^{(3)}\langle v_1\rangle^2\left[1 - 2\beta\frac{K_1^{(2)}}{K_1^{(3)}} + \beta^2\left(2\frac{K_2^{(2)}}{K_1^{(3)}} - \frac{K_2^{(3)}}{K_1^{(3)}}\right)\right] \tag{7.1-2}$$

en las que se han introducido las relaciones adimensionales:

$$K_i^{(j)} = \frac{\langle v_i^j\rangle}{\langle v_i\rangle^j}; \qquad \beta = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\langle v_2\rangle}{\langle v_1\rangle} \tag{7.I-3,4}$$

b. Demostrar que para el flujo laminar en tubos circulares resulta: $K_1^{(2)} = \frac{4}{3}$, y $K_1^{(3)} = 2$.
c. Discutir el comportamiento de las pérdidas por fricción cuando $\beta = 0$ y cuando $\beta \approx 1$.
d. Discutir las distintas posibilidades con respecto al flujo laminar y turbulento.

7.J$_2$ Evaluación de velocidades medias para el Rujo laminar de fluidos no newtonianos en tubos circulares

a. Evaluar las relaciones (definidas en el problema 7.1).

$$K^{(2)} = \frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle^2}; \qquad K^{(3)} = \frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle^3} \tag{7.J-1,2}$$

para el flujo laminar en tubos circulares largos de un fluido que sigue la ley de la potencia (Ec. 1.2-3). Obsérvese que las relaciones $K^{(j)}$ permiten expresar de tal forma los balances macroscópicos de materia, que las relaciones de velocidades medias vienen dadas por la cantidad de movimiento o la energía cinética de la corriente, multiplicadas por un factor de corrección:

$$\frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle} = \langle v\rangle \cdot K^{(2)}; \qquad \frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} = \frac{1}{2}\langle v\rangle^2 \cdot K^{(3)} \tag{7.J-3,4}$$

6. Repetir la deducción para un fluido de Bingham

Respuesta: a. $K^{(2)} = (3n + 1)/(2n + 1)$
$K^{(3)} = 3(3n + 1)^2/(2n + 1)(5n + 3)$

7.K$_2$ Pérdidas por fricción en el flujo no-newtoniano

Un fluido que sigue la ley de la potencia (Ostwald-de Waele) definida en la Ec. 1.2-3, circula con flujo laminar por una tubería circular de radio R y longitud L. Los perfiles de velocidad se han hallado en el problema 2.H.

a. Demostrar que los perfiles de velocidad pueden expresarse en esta otra forma:

$$\frac{v_z}{\langle v_z\rangle} = \left(\frac{3n+1}{n+1}\right)\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) \tag{7.K-1}$$

b. Evaluar las perdidas por fricción E_v mediante la Ec. 7.4-1, utilizando la Tabla 3.4-8 para expresar el integrandó en forma conveniente. Demostrar que

$$E_v = \frac{2\pi m L \langle v \rangle^{n+1}}{R^{n-1}} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{7.K-2}$$

c. Demostrar que se puede utilizar la Ec. 7.4-8 para obtener el mismo resultado. El factor de fricción para este sistema se ha calculado en el problema 6.K.

7.L$_2$ Variaciones del inventario de un depósito de gas

Un depósito de gas natural se abastece a través de una conducción con una velocidad estacionaria w_1 kg hr^{-1}. En un período de 24 horas, la demanda de combustible desde el depósito, w_2, varía aproximadamente en la forma siguiente:

$$w_2 = A + B \cos \omega t \tag{7.G1}$$

siendo ωt un tiempo adimensional medido a partir de la hora de máxima demanda (6 de la magana aproximadamente).

a. Determinar los valores máximo, mínimo y medio de w_2, para un período de 24 horas, en función de *A y B.*

b. Determinar el valor necesario de w_1 en función de *A y B.*

c. Tomar m $= m_0$ para $t = 0$, e integrar el balance no estacionario de materia con esta condición límite a fin de obtener m *en* funcion del tiempo.

d. Determinar la capacidad mínima que ha de tener el deposito para satisfacer la demanda sin interrupción, si $A = 2268$ kg, hr^{-1}, $B = 907$ kg_m hr^{-1}, y $p = 0{,}705$ $kg_m m^{-3}$. ¿A qué hora del día debe estar lleno el depósito para permitir esta operación?

e. Determinar la capacidad minima del deposito que se necesita para disponer en todo momento de una reserva para tres días como mínimo.

Respuesta: d. 9,82 x 10^3 m^3.
e. 2,41 x 10^5 m^3.

7.M$_3$ Tiempo necesario para vaciar un tanque mediante una tubería de descarga

a. El tanque y la tubería de la Fig. 7.M están inicialmente llenos de un líquido de densidad p y viscosidad μ. Hallar una expresión del tiempo necesario para vaciar el tanque (pero no la tubería), utilizando un método de estado cuasi estacionario. Emplear un balance de materia en estado no estacionario *juntamente* con un balance de energía mecánica en estado'estacionario. Despréciense las perdidas de la entrada y supóngase que el flujo en el tubo es en todo momento laminar. Despréciese también la energía cinética de la corriente que sale.

b. Rehacer el problema para el caso de que el flujo en la tubería sea turbulento.

Respuesta.- a. $t_{vac} = \dfrac{8\mu L R^3}{\rho g R_0^4} \ln\left(1 + \dfrac{H}{L}\right)$

7.N$_3$ Correcciones de entrada en viscosímetros de tubo[3]

En el análisis de los datos viscosimétricos de flujo en un tubo para determinar la viscosidad. secomparaladiferencia de presión frente a los datos experimentales de la velocidad de flujo con la correspondiente expresión teórica de la diferencia de presión en función de la velocidad de flujo.

[3] A. G. FREDRICKSON [*tesis doctoral,* Universidad de Wisconsin (1959)) desarrolló y aplicó este método para estudios viscosimétricos de fluidos, no-newtonianos.

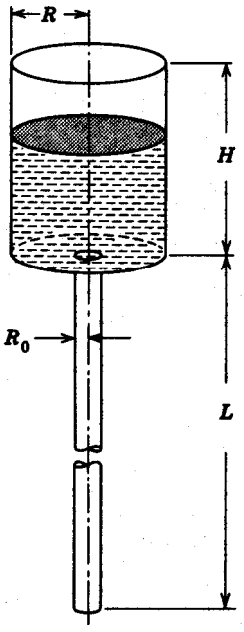


Fig. 7.M. Tanque provisto de una larga **tubería** de desagüe; la superficie del **líquido** y la salida de la tubería **están** a la presión **atmosférica.**

En la expresión teórica se supone que el flujo **está** totalmente desarrollado en la región comprendida entre los dos planos en los que se mide la presión. En un aparato como el que se indica en la Fig. 7.N se conoce la presión a la salida del tubo **(«2»)** y en la superficie del líquido en el tanque **(«1»).** Sin embargo, los perfiles de velocidad no están totalmente desarrollados en la región de entrada del tubo. Por lo tanto, no se puede aplicar la expresión **teórica** que relaciona la diferencia de presión con la velocidad volumétrica de flujo (ley de **Hagen-Poiseuille).** Sin embargo, la ley de **Hagen-Poiseuille** puede utilizarse siempre que las medidas de flujo se realicen en dos tubos de diferente longitud, L_A y L_B; la longitud del tubo **más** corto ha de ser suficientemente larga para que los perfiles de velocidad **estén** totalmente desarrollados a la salida, en cuyo caso, la parte final del tubo largo, de longitud $L_B - L_A$, ser6 una región de flujo totalmente desarrollado. **(Véase** Fig. 7.N.) Si se conoce el valor de $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1$ para esta región, se 'puede aplicar la ley de **Hagen-Poiseuille** de la **Ec.** 2.3-19.

Demostrar que combinando adecuadamente los balances de energía **mecánica** expresados para los sistemas **«1-2», «3-4»** y **«0-4«,** se obtiene la siguiente expresión para $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1$ cuando la velo*cidad de flujo es la misma* en ambos viscosimetros:

$$\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1}{L_B - L_A} = \frac{p_B - p_A}{L_B - L_A} + \rho g\left(1 + \frac{l_B - l_A}{L_B - L_A}\right) \qquad (7.N\text{-}1)$$

siendo $\mathcal{P}_0 = p_0 + \rho g z_0$. El **término** $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1$ representa la diferencia efectiva de **presión** que se aplica a la longitud $L_B - L_A$. Explicar con detalle como se utilizaría la **Ec. 7.N−1** para analizar las medidas experimentales. **¿Será válida** la Fc. **7.N−1** para tubos de **sección** no circular?

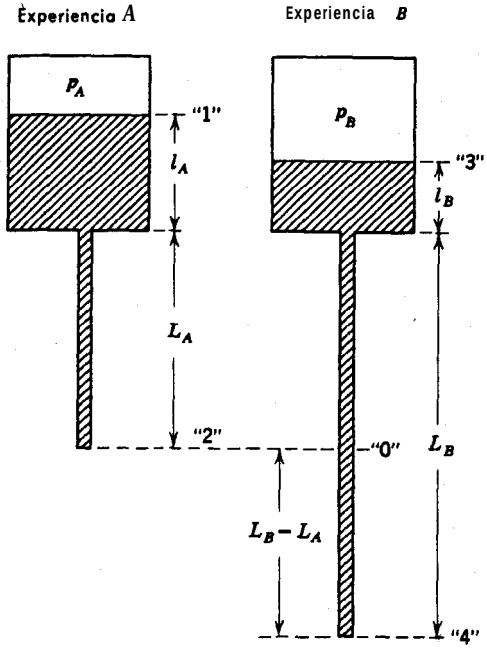


Fig. 7.N. Experiencias en dos tubos **viscosimétricos** *con* la ***misma velocidad de flujo y la misma presión a*** la ***salida.*** Las presiones P_A y P_B se mantienen constantes mediante un gas inerte.

7.0, Relación entre las pérdidas por fricción y la fuerza que actúa sobre superficies anulares

Comprobar la Ec. 7.4-8 para el flujo laminar de un fluido newtoniano incompresible en un largo conducto de sección anular, utilizando los perfiles de velocidad que se indican en § 2.4. La longitud del anillo es L y los radios interior y exterior son κR y R, respectivamente.

7.P_4 Efectos de aceleración para el flujo no estacionario en el vaciado de un tanque

Un cilindro abierto, de altura H y radio R, está inicialmente lleno de líquido. En el instante $t = 0$ comienza a salir el líquido a través de una pequeña boquilla convergente de radio R_0 situada en el fondo del tanque. (Véase Fig. 7.P.)

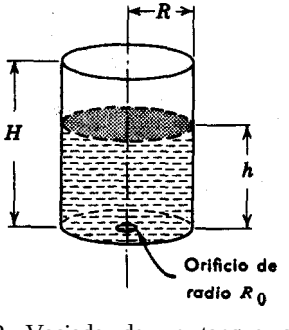


Fig. 7.P. Vaciado de un tanque cilíndrico.

a. Hallar el tiempo de vaciado, suponiendo primeramente que la ley de Torricelli describe la relación entre la velocidad de salida y la altura instantánea del liquido.

b. Hallar el tiempo de vaciado utilizando el balance no estacionario de materia y el balance no estacionario de energía mecánica. Expresar el resultado como producto del tiempo de vaciado obtenido en (*a*) por una función de N, siendo $N = (R/R_0)^4$.

c. ¿Es importante el factor de corrección hallado en (*b*)?

Respuesta: *b.* $t_{vac} = 2(R/R_0)^2\sqrt{H/2g} \cdot \phi(N)$

siendo $\phi(N) = (\tfrac{1}{4})\sqrt{(N-2)/N}\int_0^1 (\eta - \eta^N)^{-1/2}d\eta$

7.4, Distribuciones de flujo en una derivación múltiple

Un fluido circula por una tubería que está cerrada en uno de sus extremos, distribuyéndose entre n tubos, tal como se indica en la Fig. 7.4. Todas las tubuladuras son del mismo diámetro, que es distinto del de la tubería principal. Obtener una ecuación de diferencia para la velocidad en cualquier segmento de la tubería principal. Esta ecuación de diferencia se ha resuelto mediante una maquina calculadora de elevada velocidad.1

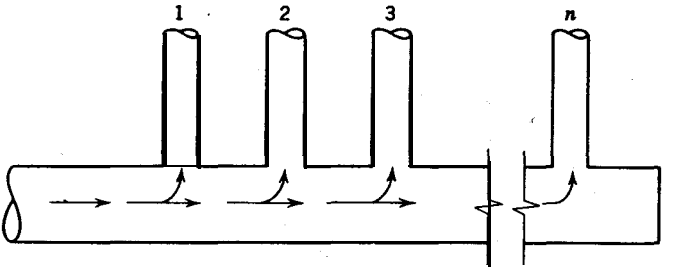


Fig. 7.Q. Flujo en una derivación múltiple.

7.R$_4$ Deducción del balance de energía mecánica para el flujo no estacionario incompresible

Se desea ampliar el Ejemplo 7.3 — 1 para incluir el flujo no estacionario en un sistema que contiene partes móviles. Si existen superficies móviles en el sistema, aunque el volumen total del mismo puede permanecer constante, la forma varía y por consiguiente no se puede sacar $\partial/\partial t$ fuera del signo integral en la Fc. 7.3-6. Se puede utilizar la versión tridimensional de la fórmula de Leibnitz para la diferenciación de una integral[2,3], según se indica en § A.5.

Al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, la superficie deberá de separarse en S_{wf} (la superficie mojada fija), S_{wm} (la superficie mojada móvil), y las superficies matemáticas S_1 y S_2. La integración del termino (*d*) de la Fc. 7.3-6 dad un término

$$\int_{S_{wm}} [\tau \cdot v]_n \, dS = W_s \qquad (7.R\text{-}1)$$

---

1 A. Acrivos, B. D. Babcock y R. L. Pigford, *Chem. Eng. Sci.*, 10, 112-124 (1959).

2 R. B. Bird, *Chem. Eng. Sci.*, *6*, 123-131 (1957).

3 L. M. Grossman, Am. *J. Phys.*, 25, 257-261 (1957).

que es el trabajo producido por las fuerzas viscosas al actuar sobre las superficies móviles. El término (c) dará también lugar a un término adicional:

$$\int_{S_{sm}} pv_n \, dS = W_p \tag{7.R-2}$$

La suma de estos dos términos da el trabajo producido por el fluido sobre los alrededores, que es transmitido mediante ingenios mecánicos. El resultado viene dado por la Ec. 7.3-1*a*.

SECUNDA PARTE

Transporte de energía

CAPÍTULO 8

CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA Y MECANISMO DEL TRANSPORTE DE ENERGÍA

La conductividad calorífica k es una propiedad que interviene en la mayor parte de los problemas de transmisión de calor. Su importancia en el transporte de energía es análoga a la de la viscosidad en el transporte de cantidad de movimiento. Se comienza en §8.1 por establecer la ley de Fourier de la conducción de calor, que sirve para definir la conductividad calorífica de un gas, líquido o sólido. En §8.2 se hace un resumen de la variación de la conductividad calorífica de los fluidos con la temperatura y la presión, mediante correlaciones basadas en el principio de los estados correspondientes.

Las conductividades caloríficas de gases y líquidos se estudian desde un punto de vista molecular en §§ 8.3 y 8.4. Finalmente, en § 8.5 se estudia su relación con la conductividad eléctrica mediante la célebre ley de Wiedemann, Franz y Lorenz para los metales.

El numero de datos de conductividad calorífica existentes en la bibliografía está aumentando rápidamente. Se utilizarán datos experimentales siempre que se disponga de ellos; en su defecto? pueden resultar útiles los métodos de estimación que se indican aquí.

En este capítulo trataremos el transporte de energía solamente por el mecanismo de conducción, dejando para más adelante el que tiene lugar por *convección, radiación y difusión.*

§ 8.1 LEY DE FOURIER DE LA CONDUCCIÓN DEL CALOR

Consideremos una placa de un material sólido de superficie A, comprendida entre dos grandes láminas planas y paralelas separadas por una distancia Y. Supongamos que incialmente (para $t < 0$) el material solido esta en su totalidad a la temperatura T_0. En el instante $t = 0$ la lámina inferior se pone bruscamente a una temperatura T_1, ligeramente superior, que se mantiene constante. A medida que transcurre el tiempo varía el perfil de temperatura en la placa y finalmente, se al-

canza una distribución lineal de temperatura en estado estacionario. (Véase Fig. 8.1—1.) Una vez alcanzadas las condiciones del estado estacionario, tiene que existir una velocidad constante de flujo de calor Q a través de la placa para que se man-

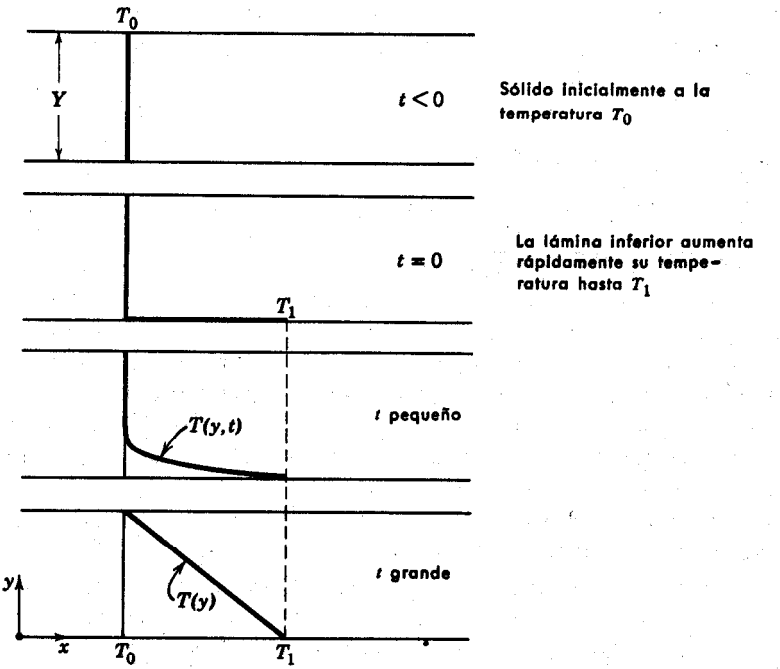


Fig. 8.1-1. Formación del perfil de temperatura en estado estacionario en una placa sólida situada entre dos láminas; véase un caso análogo para transporte de cantidad de movimiento en la Fig. 1.1-1.

tenga la diferencia de temperaturas $A\ T = T_1 - T_0$. Se ha encontrado que para valores de $A\ T$ suficientemente pequeños se cumple. la siguiente relación:

$$\frac{Q}{A} = k\frac{\Delta T}{Y} \tag{8.1-1}$$

Es decir, que el flujo de calor por unidad de Brea es directamente proporcional a la disminución de la temperatura con la distancia Y; la constante de proporcionalidad k es la *conductividad calorífica* de la placa.

La Ec. 8.1—1 se cumple también para líquidos y gases situados entre las láminas, siempre que se tomen las precauciones necesarias para evitar la convección y radiación. Esta ecuación, por lo tanto, describe los procesos de conducción que tienen lugar en sólidos, líquidos y gases. Los mecanismos de convección y radiación se tratan en capítulos posteriores.

BIBLIOTECA
C.U.C E.I

En los tratamientos analíticos que siguen resulta más conveniente Óperar con la Ec. 8.1—1 expresada en forma diferencial; o sea, que se utiliza la forma límite de esta ecuación correspondiente al caso en que el espesor de la lámina Y tiende hacia cero. El flujo local de calor por unidad de área (densidad de flujo de calor) que tiene lugar en la dirección y positiva se designa por q_y. De acuerdo con esta notación, la Ec. 8.1— 1 toma la forma:[1]

$$q_y = -k\frac{dT}{dy} \qquad (8.1\text{–}2)$$

Esta ecuación es la forma unidimensional de la ***ley de Fourier de la conducción del calor,*** que es válida cuando T = T(y). Establece que la densidad de flujo de calor por conducción es proporcional al gradiente de temperatura, o dicho de una forma más gráfica, «el calor se desliza cuesta abajo en la representación gráfica de la temperatura frente a la distancia».

En un medio isótropo2 en el que la temperatura varía en las tres direcciones del espacio, puede escribirse una ecuación análoga a la 8.1—2 para cada una de lastres direcciones coordenadas

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (8.1\text{–}3,4,5)$$

Estas tres relaciones corresponden a los componentes de la ecuación vectorial

$$q = -k\nabla T \qquad (8.1\text{-}6)$$

que es la forma tridimensional de la ley de Fourier. Establece que el ***vector*** densidad de flujo de calor q es proporcional al gradientes de temperatura VT, y de sentido contrario. Por lo tanto, en un medio isotropo el calor fluye por conducción en la dirección en que el descenso de temperatura es más pronunciado. Para un fluido en movimiento q representa la densidad de flujo de energía calorífica relativa a la velocidad local del fluido.

El lector se habrá dado cuenta ya de que existe una sorprendente semejanza entre la Ec. 8.1-2 para la densidad de flujo unidimensional de energía, y la

1 En los capítulos que siguen se utilizarán tres tipos de magnitudes caloríficas: ***el flujo*** de calor Q (Kcal-hr^{-1}), ***la densidad de flujo de*** calor q (Kcal hr^{-1} m^{-2}), ***y la intensidad de manantial calorífico*** S (Kcal hr^{-1} m^{-3}).

2 En un medio isotropo el coeficiente k de las Ecs. 8.1-3, 4 y 5 tiene el mismo valor en las tres direcciones. La suposición de isotropia es satisfactoria para los fluidos y la mayor parte'de los solidos homogéneos. Los principales materiales anisotropos son cristales únicos no pertenecientes al sistema regular y solidos fibrosos o laminares. (Véase madera en la Tabla 8.1-4.)

3 El vector ∇T se lee «gradiente de T» o «del T» y en algunos libros se escribe grad T. Para un tratamiento del gradiente de un campo escalar, véase G. B. THOMAS, ***Analytic*** Geometry ***and Calculus,*** Addison-Wesley (1953). segunda edición pp. 497-500. Para la expresión de los componentes de la Ec. 8.1-6 en coordenadas curvilíneas, véase Tabla 10.2-1.

Ec. 1.1-2 correspondiente a la densidad de flujo unidimensional de cantidad de movimiento. En ambos casos la densidad de flujo es proporcional al gradiente negativo de una variable macroscópica. y los coeficientes de proporcionalidad son propiedades físicas que dependen de la substancia y de los valores locales de la presión y la temperatura. Sin embargo, se advierte, que para los casos más complejos, en los que la temperatura y la velocidad varían en las tres direcciones del espacio, las Ecs. 8.1-3, 4 y 5, para la densidad de flujo de energía, son más sencillas que las correspondientes Ecs. 3.2— Il a 16 para la densidad de flujo de cantidad de movimiento. Esta diferencia se debe a que la energía es un número escalar mientras que la cantidad de movimiento es un vector. Por esta razón la densidad de flujo de energía es un vector con tres componentes, y en cambio, la densidad de flujo de cantidad de movimiento es un tensor con nueve componentes. Por consiguiente, ya se puede anticipar que los problemas de transporte de cantidad de movimiento y los de transporte de energía no serán análogos desde el punto de vista matemático, a excepción de algunos casos geométricamente sencillos.

Además de la conductividad calorífica definida por la Ec. 8.1—2, se utiliza frecuentemente en los tratados de calor la *difusividad térmica, a,* que se define mediante la siguiente expresión[4]

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \tag{8.1–7}$$

Se utilizan distintos sistemas para expresar las unidades de las magnitudes que hemos definido en este capítulo. Para el caso frecuente del sistema cgs, tenemos

$$\begin{aligned} q_y[=] &\text{ cal cm-* seg}^{-1} \\ T[=] &\text{ °K} \\ y[=] &\text{ cm} \end{aligned} \tag{8.1-8}$$

y por tanto, de la Ec. 8.1-2 se deduce

$$\begin{aligned} k[=] &\text{ cal cm-r seg}^{-1}\text{ (°K)}^{-1} \\ a[=] &\text{ cm* seg}^{-1} \end{aligned}$$

A veces los datos experimentales están dados en otras unidades, relacionadas de forma sencilla con las anteriores, tales como Kcal m-r hr^{-1} $(°\text{K})^{-1}$.

La serie análoga de unidades en el sistema ingles es

$$\begin{aligned} q_y[=] &\text{ Btu ft}^{-2}\text{ hr}^{-1} \\ T[=] &\text{ °R} \\ y[=] &\text{ ft} \end{aligned} \tag{8.1-9}$$

[4] $\hat{C}_p$ es el calor específico por *unidad de masa* a presión constante; $\bar{C}_p$ es la misma magnitud *por mol.*

Ejemplo 8.1— 1. Medida de la conductividad calorífica

Un panel de material plástico de área $A = 0{,}1\ m^2$ y espesor Y = 0,650 cm conduce el calor en estado estacionario con una velocidad de 3,0 watios, siendo las temperaturas de las superficies externas T_0 = 24.00" C y $T_1 = 26{,}00°\ C$. ¿Cuál es el valor de la conductividad calorífica, expresada en cal seg^{-1} cm-1 $(°K)^{-1}$, a 25" C?

Solución. Los valores que se precisan' para aplicar la Ec. 8. 1 — 1, son

A = 1000 cm*

Y = 0,650 cm

Q = 3,0 wat = 3,0 julios seg^{-1} = 3,0 x 0,23901 cal julio-* = 0,717 cal seg^{-1}

$A\,T = 26{,}00 - 24{,}00 = 2{,}00°$ K

TABLA 8.1-2

VALORES EXPERIMENTALES DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE ALGUNOS LÍQUIDOS A LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA[a]

Substancia	Temperatura T(° C)	Conductividad calorífica k (cal seg^{-1} cm^{-1} $(°K)^{-1}$)
Benceno	22,5	0,000378
	60	0,000363
Tetracloruro de carbono	20	0,000247
Éter	30	0.000328
Alcohol etílico	20	0,000400
Glicerina	20	0,000703
Agua	20	0,00143
	60	0,00156
	100	0,00160

[a] Datos tomados de *Handbook of Chemistry and Physics*, 39ª edición, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio (1957), pp. 2257-2259. Los datos corregidos para el agua se deben a la amabilidad de los editores,

de donde

$$k[=] \text{ Btu ft}^{-1}\text{ hr}^{-1}(^\circ\text{R})^{-1}$$
$$\alpha[=] \text{ ft}^2\text{hr}^{-1}$$

Con el fin de tener en cuenta la interconversibn de la energía calorífica y mecánica, la ley de Fourier se expresa a veces de esta forma

$$q_y = -J_c k \frac{dT}{dy} \tag{8.1-10}$$

en la que

$q_y[=]$ erg cm-2 seg^{-1}	o	ft-lb, $\text{ft}^{-2}\text{ hr}^{-1}$	
$k[=]$ cal $\text{cm}^{-1}\text{ seg}^{-1}$ ($^\circ$K1)	o	Btu $\text{ft}^{-1}\text{ hr}^{-1}$ ($^\circ$R)$^{-1}$	
$T[=]$ °K	o	°R	(8.1-11)
$y[=]$ cm	o	ft	
$J_c[=]$ erg cal-1	o	ft-lb, Btu $^{-1}$	

Se observará que q_y/J_c, en la Ec. 8.1-10, es lo mismo que q_y en la Ec. 8.1-2, de modo que las dos formas de la ley de Fourier son totalmente equivalentes. Aquí se utilizará la más sencilla de la Ec. 8.1-2. Puesto que se utilizan con frecuencia ambos sistemas de unidades térmicas y mecánicas, el ingeniero deberá habituarse a realizar frecuentes comprobaciones de la consistencia dimensional. El Apéndice C resultará de utilidad para la conversión de las unidades que se deseen.

En las tablas 8.1— 1, 8.1-2, 8.1-3 y 8.1-4 se indican valores experimentales de la conductividad calorífica de gases, líquidos y sólidos. En las secciones que siguen se hace un estudio de la predicción de conductividades caloríficas.

TABLA 8.1-1

VALORES EXPERIMENTALES DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE ALGUNOS GASES COMUNES A LA PRESIÓN DE 1 ATM.[a]

$k \times 10^7$ cal $\text{cm}^{-1}\text{ seg}^{-1}$ (°K)$^{-1}$

Gas	100" K	200" K	3 0 0 " K
H_2	1625	3064	‘4227
O_2	216	438	635
CO_2	—	227	398
CH_4	254	522	819
N O	—	425	619

[a] **Tomados de J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Tabla 8.4-10, Wiley Nueva York (1954).**

Ejemplo 8.1-1. Medida de la conductividad calorífica

Un panel de material plástico de área A = 0,1 m^2 y espesor Y = 0,650 cm conduce el calor en estado estacionario con una velocidad de 3.0 watios, siendo las temperaturas de las superficies externas T_0 = 24,00° C y T_1 = 26.00" C. ¿Cuál es el valor de la conductividad calorífica, expresada en cal seg^{-1} cm-t $(°K)^{-1}$, a 25" C?

Solución. Los valores que se precisan, para aplicar la Ec. 8.1 — 1, son

$A = 1000$ cm^2

Y = 0,650 cm

Q = 3,0 wat = 3,0 julios seg-t = 3,0 x 0,23901 cal julio-t = 0,717 cal seg^{-1}

$\Delta T = 26,00 - 24,00 = 2,00°$ K

TABLA 8.1-2

VALORES EXPERIMENTALES DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE ALGUNOS LÍQUIDOS A LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA"

Substancia	Temperatura' T(° C)	Conductividad calorífica k (cal seg^{-1} cm-t $(° K)^{-1}$)
Benceno	22,5	0,000378
	60	0,000363
Tetracloruro de carbono	20	0,000247
Éter	30	0,000328
Alcohol etílico	20	0,000400
Glicerina	20	0,000703
Agua	20	0,00143
	60	0,00156
	100	0,00160

[a] Datos tomados de *Handbook of Chemistry and Physics,* 39ª edición, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio (1957), pp. 2257-2259. Los datos corregidos para el agua se deben a la amabilidad de los editores,

TABLA 8.1-3

VALORES EXPERIMENTALES DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE ALGUNOS METALES LÍQUIDOS A LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA[a]

Metal	Temperatura T (° C)	Conductividad calorífica k (cal seg^{-1} cm^{-1} (° K)$^{-1}$)
Al	700	0,247
	790	0,290
Cd	355	0,106
	435	0,119
Pb	330	0,039
	500	0,037
	700	0,036
Hg	0	0,0196
	120	0,0261
	222	0,0303
K	200	0,1073
	400	0,0956
	600	0,0846
Na	100	0,2055
	300	0,1809
	500	0,1596
Aleación Na-K	100	0,0617
56% en peso de Na	300	0,0648
44% en peso de K	500	0,0675

[a] Datos tomados del *Reactor Handbook,* vol. 2, Atomic Energy Comission, AECD-3646, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (mayo 1955), pp. 258 y ss.

Substituyendo en la Ec. 8.1— 1, se obtiene

$$k = \frac{QY}{A\Delta T} = \frac{0{,}717 \times 0{,}650 \text{ (cal seg}^{-1}\text{) (cm)}}{1000 \times 2{,}00 \text{ (cm}^2\text{)(° K)}}$$

$$= 2{,}33 \times 10^{-4} \text{ cal seg}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ (° K)}^{-1}$$

Para valores pequeños de AT, como en este caso, se puede suponer que el valor de k corresponde a la temperatura media $(T_1 + T_0)/2$, que es 25" C. En relación con los métodos que tienen en cuenta la variación de k con T, véanse los problemas 9.F. y 9.J.

TABLA 8.1-4
VALORES EXPERIMENTALES DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE ALGUNOS SÓLIDOS[a]

Substancia	Temperatura T (° C)	Conductividad calorífica k (cal seg^{-1} cm-t (° K)$^{-1}$)
Aluminio	100	0,492
	300	0,64
	600	1,01
Cadmio	0	0,220
	100	0,216
Cobre	18	0,918
	100	0,908
Acero	18	0,112
	100	0,107
Estaño	0	0,1528
	100	0,143
Ladrillo (rojo corriente)	—	0,001s
Hormigón (bloque)	—	0,0022
Capa de tierra (media)	—	0,004
Vidrio	200	0,0017
Grafito		0,012
Arena (seca)		0,00093
Madera (pino)		
paralela al eje		0,00030
perpendicular al eje	—	0,00009

[a] Datos tomados de *Reactor Hadbook,* vol. 2, Atomic Energy Commission, AECD-3646, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (mayo, 1955), pp. 1766 y ss.

§ 8.2 VARIACIÓN DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE GASES Y LÍQUIDOS CON LA TEMPERATURA Y LA PRESIÓN

Debido a la escasez de datos de garantia de la conductividad calorífica de fluidos, frecuentemente es preciso estimar k a partir de otros datos de la substancia en cuestión. A continuación se presentan dos correlaciones que permiten efectuar dicha estimación, y que al mismo tiempo indican como varía la conductividad calorífica de los fluidos puros con la presión y la temperatura. Estas correlaciones están basadas en el principio de los estados correspondientes y son análogas a las que se han expuesto para el caso de la viscosidad (Figs. 1.3-1 y 1.3-2).

La Fig. 8.2-1 es una representación gráfica de la conductividad calorífica reducida $k_r = k/k_c$, que es la conductividad calorífica a una determinada temperatura y presión, dividida por la conductividad calorífica correspondiente al punto crítico. Esta magnitud se ha representado en función de la temperatura reducida $T_r = T/T_c$ y la presión reducida $p_r = p/p_c$. La Fig. 8.2— 1 es análoga a la Fig. 1.3— 1 de la

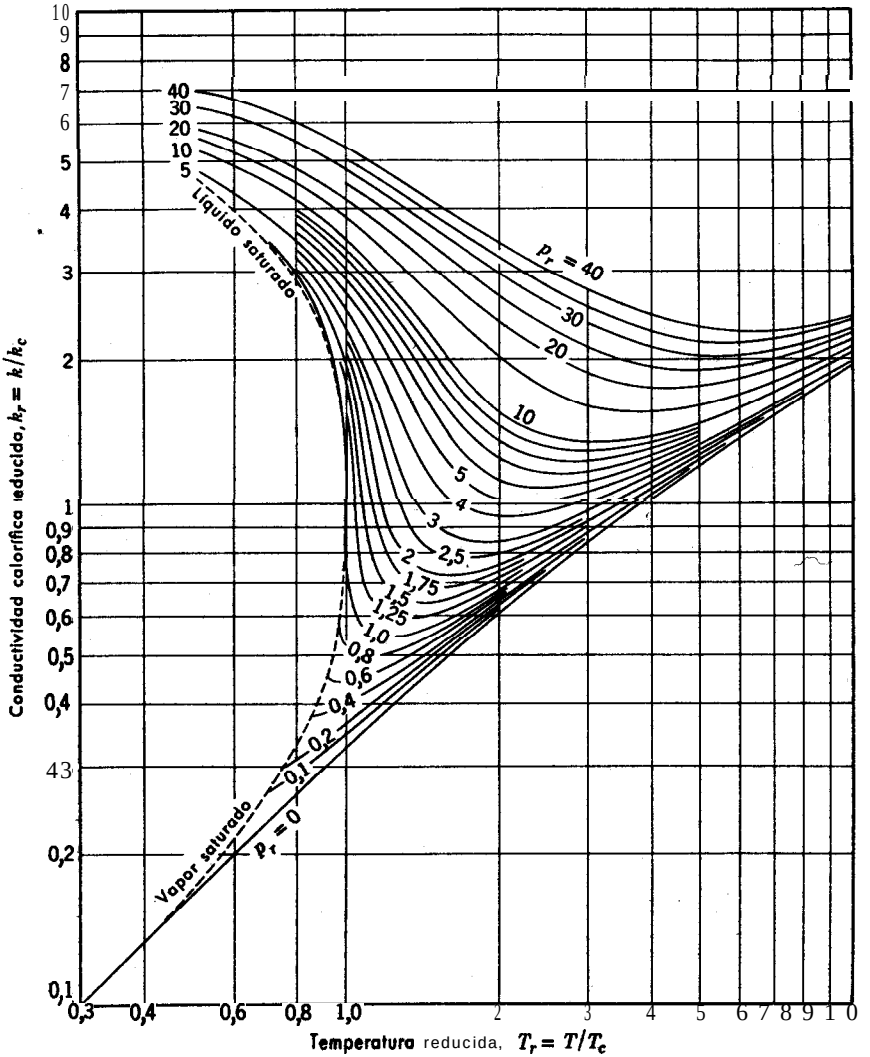


Fig. 8.2-1. Conductividad calorífica reducida de los gases monoatómicos, en función de la temperatura y presión reducidas. [E. H. Owens y G. Thodos, *A. Z. Ch. E. Journal*, *3*, 454461 (1957). Una versión a gran escala de esta gráfica se inserta en 0. A. Hougen, K. M. Watson y R. A. Ragatz, ***Chemical Process Principles Charts***, Wiley, Nueva York (1960). segunda edición.]

viscosidad, reducida. Aunque se ha desarrollado para los gases monoatómicos, puede utilizarse también con carácter aproximado para los poliatómicos.

En la Fig. 8.2-1 se observa que la conductividad calorífica de un gas a bajas presiones tiende hacia una función límite de la temperatura T; para la mayor parte de los gases, este límite se alcanza ya prácticamente a la presión de 1 atm. La conductividad calorífica de los gases a baja densidad *aumenta* con la temperatura, mientras que para la mayor parte de los *líquidos disminuye* al aumentar dicha variable. En la región líquida la correlación es menos satisfactoria, y los líquidos asociados o polares, como el agua, pueden presentar un máximo de la curva de k frente a T.

Generalmente no se dispone de valores experimentales de k_c, pero puede estimarse siguiendo uno de estos dos caminos: *(a)* si se conoce k a una determinada temperatura y presión, a ser posible en unas condiciones próximas a las que se desea k, se puede leer k_r en la gráfica y calcular $k_c = k/k_r$; o bien (b) se puede estimar k en la región de baja densidad por los métodos que se indican en § 8.3, y proceder después de igual forma que en *(a)*. En el Apéndice B, Tabla B.l, se dan valores de k_c para algunos gases, obtenidos por el método *(a)*.

La Fig. 8.2-2 es una representación gráfica de $k^{\#} = k/k^0$, que es la conductividad calorífica a una determinada temperatura y presión, dividida por la conductividad calorífica a la misma temperatura y a la presión atmosférica. Esta gráfica se utiliza de la misma forma que la correspondiente a la viscosidad de la Fig. 1.3-2. k^0 puede ser un valor experimental o bien estimado de acuerdo con la teoría que se expone en la próxima sección. Para el caso de gases poliatómicos, ninguna de las dos correlaciones es muy exacta. (Véase ejemplo 8.2-1.)

La conductividad calorífica de mezclas se puede estimar por métodos pseudocríticos análogos a los que se han descrito en § 1.3. Para obtener los mejores resultados deberá estimarse k^0 por el método que se indica en § 8.3 para mezclas gaseosas a baja presión y aplicar después una corrección de presión basada en la Fig. 8.2-2. Se sabe muy poco acerca de la exactitud de los procedimientos pseudocríticos aplicados a la conductividad calorífica, debido a que existen muy pocos datos experimentales para mezclas a presiones elevadas.

Ejemplo 8.2-1. Efecto de la presión sobre la conductividad calorífica

Estímese la conductividad calorífica del etano a 67,2° C y 191,9 atm sabiendo que a esta temperatura y a la presión atmosférica,[1] $k^0 = 0{,}0237$ Kcal hr^{-1} m^{-1}° C^{-1}

Solución. El procedimiento más sencillo consiste en utilizar la Fig. 8.2-2. Primeramente calcularemos las coordenadas necesarias, utilizando las propiedades críticas de la Tabla B.l:

$$T_r = \frac{67{,}2 + 273{,}2}{305{,}4} = 1{,}115$$

$$p_r = \frac{191{,}9}{48{,}2} = 3{,}98$$

[1] J. M. LENOIR, W. A. JUNK y E. W. COMINS, *Chem. Eng. Progr., 49, 539-542* (1949).

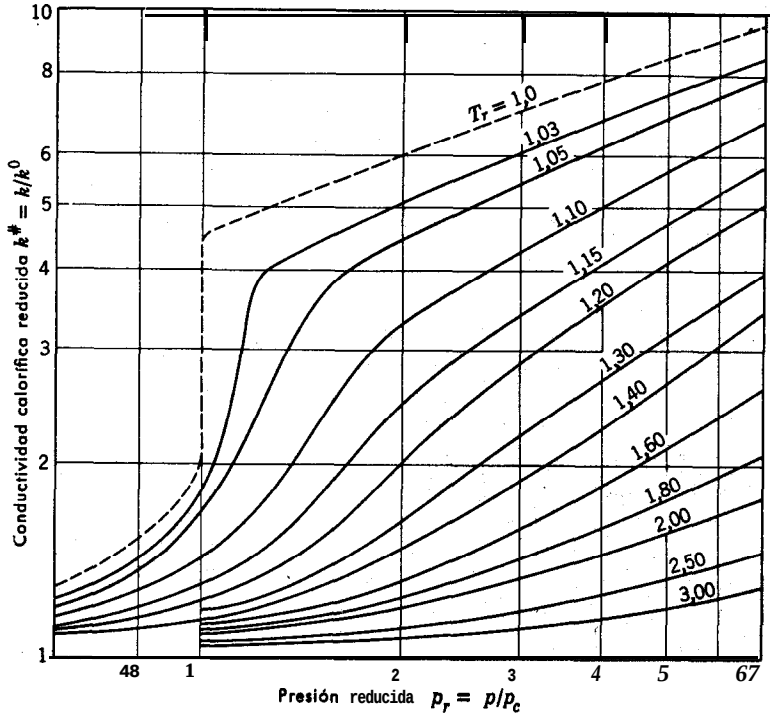


Fig. *8.2-2.* Conductividad calorífica reducida $k^{\#} = k/k^0$ en función de la temperatura reducida y la presión reducida [J. M. Lenoir, W. A. Junk, y E. W. Comings, *Chem. Eng. Prog.*, **49**, 539 (1953).]

En la Fig. 8.2-2 se encuentra que $k^{\#} = 4,7$, por lo tanto

$$k = k^{\#}k^0 = 4,7 \times 0,0237$$

$$= 0,111 \text{ Kcal hr}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ °C}^{-1}$$

Un valor experimental[1] es 0,0675 Kcal hr^{-1} m-t ° C-t. Esta discordancia pone de manifiesto que no debe tenerse mucha confianza en esta correlación en el caso de substancias poliatómicas o para condiciones próximas a las del punto critico.

Otra solución. Este problema puede resolverse también mediante la Fig. 8.2-1.

Para las condiciones en que se conoce k^0 ($p_r = 0$, $T_r \doteq 1,115$), se encuentra que $k_r = 0,36$. Por tanto,

$$k_c = \frac{k_r}{k} = \frac{0,0237}{0,36}$$

$$= 0,0658 \text{ Kcal hr}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{ °C}$$

Para las condiciones de estimación ($p_r = 3{,}8$ y $T_r = 1{,}115$), se lee $k_r = 2{,}07$. El valor que se obtiene para la conductividad calorífica es por tanto

$$k = k_r k_c = 2.07 \times 0{,}0658$$
$$= 0{,}1362 \text{ Kcal hr}^{-1} \text{ m}^{-1} {}^{\circ}\text{C}^{-1}$$

El resultado es algo menos exacto que el que se obtiene mediante la Fig. 8.2-2

§ 8.3 TEORÍA DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE LOS GASES A BAJA DENSIDAD

Las conductividades caloríficas de los gases ***monoatómicos*** diluidos se conocen muy bien y pueden predecirse con exactitud mediante la teoría cinética. En cambio, la teoría de los gases ***poliatómicos se*** ha desarrollado tan sólo de una forma parcial, si bien existen algunas aproximaciones groseras que tienen interés. De igual forma que en § 1.4, exponemos aquí una deducción simplificada con el fin de ilustrar el mecanismo del transporte de energía y posteriormente daremos a conocer los resultados exactos de la moderna teoría cinética.

Comenzaremos por el calculo de la conductividad calorífica de un gas **monoatómico** a baja densidad. Al igual que en § 1.4, supondremos que las moléculas son esferas rígidas, que no se atraen, de masa m y diámetro ***d.*** Se supone también que el gas en conjunto está en reposo ($v = 0$), pero en cambio se tiene en cuenta el movimiento molecular.

Como en el caso anterior, utilizaremos los siguientes resultados de la teoría cinética, para el caso de un gas diluido constituido por esferas rígidas, en el que los gradientes de temperatura, presión y velocidad son pequeños:

$$\bar{u} \doteq \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}} = \text{valor medio de la velocidad molecular} \qquad (8.3\text{-}1)$$

$$Z = \frac{1}{4} n\bar{u} = \text{frecuencia de colisión de pared por unidad de área} \qquad (8.3\text{-}2)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \text{recorrido libre medio} \qquad (8.3\text{-}3)$$

Las moléculas que llegan a un plano cualquiera del gas han efectuado, como promedio, su última colisión a una distancia ***a*** de dicho plano, siendo,

$$a = \tfrac{2}{3}\lambda \qquad (8.3\text{-}4)$$

En estas ecuaciones, κ es la constante de Boltzmann y ***n*** el número de moléculas por unidad de volumen.

La única forma de energía que pueden intercambiar las esferas rígidas durante la colisión es la energía de traslación, cuyo valor medio por moléculas, en condiciones de equilibrio, viene dado por (véase el problema 1.1):

$$\tfrac{1}{2}m\overline{u^2} = \tfrac{3}{2}\kappa T \qquad (8.3\text{-}5)$$

El calor específico molar, a volumen constante, del gas que estamos considerando, es

$$\tilde{C}_v = \tilde{N}\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{2}m\overline{u^2}\right) = \frac{3}{2}R \qquad (8.3\text{-}6)$$

siendo R la constante de los gases. La Ec. 8.3-6 da valores satisfactorios para los gases monoatómicos hasta temperaturas de varios miles de grados.

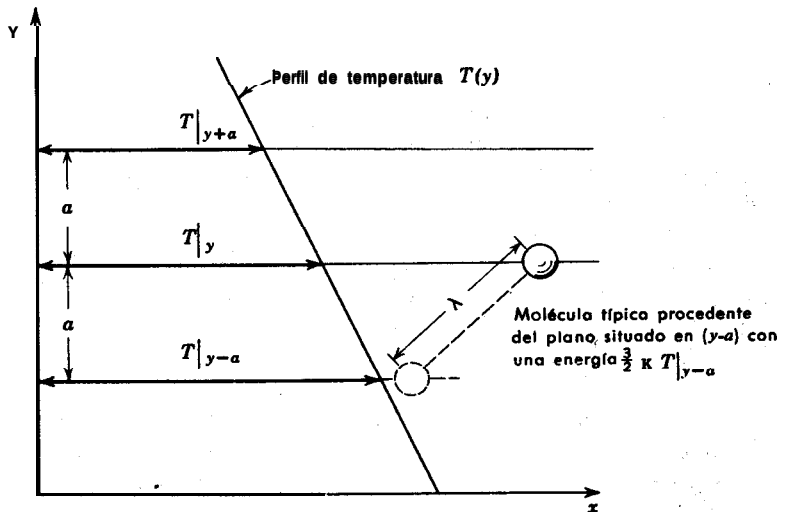


Fig. 8.3-1. Transporte molecular de energía desde el plano $(y - a)$ hasta el plano y.

Para determinar la conductividad calorífica, veamos lo que le ocurre al gas cuando se somete a un gradiente de temperatura dT/dy. (Véase Fig. 8.3-1.) Suponemos que las Ecs. 8.3-1 a 6 siguen siendo válidas en esta situación de no equilibrio, sólo que el termino $m\overline{u^2}/2$ de la Ec. 8.3-5 corresponde a la energía cinética media de las moléculas que han efectuado su última colisión en la región de temperatura T. La densidad flujo de calor q_y, a través de un plano situado a una distancia constante y, se halla sumando las energías cinéticas de las moléculas que cruzan el plano por unidad de tiempo en la dirección y positiva, y restando las energías cinéticas de las que lo cruzan en la dirección y negativa:

$$q_y = Z\tfrac{1}{2}m\overline{u^2}|_{y-a} - Z\tfrac{1}{2}m\overline{u^2}|_{y+a} \qquad (8.3\text{-}7)$$

$$= \tfrac{3}{2}\kappa Z(T|_{y-a} - T|_{y+a}) \qquad (8.3\text{-}8)$$

Las Ecs. 8.3-7 y 8.3-8 están basadas en las suposiciones de que todas las moléculas tienen velocidades representativas de la región en que han efectuado su última co-

lisión, y que además, el perfil de temperatura $T(y)$ es prácticamente lineal en una distancia correspondiente a varias veces el recorrido libre medio. Teniendo en cuenta estas suposiciones, podemos escribir

$$T|_{y-a} = T|_y - \frac{2}{3}\lambda\frac{dT}{dy}$$
$$T|_{y+a} = T|_y + \frac{2}{3}\lambda\frac{dT}{dy} \qquad (8.3\text{-}9)$$

Combinando las Ecs.8.3—2, 8 y 9, se llega a

$$q_y = -\tfrac{1}{2}n\kappa\bar{u}\lambda\frac{dT}{dy} \qquad (8.3\text{-}10)$$

Esta expresión corresponde a la ley de Fourier de la conducción del calor (Ec. 8.1—2), en la que la conductividad calorífica viene dada por

$$k = \tfrac{1}{2}n\kappa\bar{u}\lambda = \tfrac{1}{3}\rho\hat{C}_v\bar{u}\lambda \qquad \text{monoatómicos} \qquad (8.3\text{-}11)$$

siendo $\rho = nm$ la densidad del gas.

Substituyendo ü y λ de las Ecs. 8.3-1 y 3, se obtiene

$$k = \frac{1}{d^2}\sqrt{\frac{\kappa^3 T}{\pi^3 m}} \qquad \text{monoatómicos} \qquad (8.3\text{—}12)$$

que corresponde a la conductividad calorífica de un gas diluido constituido por esferas rígidas. Esta ecuación predice que k es independiente de la presión. Las Figs. 8.2-1 y 2 indican que esta predicción concuerda satisfactoriamente con los datos experimentales para la mayor parte de los gases hasta presiones de 10 atmósferas.

La predicción de la variación con la temperatura es peor, igual que en el caso de la viscosidad, si bien está de acuerdo cualitativamente.

Para un tratamiento más exacto de los gases monoatómicos volvemos a aplicar la teoría rigurosa de Chapman-Enskog expuesta en § 1.4. La fórmula de Chapman-Enskog[1] para la conductividad calorífica de los gases monoatómicos a baja densidad a la temperatura T (° K) es

$$k = 1{,}9891 \times 10^{-4}\frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2\Omega_k} \qquad \text{monoatómicos} \qquad (8.3\text{-}13)$$

en la que k[=] cal cm-r seg^{-1} (“K) $^{-1}$, σ[=] A, y Ω_k es idéntica ala función de coli-

[1] J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD; Molecular *Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954). p. 534.

sión Ω_μ que hemos visto en la teoría de la viscosidad. En fa Tabla B.2 del Apéndice *B* se dan valores de $\Omega_k = \Omega_\mu$ para el modelo del potencial intermolecular de Lennard-Jones, en función del número adimensional de temperatura $\kappa T/\epsilon$. La Ec. 8.3-13 y la Tabla B.2 dan valores muy exactos y permiten predecir conductividades caloríficas de gases *monoatómicos* utilizando los mismos valores numéricos de σ y ϵ que

TABLA 8.3 — 1

VALORES ESTIMADOS Y OBSERVADOS DE $\frac{\hat{C}_p\mu}{k}$ PARA GASES A LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA[a]

Gas	T(° K)	$\frac{\hat{C}_p\mu}{k}$ de la Ec. 8.3-16	$\frac{\hat{C}_p\mu}{k}$ a partir de valores experimentales de $\hat{C}_p$, μ, y k
Ne[b]	273,2	0,667	0,66
Ar[b]	273,2	0,667	0,67
H_2	90,6	0,68	0.68
	273,2	0,73	0,70
	673,2	0,74	0,65
N_2	273,2	0,74	0.73
O_2	273,2	0.74	0,74
Aire	273,2	0,74	0.73
c o	273,2	0.74	0,76
N O	273,2	0,74	0,77
Cl_2	273,2	0,76	0,76
H_2O	373,2	0,77	0,94
	673,2	0,78	0,90
CO_2	273,2	0,78	0,78
SO_2	273,2	0,79	0,86
NH_3	273,2	0,77	0,85
C_2H_4	273,2	0,80	0,80
C_2H_6	273,2	0,83	0,77
$CHCl_3$	273,2	0,86	0,78
CCl_4	273.2	0,89	0,81

[a] Calculados a partir de los valores dados por M. Jakob, *Heat Transfer,* Wiky, Nueva York (1949), pp. 75 76.

[b] J. 0. Hirschfelder, C. F. Curtiss, y R. B. Bird, Molecular *Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954), p. 16.

en los cálculos de viscosidad. (Véase Tabla B.1). La Ec. 8.3— 13 es completamente similar a la fórmula correspondiente de la viscosidad, Ec. 1.4— 18, siendo la relación entre k y μ:

$$k = \frac{15}{4}\frac{R}{M}\mu = \frac{5}{2}\hat{C}_v\mu \quad \text{monoatómicos} \qquad (8.3-14)$$

De la teoría simplificada de la esfera rígida (véanse Ecs. 1.4-8 y 8.3-11) se obtiene que $k = \hat{C}_v\mu$, dando lugar a un valor que es 2,5 veces menor. No es de extrañar esta discrepancia si se tienen en cuenta las numerosas aproximaciones que se han hecho en el tratamiento simplificado.

Hasta aquí sólo hemos tratado de los *gases monoatómicos*, pero ahora vamos a considerar una generalización aproximada de los resultados anteriores para el caso de los *gases poliatómicos*.[2] Esta generalización es necesaria puesto que las moléculas poliatómicas además de la energía cinética de traslación poseen también energía de rotación y vibración, y todas estas formas de energía pueden intercambiarse en la colisión.

Eucken[2] desarrolló un método semiempírico sencillo para el tratamiento de intercambio de energía en los gases poliatómicos. Su ecuación para la conductividad de los gases poliatómicos a baja densidad es

$$k = \left(\hat{C}_v + \frac{5}{4}\frac{R}{M}\right)\mu \qquad \text{poliatómico (Eucken)} \qquad (8.3\text{-}15)$$

En esta ecuación está incluida, como un caso especial, la fórmula de los gases monoatómicos, Ec. 8.3— 14, puesto que para estos gases $\hat{C}_v = \frac{3}{2}(R/M)$. Sobre una base teórica, Hirschfelder[3] ha obtenido una ecuación similar a la 8.3-15.

La Ec. 8.3-15 constituye un método sencillo para la estimación del número de Prandtl, $\Pr = \hat{C}_v\mu/k$, que es un número adimensional de gran importancia en la transmisión del calor por convección:

$$\Pr = \frac{\hat{C}_v\mu}{k} = \frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_v + 1.25R} \qquad \text{poliatómicos} \qquad (8.3-16)$$

Ésta es la fórmula de Eucken para el número de Prandtl de un gas poliatómico a baja densidad.

En la Tabla 8.3-1 se comparan los valores de $\hat{C}_v\mu/k$ obtenidos mediante la Ec. 8.3— 16, con los calculados a partir de datos experimentales de $\hat{C}_v$, μ, y k. Como $\hat{C}_v$ y μ se conocen exactamente para los gases que se indican en la Tabla, la comparación es una medida de la concordancia entre los valores experimentales y estimados de k. La concordancia es buena para los gases monoatómicos y diatómicos (a excepción del H_2), pero para los gases más complejos es menos satisfactoria. La mayor desviación es del 20 % y corresponde al agua a 100° C. Como es

[2] A. EUCKEN, *Physik. Z.*, 14, 324-332 (1913;.

[3] J. O. HIRSCHFELDER, *J. Chem. Phys.*, *26, 274-281, 282-285* (1957).

natural, para los gases poliatómicos deberán utilizarse datos experimentales, siempre que sea posible, en vez de la regla de Eucken.

Bromley[4] ha desarrollado un método empírico más detallado para la predicción de k de los gases poliatómicos. Actualmente se dispone de un método más satisfactorio para gases poliatómicos y polares basado en la teoría cinética.[5]

La conductividad calorífica de las mezclas gaseosas a baja densidad puede estimarse por un método[6] análogo al descrito anteriormente para la viscosidad (véanse Ecs. 1.4-19 y 20):

$$k_{\text{mezc}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i k_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_{ij}} \tag{8.3-17}$$

donde x_i son las fracciones molares, y k_i las conductividades caloríficas de los componentes puros. Los coeficientes Φ_{ij} son los mismos que intervienen en la ecuación de la viscosidad.

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-1/2}\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2}\left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2 \tag{8.3-18}$$

Todos los valores de μ y k de estas ecuaciones están dados a baja densidad y a una temperatura determinada. Si no se dispone de datos de viscosidad, pueden estimarse mediante la Ec. 8.3— 15 a partir de valores de k y $\hat{C}_p$. La comparación con los datos experimentales indica que la desviación media de las mezclas[6] que contienen gases poliatómicos no polares, como CH,, O_2, N_2, C_2H_2 y CO, es del orden del 4 %.

Ejemplo 8.3— 1. Cálculo de la conductividad calorífica de un gas monoatómico a baja densidad

Calcular la conductividad calorífica del neon a 373,2° K y 1 atm.

Solución. Las constantes de Lennard-Jones para el neon, según la Tabla B.l, son σ = 2,789 *A* y ϵ/κ = 35,7°K; el peso molecular M es 20,183. Por lo tanto, a 373,2°K, $\kappa T/\epsilon$ = 373,2/35,7 = 10,45. En la Tabla B.2 se encuentra que $\Omega_k = \Omega_\mu$ = 0,821. Substituyendo en la Ec. 8.3 — 13 se obtiene

---

[4] L. A. BROMLEY, *University of California Radiation Lab. Report UCRL-1852, Berkeley, California* (1952). R. C. REID y T. K. SHERWOOD, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, Nueva York (1958), pp. 228-231.

[5] E. A. MASON y L. MONCHICK, *J. Chem. Phys., 35* (1961).

[6] E. A. MASON *y S. C.* SAXENA, *The Physics of Fluids, 1, 361-369* (1958). Este método es una aproximación del más exacto propuesto por J. 0. HIRSCHFELDER, *J. Chem. Phys.*, 26, 274-281, 282-285 (1957). Contando con la aprobación del Profesor E. A. MASON, se ha omitido en Φ_{ij} el factor empírico 1,065 (para $i \neq j$).

$$k = 1{,}9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

$$= 1{,}9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{373{,}2/20{,}183}}{(2{,}789)^2(0{,}821)}$$

$$= 1{,}338 \times 10^{-4} \text{ cal cm-1 seg}^{-1}\,^{\circ}\text{K}^{-1}$$

El valor experimental' en estas condiciones es $1{,}35 \times 10^{-4}$ cal cm-1 $\text{seg}^{-1}\,^{\circ}\text{K}^{-1}$.

Ejemplo 8.3-2. Estimación de la conductividad calorífica de un gas poliatómico a baja densidad

Estimar la conductividad calorifica del oxigeno molecular a 300°K y baja presión.

Solución. El peso molecular del O_2 es 32,000; su calor específico $\tilde{C}_p$ a 300°K y baja presión es 7,019 cal $\text{g-mol}^{-1}\,^{\circ}\text{K}^{-1}$; los parámetros de Lennard-Jones, según la Tabla B.l, son σ = 3,433 Å y ϵ/κ = 1130 K. Por lo tanto, a 300° K, kT/ϵ = 300/113 = 2,655. En la Tabla B.2 se encuentra que Ω_μ = 1,074. La viscosidad, según la Ec. 1.4-18, es

$$\mu = 2{,}6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu}$$

$$= 2{,}6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{(32{,}00)(300)}}{(3{,}433)^2(1{,}074)}$$

$$= 2{,}065 \times 10^{-4} \text{ g cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}$$

La conductividad calorífica según la fórmula de Eucken, Ec. 8.3— 15, es

$$k = \left(\tilde{C}_p + \frac{5}{4} R\right) \frac{\mu}{M}$$

$$= (7{,}019 + 2{,}484) \frac{2{,}065 \times 10^{-4}}{32{,}000}$$

$$= 6{,}14 \times 10^{-5} \text{ cal cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}\,^{\circ}\text{K}^{-1}$$

Este valor estimado concuerda satisfactoriamente con el experimental de $6{,}35 \times 10^{-5}$ cal cm^{-1} $\text{seg}^{-1}\,^{\circ}\text{K}^{-1}$ que figura en la Tabla 8.1-1.

Ejemplo 8.3-3. Predicción de la conductividad calorífica de una mezcla gaseosa a baja densidad

Predecir la conductividad calorífica de la siguiente mezcla gaseosa a 1 atm y 293° K, a partir de los datos que se indican para los componentes puros a 1 atm y 293° K:

---

7 W. G. KANNULUIK y E. H. CARMAN, *Proc. Phys. Soc. (London), 65, B,* 701-704 (1952).

Componentes	i	Fracción molar x_i	Peso molecular M_i	$\mu_i \times 10^7$ (g cm^{-1} seg^{-1})	$k_i \times 10^7$ (cal seg^{-1} cm^{-1} °K^{-1})
CO_2	1	0,133	44,010	1462	383
O_2	2	0,039	32,000	2031	612
N_2	3	0,828	28,016	1754	627

Solución. Se utilizan las Ecs. 8.3-17 y 8. Con el fin de aminorar el trabajo, recordemos que Φ_{ij} para esta mezcla, en las mismas condiciones, se utilizó ya en el cálculo de la viscosidad del ejemplo 1.4-2, en el que se evaluaron los Siguientes sumandos, que intervienen también en la Ec. 8.3 -17:

	i = 1	$i = 2$	$i = 3$
$\sum_{j=1}^{3} x_j \Phi_{ij}$	0,763	1,057	1,049

Substituyendo en la Ec. 8.3-17 se obtiene

$$k_{mezc} = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i k_i}{\sum_{j=1}^{3} x_j \Phi_{ij}}$$

$$= \frac{(0,133)(383)(10^{-7})}{0,763} + \frac{(0,039)(612)(10^{-7})}{1,057} + \frac{(0,828)(627)(10^{-7})}{1,049}$$

$$= 584 \times 10^{-7} \text{ cal seg}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ °K}^{-1}$$

No se dispone de datos experimentales en estas condiciones para poder comparar el resultado.

§ 8.4 TEORÍA DE LA CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE LÍQUIDOS

Bridgman[1] propuso en 1923 una teoría sencilla del transporte de energía en líquidos puros. Suponía que las moléculas estaban dispuestas en una red cúbica con una separación entre centros $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$, siendo $\tilde{V}/\tilde{N}$ el volumen por molécula. Admite tambitn que la energía se transmite desde un plano de la red a otro contiguo con la velocidad del sonido v_s en el fluido considerado. El desarrollo se basa en una nueva interpretación de la Ec. 8.3 — ll, correspondiente a la teoría de los gases de la esfera rígida:

$$k = \tfrac{1}{3}\rho \hat{C}_v \bar{u} \lambda = \rho \hat{C}_v \overline{|u_y|} a \qquad (8.4\text{-}1)$$

[1] P. W. BRIDGMAN, *Proc.* Am. *Acad. Arts. Sci.*, 59, 141-169 (1923). La ecuación de Bridgman se. cita a veces erróneamente debido a que viene dada en función de una constante poco conocida de los gases igual a $3\kappa/2$.

El calor específico a volumen constante de un líquido monoatómico es, aproximadamente, el mismo que el de un sólido a temperatura elevada, de forma que $\rho C_v \doteq 3(\tilde{N}/\tilde{V})\kappa$. El valor medio de la velocidad molecular en la dirección y, $|\overline{u_y}|$, se substituye por la velocidad del sonido v_s. La distancia a que recorre la energía en cada colisión se toma igual a la separación de la red $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$. Efectuando estas substituciones en la Ec. 8.4— 1, se obtiene

$$k = 3\left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}}\right)^{2/3} \kappa v_s \qquad (8.4\text{-}2)$$

que es la ecuación de Bridgman. Los datos experimentales están en buena concordancia con la Ec. 8.4-2, aun para líquidos poliatómicos, pero el coeficiente numérico 3,0 es excesivamente elevado. La concordancia es muy satisfactoria[2] si se toma para el coeficiente el valor 2,80

$$k = 2{,}80\left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}}\right)^{2/3} \kappa v_s \qquad (8.4\text{-}3)$$

Esta ecuación es válida con la condición de que la densidad sea bastante superior a la densidad crítica, ya que se ha supuesto que cada molécula oscila en una «jaula» formada por las moléculas más próximas. El éxito de esta ecuación para el caso de los fluidos poliatómicos parece 'indicar que la transmisión de energía durante las colisiones de las moléculas poliatómicas no es completa, puesto que el calor específico molecular 3κ que utiliza es menor que el que corresponde a los líquidos poliatómicos a temperatura ambiente o más elevada.

La velocidad del sonido de baja frecuencia, v_s (véase problema 10. Q), viene dada por la ecuación

$$v_s = \sqrt{\frac{C_p}{C_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} \qquad (8.4\text{–}4)$$

El término $(\partial p/\partial \rho)_T$ se puede obtener fácilmente de las medidas de compresibilidad isotérmica, de una ecuación de estado, o bien de una correlacións de compresibilidad, y C_p/C_v para los líquidos es prácticamente la unidad excepto en las proximidades del punto crítico.

En la bibliografía[4,5] existen resúmenes de las correlaciones empíricas de la conductividad calorífica de los líquidos.

---

[2] La Ec. 8.4-3 concuerda aproximadamente con la fórmula deducida por R. E. POWELL, W. E. ROSEVEARE, y H. EYRING, *Ind. Eng. Chem., 33, 430* (1941).

[3] O. A. HOUGEN, K. M. WATSON, y R. A. RAGATZ, *Chemical Process Principles, segunda* edición, Wiley, Nueva York (1959), Part II.

[4] R. C. REID y T. K. SHERWOOD, *The Properties of Gases and Liquids,* Mc Graw-Hill, Nueva York (1958), capitulo 7.

[5] L. RIEDEL, *Chemie-Ing.—Techn.*, 27, 209-213 (1955).

Ejemplo 8.4—1. Predicción de la conductividad calorífica de un liquido

La densidad del CCl_4 liquido a 20° C y a 1 atm es 1,595 g cm^{-3}, y su compresibilidad $\rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_T$ es 90,7 x 10^{-6} atm- 1 ¿Cuál es su conductividad calorifica?

Solución. Calcularemos primeramente

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho[\rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_T]} = \frac{1}{(1{,}595)(90{,}7 \times 10^{-6})}$$

$$= 6{,}91 \times 10^3 \text{ atm cm}^3\text{ g}^{-1} = 7{,}00 \times 10^9 \text{ cm}^2\text{ seg}^{-2}$$

Suponiendo que $C_p/C_v = 1{,}0$, y substituyendo en la Ec. 8.4-4, se obtiene

$$v_s = \sqrt{(1{,}0)(7{,}00 \times 10^9)} = 8{,}37 \times 10^4 \text{ cm seg}^{-1}$$

El volumen molar es $\tilde{V} = M/\rho = 153{,}84/1{,}595 = 96{,}5 \text{ cm}^3\text{ g-mol}^{-1}$. Substituyendo estos valores en la Ec. 8.4-3, se obtiene

$$k = 2{,}8\left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}}\right)^{2/3}\frac{K}{\tilde{V}}v_s$$

$$= 2{,}80\left(\frac{6{,}023 \times 10^{23}}{0{,}965 \times 10^2}\right)^{2/3}(1{,}3805 \times 10^{-16})(8{,}37 \times 10^4)$$

$$= 1{,}10 \times 10^4 \text{ (cm}^{-2}\text{) (erg °K}^{-1}\text{) (cm seg}^{-1}\text{)}$$

$$= 2{,}62 \times 10^{-4} \text{ cal seg}^{-1}\text{ cm}^{-1}\text{ °K}^{-1}$$

El valor experimental (Tabla 8.1-2) es 2,47 x 10^{-4} cal seg^{-1} cm^{-1} °K^{-1}

§ 8.5 CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA DE SÓLIDOS

Las conductividades caloríficas de los sólidos han de determinarse experimentalmente, ya que dependen de numerosos factores que son difíciles de medir o predecir. En el caso de sólidos porosos, por ejemplo, la conductividad calorífica depende extraordinariamente de la fracción de huecos, del tamaño de los poros y del fluido que está contenido en los poros; en los materiales cristalinos tienen importancia las fases y el tamaño de los cristales; finalmente, en los sólidos amorfos ejerce un efecto considerable el grado de orientación molecular. Un estudio detallado de las conductividades caloríficas de sólidos puede verse en la obra de Jakob.[1]

En general, los metales son mejores conductores que los no metales, y los materiales cristalinos conducen más fácilmente el calor que los amorfos. Los sólidos porosos secos son muy malos conductores del calor y constituyen excelentes aislantes térmicos. La conductividad de la mayor parte de los metales puros disminuye con la temperatura, mientras que la de los no metales aumenta; las aleaciones presentan un comportamiento intermedio. Quizá la más útil de estas reglas aproximadas es que las conductividades calorífica y eléctrica se comportan de igual manera.

---

[1] M. JAKOB, *Heat Transfer*, vol. I, Wiley, Nueva York (1949), capítulo 6.

Para metales puros, la conductividad calorífica k y la eléctrica k_e cumplen, aproximadamente, la relación:[2,3]

$$\frac{k}{k_e T} = L = \text{constante} \qquad (8.5\text{-}1)$$

que es la conocida ecuación de Wiedemann, Franz y Lorenz. El número de Lorenz, L, vale, aproximadamente, de 22 a 29 x 10^{-9} voltios2 $(^oK)^{-2}$ para los metales puros a 0° C, y varía ligeramente con la temperatura por encima de 0° C, siendo típico un aumento1 del 10 al 20 % por cada 1000° C. A temperaturas muy bajas (−269,4° C para el mercurio), los metales se hacen superconductores de la electricidad, pero no del calor, y por consiguiente L varía rápidamente con T en las proximidades de la región de superconducción. La Ec. 8.5-1 tiene sólo una utilidad limitada para el caso de las aleaciones, puesto que L varía grandemente con la composición, y en algunos casos también con la temperatura.

El txito de la Ec. 8.5-1 se debe al hecho de que los electrones libres son los principales portadores del calor en los metales puros. La ecuación no es válida para los no metales, en los que la concentración de electrones libres es tan baja que predomina la transmisión de energía mediante el movimiento molecular.

CUESTIONES PARA DISCUTIR ,

1. ¿Cuál es el orden de magnitud de la conductividad calorífica de los gases, líquidos y sólidos a la temperatura ambiente y presión de 1 atm?

2. ¿Es de esperar que la madera presente la misma conductividad calorífica en las tres direcciones?

3. ¿Cómo se define la difusividad térmica? ¿Cuáles son sus unidades?

4. Comparar la ley de Fourier de la conducción del calor con la ley de Newton de la viscosidad.

5. ¿Cómo varían aproximadamente la conductividad calorífica de los gases a baja densidad y la de los líquidos, con el tamaño de las moléculas que los constituyen?

6. ¿Cómo están relacionadas la conductividad calorífica y la viscosidad de los gases?

7. ¿Cuál es el significado físico de la fórmula de Eucken?

8. Comparar la variación de k con la temperatura para gases, líquidos y solidos.

9. Comparar cualitativamente las conductividades caloríficas del Ne^{20} y el Ne^{22} en estado gaseoso a baja densidad.

10. Demostrar la consistencia dimensional de la Ec. 8.4-3.

ll. Comprobar las unidades del numero de Lorena L.

12. ¿Cuáles son las limitaciones de la relación $\tilde{C}_p - \tilde{C}_v = R$?

PROBLEMAS

8.A$_1$ Predicción de conductividades caloríficas de gases a baja densidad

a. Calcular la conductividad calorífica del argon a 100° C y 1 atmósfera de presión, utilizando la teoría de Chapman-Enskog y las constantes de Lennard-Jones deducidas de los datos de visco-

---

2 L. LORENZ, *Poggendorff's Annalen*, 147, 429 (1872).

3 G. WIEDEMANN y R. FRANZ, *Ann. Phys. Chemie, 89, 530* (1853).

sidad. Comparar el resultado con el valor experimentalt de 506 x 10^{-7} cal cm-t seg^{-1} °C^{-1}

b. Calcular las conductividades **caloríficas** del oxido **nítrico** (NO) y del metano **(CH_4)** a **300°** K y presión **atmosférica,** utilizando los siguientes datos para las mismas condiciones:

	μ X 107, g cm^{-1} seg^{-1}	$\bar{C}_p$, csl g-mol^{-1} °K^{-1}
N O	1929	**7,15**
CH_4	1116	**8,55**

Comparar los resultados con los valores experimentales que se indican en la Tabla 8.1-1.

8.B_1 Cálculo del número de Prandtl para gases a baja densidad

a. Estimar el número de Prandtl, Pr = $\hat{C}_p\mu/k$, a 1 atm y 300" K por el **método** de Eucken para cada uno de los casos que se indican en la tabla inferior, utilizando solamente los datos de calor específico.

b. Calcular directamente el numero de Prandtl de cada uno de estos gases a partir de los valores tabulados de $\bar{C}_p$, μ, y k, y compararlos con los resultados del apartado *(a).* Todas las propiedades que se indican corresponden a 300" K y baja presión.

Gas	$\bar{C}_p$ (cal g-mol^{-1} °K^{-1})[a]	μ x 107 (g cm^{-1} seg^{-1})[b]	k x 107 (cal cm^{-1} seg^{-1} °K)[c]	
H e	4,968	1987	**3540**	
A r	4,968	**2270**	**421**	
H_2	*6,895*	*896*	**4250**	
Aire.	6,973	1851	**602**	
CO_2	*8,894*	1495	**383**	
H_2O	**8,026**	**959**	**426**	(extrapolado)

[a] *Selected Values of Thermodynamic Properties,* National Bureau of Standards (1947).
[b] J. 0. **HIRSCHFELDER,** R. B. BIRD y E. L. **SPOTZ,** *Chem. Revs., 44,* **205-231** (1949).
[c] *Lange's Handbook of Chemistry,* **McGraw-Hill,** Nueva York **(1956),** novena edición, p. 1544.

(Los valores que se dan en este problema se interpolaron suponiendo que log $K = a$ + blog T).

8.C_1 Predicciдn de la conductividad calorífica de un gas denso

Predecir la conductividad calorífica del metano **(CH_4)** a **110,4** atm y **52,8°** C por los dos **métodos** siguientes:

a. Utilícese la Fig. 8.2-1 y **tómense** del **Apéndice** B las propiedades críticas que sean necesarias.

b. Predígase la conductividad calorífica a **52,8° C** y baja presión por el **método** de Eucken y aplíquese **después** una corrección de presión basada en la Fig. 8.2-2. El valor experimental* es **0,0420 Kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1}.** ***Respuesta: a.*** **0,0437 Kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1}**

8.D_1 Predicciдn de la conductividad calorífica de una mezcla gaseosa

Predecir la conductividad calorífica a 1 atm y 300°K de una mezcla que contiene 20 moles por ciento de CO_2 y 80 moles por ciento de H_2. Utilícense para los **cálculos** los datos del problema 8.B. ***Respuesta: 2850 x*** 10^{-7} cal seg^{-1} cm-1 $(°K)^{-1}$

1 W. G. **KANNULUIK** y E. H. **CARMAN,** *Proc. Phys. Soc.* (London), **65B,** 701-704 **(1952),**
2 J. M. **LENOIR,** W. A. JUNK y E. W. **COMINGS,** *Chem. Eng. Progr., 49, 539-542* **(1953).**

8.E$_2$ Predicción de la conductividad calorífica de un líquido puro

Predecir la conductividad calorífica del agua a 40° C y 40 megabarias de presión (1 megabaria = 10^6 dinas cm^{-2}). La compresibilidad isotérmica, $\rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_T$, es 38 x 10^{-6} megabaria^{-1}, y la densidad es 0,9938 g cm-3. Supóngase que $C_p = C_v$.

Respuesta: 1.55 x 10^{-3} cal seg^{-1} cm-^{1} (° C)$^{-1}$

8.F$_2$ Cálculo de diámetros moleculares a partir de propiedades de transporte

a. Determinar el diámetro molecular d del argon, mediante la Ec. 1.4-9 y el valor de la viscosidad que se da en el problema 8.B.

b. Determinar el diámetro molecular d del argon mediante la Ec. 8.3-12 y el valor de la conductividad calorífica que se dan en el problema 8.B. Compárese este valor con el que se obtiene a partir de la viscosidad.

c. Calcular y comparar los valores de σ, el diámetro de colisión de Lennard-Jones, utilizando los mismos datos, pero tomando para $\epsilon/K = 124$" K.

d. ¿Qué ventaja de la teoría de Chapman-Enskog se advierte mediante los resultados anteriores?

Respuesta: *a.* 2.95 Å
b. 1.88 Å
c. 3,415 Å de la Ec. 1.4-18
3,425 Å de la Ec. 8.3-13

CAPÍTULO 9

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA EN SÓLIDOS Y EN EL FLUJO LAMINAR

En el Capítulo 2 hemos visto como ciertos problemas sencillos de flujo viscoso pueden resolverse por un procedimiento que consta de dos etapas: *(a)* se aplica un balance de cantidad de movimiento a una delgada lámina o envoltura perpendicular a la dirección de transporte de cantidad de movimiento, con lo que se obtiene una ecuación diferencial de primer orden, que puede resolverse para hallar las distribuciones de la densidad de flujo de cantidad de movimiento; *(b)* se introduce después en esta expresión la ley de viscosidad de Newton, obteniéndose una ecuación diferencial de primer orden de la velocidad del fluido en función de la distancia. Las constantes de integración que resultan se evalúan utilizando las condiciones límite, que determinan la velocidad o la densidad de flujo de cantidad de movimiento en las superficies que confinan el sistema.

En este capítulo comprobaremos que un gran número de problemas de conducción del calor se resuelven por un procedimiento análogo: *(a)* se aplica un balance de energía a una lámina delgada o envoltura perpendicular a la dirección del flujo de calor, con lo que se obtiene una ecuación diferencial de primer orden que permite hallar la distribución de la densidad de flujo de calor; *(b)* se introduce después en esta expresión la ley de Fourier de la conducción del calor, obteniéndose una ecuación diferencial de primer orden de la temperatura en función de la posición. Las constantes de integración que aparecen se determinan utilizando las condiciones límite que determinan la temperatura o la densidad de flujo de calor en las superficies que delimitan el sistema.

La semejanza de las frases de los dos párrafos anteriores pone de manifiesto que los métodos matemáticos que se utilizan en este capítulo son los mismos que hemos introducido en el Capítulo 2, y solamente la notación y nomenclatura serán distintas.

Después de una. breve introducción a los balances de energía aplicados a una envoltura, que se describen en § 9.1, se analiza la conducción del calor a través de una serie de sistemas sencillos. Si bien es cierto que estos problemas son un tanto idealizados, encuentran, sin embargo, aplicación en numerosos métodos típicos de diseño en ingeniería. Los sistemas que se estudian se han elegido con el fin de introducir al principiante en una serie de importantes conceptos físicos relacionados con

la transmisión del calor. Por otra parte, servirán para familiarizar al lector con un amplio conjunto de condiciones límite, al mismo tiempo que le informan sobre la forma de abordar problemas en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. En §§ 9.2-9.5 se estudian cuatro clases de ***fuentes de energía:*** eléctrica, nuclear, viscosa y química. En §§ 9.6 y 9.7 se tratan dos temas que tienen una aplicación algo más frecuente, a saber, ***flujo de calor a través de paredes compuestas y transmisión de calor desde aletas.*** Finalmente, en §§ 9.8 y 9.9 se analizan dos casos límite de transmisión de calor en fluidos en movimiento: ***convección forzada y convección libre*** (o ***natural).*** El estudio de' este grupo de temas facilita el camino para abordar las ecuaciones generales que, se exponen en, el Capítulo 10.

§ 9.1 BALANCE, DE ENERGÍA APLICADO A UNA ENVOLTURA: CONDICIONES LÍMITE

Los sistemas que se describen en las próximas. secciones se tratan en -función de balances envolventes de energla. Se' elige una lámina o envoltura, cuyas superficies son normales a la dirección de conducción. del calor,: y después se aplica al sistema una forma de la ley de conservación de la energía. Para las condiciones de estado estacionario (independiente del. tiempo), y con miras a este capítulo; establecemos la siguiente ecuación.

$$\begin{Bmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de energía}\\ \text{calorífica}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{salida de energía}\\ \text{calorífica}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{producción de energía}\\ \text{calorífica}\end{Bmatrix} = 0 \quad (9.1-1)$$

La energía calorífica puede entrar o salir del sistema por el mecanismo de conducción del calor, de acuerdo con la ley. de Fourier. También, puede, entrar o salir del sistema energía calorífica debido al movimiento global del fluido; este tipo de transporte *se* denomina a veces *transporte convectivo,* y la energía que entra 0 sale por este medio se llama generalmente entrada 0 salida,& ***calor sensible.*** La energía calorífica puede «producirse» por degradación de energía eléctrica, por disminución de- la velocidad -de neutrones o fragmentos nucleares liberados en los procesos de fisión, por degradación de energía mecánica (disipación,. viscosa), y por conversión de energía química en calor.

Es preciso hacer notar que la,' Ec. 9.1 — 1 es solamente. una forma restringida del balance de energía, pues no se hace mención de la energía cinética, de la energla potencial, ni del trabajo. Sin embargo, la forma de la Ec. 9.1 — 1 resulta útil para el planteamiento y resolución de diversos problemas de conducción del calor en estado estacionario en *sólidos* y *fluidos no compresibles.* En este capítulo utilizaremos la Ec. 9.1 — 1 sin justificarla, dejando las interpretaciones rigurosas para el capítulo siguiente.

Al escribir la Ec. 9.1 — 1 para un sistema consistenteen una delgada lámina o envoltura, el espesor de ésta puede. hacerse tender hacia cero. Este procedimiento

Conduce finalmente a una ecuación diferencial para la distribución -de temperatura. Al integrar esta ecuación diferencial, aparecen unas constantes de integración que pueden evaluarse utilizando las condiciones límite. Los tipos de condiciones límite más frecuentes son los siguientes:

a. La temperatura de la superficie puede ser conocida, p. e., $T = T_0$.

b. , La densidad de flujo de calor en la superficie puede, estar determinada, por ejemplo, $q = q_0$ (lo que equivale a especificar el gradiente de temperatura).

c. En una interfase sólido-fluido la densidad de flujo de calor puede relacionarse con la diferencia entre la temperatura de la interfase y la temperatura del fluido, así, por ejemplo:

$$4 = h(T - T_{\text{fluid}}) \qquad (9.14)$$

Esta relación es la «ley de enfriamiento de Newton»; no es realmente una ley sino una ecuación de definición de h, que es el llamado «coeficiente de transmisión de calor».

d. En las interfases sólido-sólido pueden estar determinadas la continuidad de temperatura y la densidad de flujo de calor.

En este capítulo intervienen todos estos' tipos de condiciones limite. Probablemente la relación anterior significará más para el lector, una vez que vea cómo se aplican estas condiciones límite. En los problemas que se estudian en este capítulo se supone que el coeficiente 'de transmisión de. calor, h, que se ha introducido en la Ec. 9.1-2, es conocido. La variación de h con las propiedades físicas del fluido y las variables de flujo se estudia en él Capítulo 13.

§ 9.2 CONDUCCIÓN DEL CALOR CON UN -MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN ELÉCTRICO

El primer sistema que vamos a considerar es un alambre de sección circular de radio R y conductividad eléctrica k_e ohm^{-1} cm-l. Por el alambre circula una corriente eléctrica, cuya densidad de corriente es Zamps cm-a. La transmisión de una Corriente' eléctrica es un proceso irreversible, "y parte de-la energía eléctrica se transforma en calor (energía calorífica). La velocidad de producción de calor por unidad de volumen viene dada por la expresión

$$S_e = \frac{I^2}{k_e} \qquad (9.24)$$

S_e es el calor que se origina debido a la disipación eléctrica. Se supone que el aumento de temperatura en,, el alambre no es grande, de forma que no es preciso tener en cuenta la variación de las conductividades eléctrica y calorífica con la temperatura. La superficie del alambre se mantiene ,a la temperatura T_0. Vamos a demostrar cómo se puede determinar la distribución radial de temperatura en el interior del alambre caliente.

Como sistema para el balance de energía elegimos una envoltura cilíndrica de longitud L y espesor Δr. (Véase Fig. 9.2— 1.) Las distintas contribuciones al balance de energía son

velocidad de entrada de energía calorífica a través de la superficie cilíndrica situada en r	$(2\pi rL)(q_r\|_r)$	(9.2-2)
velocidad de salida de energía calorífica a través de la superficie cilíndrica situada en r + Δr.	$(2\pi(r+\Delta r)L)(q_r\|_{r+\Delta r})$	(9.2-3)
velocidad de producción de energía calorífica debido a la disipación eléctrica	$(2\pi r\,\Delta r L)S_e$	(9.24)

La notación q_r quiere decir «densidad de flujo de energía en la dirección r», y de igual forma $|_r$ quiere decir «evaluado para la posición r». Obsérvese que la «entrada» y «salida» se toman en la dirección r positiva.

Substituyendo estas tres expresiones en la Ec. 9.1— 1, (dividiendo por $2\pi L\Delta r$, y tomando el límite cuando Δr tiende hacia *cero, se obtiene*

$$\left\{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{(rq_r)|_{r+\Delta r}-(rq_r)|_r}{\Delta r}\right\}=S_e r \tag{9.2-5}$$

La expresión entre corchetes es exactamente la derivada primera de rq_r con respecto a r, de modo que la Ec. 9.2-5 se transforma en

$$\frac{d}{dr}(rq_r)=S_e r \tag{9.2-6}$$

Esta ecuación diferencial de primer orden de la densidad de flujo de energía puede integrarse para dar

$$q_r=\frac{S_e r}{2}+\frac{C_1}{r} \tag{9.2-7}$$

La constante de integración Cr tiene que ser cero, debido a la condición límite

C.L. 1: para $r=0$ q_r no es infinito (9.24)

Por lo tanto, la expresión final para la distribución de densidad de flujo de energia es

$$\boxed{q_r=\frac{S_e r}{2}} \tag{9.2-9}$$

Esto indica que la densidad de flujo de calor aumenta linealmente con r.

Substituyendo en la Ec. 9.2-9 la ley de Fourier expresada en la forma $q_r = -k\,(dT/dr)$ (véase Ec. 8.1−2), se obtiene

$$-k\frac{dT}{dr} = \frac{S_e r}{2} \tag{9.2-10}$$

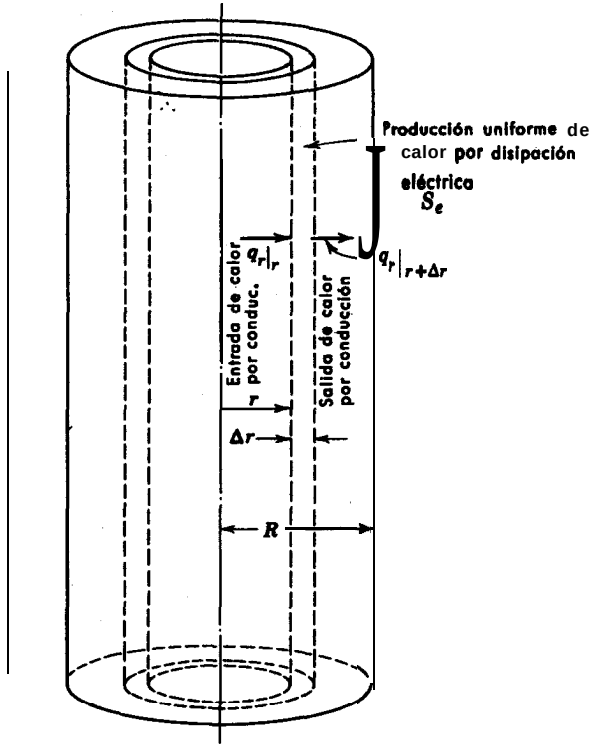


Fig. 9.2−1. Envoltura cilíndrica sobre la que se aplica el balance de energía con el fin de obtener la distribución de temperatura en un alambre calentado e-te.

Si se supone que k permanece constante, puede integrarse esta ecuación diferencial para obtener

$$T = -\frac{S_e r^2}{4k} + C_2 \tag{9.2–11}$$

La constante de integración C_2 se determina a partir de la condición límite,

C.L. 2: para $r = R$ $T = T_0$ (9.2— 12)

Con lo que se encuentra que C_2 es igual a $T_0 + (S_e R^2/4k)$, y, por consiguiente, la Ec. 9.2-11 se' transforma en

$$\boxed{T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} \tag{9.2-13}$$

La Ec. 9.2— 13 indica que el aumento de temperatura es una función parabólica de la distancia r medida desde el eje del alambre.

Una vez que se conocen las distribuciones de temperatura y de la densidad de flujo de energía, puede obtenerse más información acerca del sistema:

(i) ***Incremento máximo de. temperatura*** (para $r = 0$)

$$T_{máx} - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k} \tag{9.2-14}$$

(ii) ***Incremento medio de temperatura***

$$\langle T\rangle - T_0 = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R (T(r) - T_0) r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta} = \frac{S_e R^2}{8k} \tag{9.2-15}$$

Por lo tanto, el incremento medio de 'temperatura promediado sobre la sección transversal es exactamente la mitad del incremento máximo; naturalmente que $\langle T\rangle - T_0$ es igual que $\langle T - T_0\rangle$.

(iii) ***Flujo de calor en la superficie*** (para la longitud L del' alambre)

$$Q|_{r=R} = 2\pi RL \cdot q_r|_{r=R} = 2\pi RL \cdot \frac{S_e R}{2} = \pi R^2 L \cdot S_e \tag{9.2–16}$$

Este resultado es lógico, ya que en estado estacionario, todo el calor que se produce por disipación eléctrica tiene que perderse a través de la pared.

A lo largo de esta deducción el lector se habrá dado cuenta de que el método le resulta conocido, Al fin y al cabo, existe una gran semejanza entre este problema del alambre caliente y el del flujo viscoso a través de un tubo circular; como puede verse en este cuadro, solamente varía la notación:

	Flujo viscoso en un tubo	Alambre calentado
De la primera integración se obtiene la distribución de	τ_{rz}	q_r
De fa segunda integración se obtiene la distribución de	v_z	$T - T_0$
La condición límite para $r = 0$ es	τ_{rz} = finito	q_r = finito
La condición límite para $r = R$ es	$v_z = 0$	$T - T_0 = 0$
Propiedad de transporte	μ	k
Término que corresponde al manantial	$(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)/L$	S_e
Suposiciones	μ = constante	k, k_e = constantes

Es decir, que si se eligen las magnitudes adecuadas, las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite son idénticas para los dos, problemas; se dice entonces que los das procesos físicos son «análogos». No todos' 'los" problemas de transporte de cantidad de movimiento presentan analogía con los de transporte de energía y transporte de materia. Ahora bien, cuando dichas analogías existen, pueden resultar 'muy titiles para predecir el comportamiento! de los sistemas. Por ejemplo, el lector no tendría dificultad en encontrar, inmediatamente la solución para la conducción del calor en tubos concéntricos por analogía con el flujo viscoso en el mismo sistema.

En la industria eléctrica existen muchísimos ejemplos de problemas de conducción del calor.[1] El conseguir. que los 'incrementos de temperatura en las máquinas eléctricas sean mínimos, da lugar a que' aumente la duración del 'aislamiento. Un ejemplo consiste en refrigerar interiormente, mediante un líquido, los conductores del estator delos alternadores de gran potencia (500 000 kw). Con el fin de ilustrar más ampliamente la naturaleza del calentamiento eléctrico, presentamos dos ejem; plos relativos al aumento de temperatura en alambres: el primero de ellos indica el orden de magnitud del efecto térmico, y el segundo muestra cómo se pueden tener en cuenta las va.iaciones de las conductividad& calorífica y eléctrica.

Ejemplo 9.2-1. Voltaje necesario para producir un determinado aumento de temperatura en un alambre calentado por una corriente eléctrica

Un alambre de cobre tiene 2 mm de radio y 5 m de longitud. ¿ Qué caída de tensión dará lugar a un aumento de temperatura en el eje del alambre de 10° C, si la temperatura de la superficie, externa del mismo es de 20° C?

Solución. Combinando las Ec. 9.2~14 y. 9.2−1, se obtiene

$$T_{\text{máx}} - T_0 = \frac{I^2 R^2}{4 k k_e} \tag{9.2-17}$$

[1] M. JAKOB, *Heat Transfer*, vol. 1, Wiley, Nueva York (1949), capítulo 10, pp. 167-199.

La densidad de corriente está relacionada con la caída de tensión E en la longitud L, mediante la expresión:

$$I = k_e \frac{E}{L} \tag{9.2-18}$$

Por lo tanto

$$T_{máx} - T_0 = \left(\frac{E^2R^2}{4L^2}\right)\left(\frac{k_e}{k}\right) \tag{9.249}$$

de donde

$$E = 2\left(\frac{L}{R}\right)\sqrt{\frac{k}{k_e T_0}}\sqrt{T_0(T_{máx} - T_0)} \tag{9.2-20}$$

Para el cobre, el número de Lorenz[2] k/k_eT_0, es 2,23 x 10^{-8} volt^2 °K^{-2}. Por lo tanto, la diferencia de voltaje necesaria para producir un aumento de temperatura de 10° C es

$$E = 2\left(\frac{5000\text{mm}}{2\text{mm}}\right)\sqrt{2{,}23 \times 10^{-8}}\left(\frac{\text{volt}}{°\text{K}}\right)\sqrt{(293)(10)}\ °\text{K}$$
$$= (5000)\ (1{,}49 \times 10^{-4})\ (54{,}1)$$
$$= 40 \text{ voltios} \tag{9.2-21}$$

Ejemplo 9.2-2. Calentamiento eléctrico de un alambre en el que varian las conductividades calorífica y eléctrica con la temperatura[3]

Hallar la distribución de temperatura en un alambre calentado eltktricamente, si las conductividades calorifica y eléctrica varían con la posición, debido a la variación de temperatura que existe en el interior del metal. Supóngase que k y k_e pueden expresarse en función de la temperatura de esta forma:

$$\frac{k}{k_0} = 1 - \alpha_1\Theta - \alpha_2\Theta^2 - \cdots \tag{9.2-22}$$

$$\frac{k_e}{k_{e0}} = 1 - \beta_1\Theta - \beta_2\Theta^2 - \cdots \tag{9.2-23}$$

en la que k_0 y k_{e0} son los valores de las conductividades a la temperatura T_0, y Θ es un incremento adimensional de temperatura definido por la ecuación $\Theta = (T - T_0)/T_0$. Para intervalos de temperatura no demasiado grandes pueden utilizarse siempre relaciones de este tipo.

Solución. Debido al gradiente de temperatura que existe en el alambre, la conductividad eléctrica es una función de la posición, $k_e(r)$, y por consiguiente, la densidad de corriente será también función de r:

---

2 Para la mutua relación entre k y k_e, véase § 8.5.

3 La solución que se indica aquí ha sido obtenida por el profesor L. J. F. Broer, de la Technische Hogeschool de Delf, Holanda (comunicación privada a RBB fechada el 20 de agosto de 1958).

$$f(r) = k_e(r)\frac{E}{L} \tag{9.2-24}$$

Por lo tanto, el manantial eléctrico de calor S_e varía con la coordenada radial de la siguiente forma :

$$S_e(r) = k_e(r)\frac{E^2}{L^2} \tag{9.2-25}$$

de acuerdo con la Ec. 9.2-1. Si se substituy : este resultado en la Ec. 9.2-6 y se utiliza la ley de Fourier para expresar q_r como $-k(r)dT/dr$, se llega a:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{dT}{dr}\right) = k_e(r)\frac{E^2}{L^2} \tag{9.2-26}$$

Introducimos ahora los siguientes números adimensionales:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_0} = \text{temperatura adiinsional} \tag{9.2-27}$$

$$\xi = \frac{r}{R} = \text{coordenada radial adimensional} \tag{9.2-28}$$

$$B = \frac{k_{e0}R^2E^2}{k_0L^2T_0} = \text{manantial calorífico adimensional} \tag{9.2 -29}$$

Multiplicando la Ec. *9.2-26* por R^2/k_0T_0 se obtiene

$$-\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{k}{k_0}\xi\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = B\frac{k_e}{k_{e0}} \tag{9.2-30}$$

Substituyendo las Ecs. 9.2-22 y 23 en la Ec. 9.2-30, se llega a

$$-\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left((1 - \alpha_1\Theta - \alpha_2\Theta^2 - \cdots)\xi\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = B(1 - \beta_1\Theta - \beta_2\Theta^2 - \cdots) \tag{9.2-31}$$

Ésta es la ecuación que vamos a resolver para obtener la distribución de temperatura adimensional.

Comenzamos observando que si todas las α_i y β_i fuesen cero (es decir, k y k_e constantes), la Ec. 9.2-31 quedaría reducida a:

$$-\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = B \tag{9.2-32}$$

cuya solución, siendo Θ = finito para $\xi = 0$ y $\Theta = 0$ para $\xi = 1$, es

$$\Theta = \frac{B}{4}(1 - \xi^2) \tag{9.2-33}$$

que corresponde exactamente a la Ec. 9.2− 13 en notación adimensional.

Hemos visto que la Ec. 9.2-33 corresponde a la solución de la Ec. 9.2-31 para valores de B pequeños, es decir, para manantiales caloríferos débiles. Para fuentes de calor más intensas, suponemos que la distribución de temperatura puede expresarse mediante una serie potencial de la intensidad reducida del manantial calorífico B:

$$\Theta = \frac{B}{4}(1-\xi^2)(1 + B\Theta_1 + B^2\Theta_2 + \cdots) \qquad (9.2\text{-}34)$$

en la que Θ_n son funciones de ξ pero no de B. Substituyendo la Ec. 9.2—34 en la Ec. 9.2—31, e igualando las mismas potencias de B, se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales que permiten hallar $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ utilizandò las condiciones límite de que Θ_i = finito 'para $\xi = 0$ y $\Theta_i = 0$ para $\xi = 1$. De esta forma se obtiene

$$\Theta = \frac{B}{4}(1-\xi^2)\left[1 + B\left(\frac{\alpha_1}{8}(1-\xi^2) - \frac{\beta_1}{16}(3-\xi^2)\right) + O(B^2)\right] \qquad (9.2\text{-}35)$$

en la que $O(B^2)$ quiere decir «términos de orden B^2 y superiores».

Para los materiales que siguen la ley de Wiedemanri-Franz-Lqrenz (véase § 8.5), la relación k/k_eT es constante (independiente de la temperatura), y por lo tanto

$$\frac{k}{k_eT} = \frac{k_0}{k_{e0}T_0} \qquad (9.2\text{-}36)$$

Combinando esta ecuación con las 9.2-22 y 23, se obtiene"'

$$(1 - \alpha_1\Theta - \alpha_2\Theta^2 - \cdots) = (1 - \beta_1\Theta - \beta_2\Theta^2 - \cdots)(1 + \Theta) \qquad (9.2\text{-}37)$$

Igualando las mismas potencias de Θ se' obtienen. relaciones entre α_i y β_i:

$$\alpha_1 = \beta_1 - 1 \qquad (9.2\text{-}38)$$

$$\alpha_2 = \beta_2 + \beta_1 \qquad (9.2\text{-}39)$$

Estas relaciones pueden substituirse en la Ec. 9.2-35, con' lo que queda reducida a

$$\Theta = \frac{B}{4}(1-\xi^2)\left[1 - \frac{B}{16}\left((\beta_1 + 2) + 6\% - 2)\xi^2\right) + O(B^2)\right] \qquad (9.2\text{-}40)$$

§ 9.3 CONDUCCIÓN DEL CALOR CON UN MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN NUCLEAR

Consideremos un elemento: combustible nuclear de forma esférica, tal como se indica en la Fig. 9.3— 1. El sistema consta de una esfera de material fisionable, de radio $R^{F)}$, «revestida» con una vaina esférica de aluminio, cuyo radio externo es $R^{(C)}$. En el interior del material fisionable se producen fragmentos de fisión que poseen energías cinéticas elevadas. La principal fuente de energía calorífica en el reac-

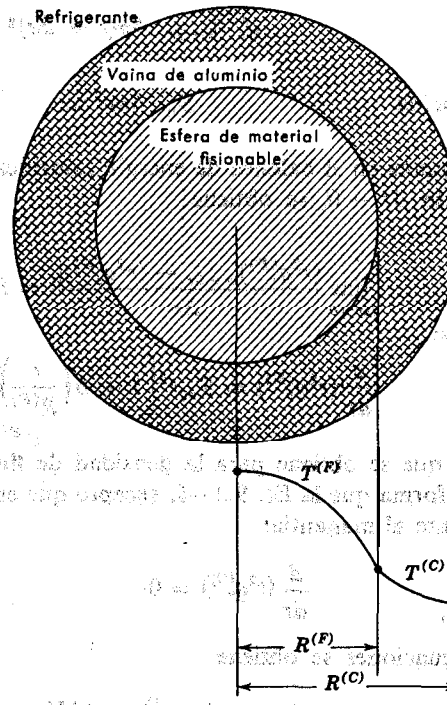


Fig. 9.3—1. Distribución de temperatura en un montaje esférico de un combustible nuclear.

tor se debe a las colisiones entre estos fragmentos y los átomos del material fisionable. Este manantial volumétrico de energía calorífica que resulta de la fisión nuclear, lo vamos a llamar S_n (cal cm^{-3} seg^{-1}). Dicho manantial no será uniforme en el interior de la esfera del material fisionable, sino mínimo en: el centro de la misma. Para los fines de este problema supondremos que el manantial puede representarse aproximadamente mediante una función parabólica sencilla:

$$S_n = S_{n0}\left[1 - b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right] \qquad (9.34$$

En esta ecuación, S_{n0} es la velocidad volumétrica de producción de calor en el centro de la esfera, y b es una constante adimensional comprendida entre 0 y 1.

Comenzamos efectuando un balance de energía calorífica sobre una envoltura esférica de espesor Δr situada en el interior de la esfera del material fisionable:

entrada de energía calorífica por r $\qquad q_r^{(F)}|_r \cdot 4\pi r^2 \qquad$ **(9.3—2)**

salida de energla calorífica por $r + \Delta r$ $$q_r^{(F)}|_{r+\Delta r} \cdot 4\pi(r + \Delta r)^2 \quad (9.3\text{-}3)$$

energla calorífica producida $$S_n \cdot 4\pi r^2 \Delta r \quad (9.3\text{-}4)$$

Substituyendo estos términos en el balance de energía calorífica de la Ec. 9.1— 1, y pasando al límite cuando $\Delta r \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{(r^2 q_r^{(F)})|_{r+\Delta r} - (r^2 q_r^{(F)})|_r}{\Delta r} = S_n r^2 \quad (9.3\text{-}5)$$

de donde se deduce que

$$\frac{d}{dr}(r^2 q_r^{(F)}) = S_{n0} r^2 \left[1 + b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right] \quad (9.3\text{–}6)$$

La ecuación diferencial que se obtiene para la densidad de flujo de calor $q_r^{(C)}$ en la vaina es de la misma forma que la Ec. 9.3-6, excepto que en este caso no existe el término correspondiente al manantial

$$\frac{d}{dr}(r^2 q_r^{(C)}) = 0 \quad (9.3\text{-}7)$$

Integrando estas dos ecuaciones se obtiene

$$q_r^{(F)} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right) + \frac{C_1^{(F)}}{r^2} \quad (9.3\text{–}8)$$

$$q_r^{(C)} = \frac{C_1^{(C)}}{r^2} \quad (9.3\text{–}9)$$

en las que $C_1^{(F)}$ y $C_1^{(C)}$ son constantes de integración, que se evalúan mediite las condiciones límite

C.L. 1: para $r = 0$, $q_r^{(F)}$ no es infinito (9.3— 10)

C.L. 2: *para* $r = R^{(F)}$, $q_r^{(F)}, = q_r^{(C)}$, (9.3-11)

Una ve: evaluadas las constantes se llega a:

$$q_r^{(F)} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right) \quad (9.212)$$

$$q_r^{(C)} = S_{n0} R^{(F)3}\left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2} \quad (9.3\text{-}13)$$

Estas ecuaciones expresan las distribuciones de densidad de flujo de calor en la esfera fisionable y en la vaina esférica de revestimiento.

Si se substituye en estas distribuciones la ley de Fourier de la **conducción** del calor :

$$-k^{(F)}\frac{dT^{(F)}}{dr} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} - \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right) \tag{9.3-14}$$

$$-k^{(C)}\frac{dT^{(C)}}{dr} = S_{n0}R^{(F)3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2} \tag{9.3-15}$$

Estas ecuaciones pueden integrarse tomando $k^{(C)}$ y $k^{(F)}$ constantes:

$$T^{(F)} = -\frac{S_{n0}}{k^{(F)}}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^4}{20}\right) + C_2^{(F)} \tag{9.346}$$

$$T^{(C)} = +\frac{S_{n0}}{k^{(C)}}R^{(F)3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r} + C_2^{(C)} \tag{9.347}$$

Las constantes de integración $C_2^{(F)}$ y $C_2^{(C)}$ se determinan a partir de las siguientes condiciones límite :

C.L. 3: para $r = R^{(F)}$ $T^{(F)} = T^{(C)}$ **(9.3—18)**

C.L. 4: para r = $R^{(C)}$ $T^{(C)} = T_0$ **(9.3—19)**

siendo T_0 la temperatura conocida de la superficie externa del revestimiento. Las expresiones finales para los **perfiles** de temperatura son:

$$T^{(F)} - T_0 = \frac{S_{n0}R^{(F)2}}{6k^{(F)}}\left\{\left[1 - \left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right] - \frac{3}{10}b\left[1 - \left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^4\right]\right\} + \frac{S_{n0}R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1 - \frac{3}{5}b\right)\left(1 - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right) \tag{9.3-20}$$

$$T^{(C)} - T_0 = \frac{S_{n0}R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1 - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{R^{(F)}}{r} - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right) \tag{9.3-21}$$

La temperatura máxima en la esfera del material fisionable puede hallarse fácilmente haciendo $r = 0$ en la **Ec. 9.3—20.** Este valor es conveniente conocerlo con el fin de poder estimar el deterioro estructural.

§ 9.4 CONDUCCIÓN DEL CALOR CON UN MANANTIAL CALORÍFICO DE ORIGEN VISCOSO

Consideremos el flujo de un fluido newtoniano incompresible a través del espacio comprendido entre dos cilindros coaxiales, tal como se indica en la Fig. 9.4—1. Al girar el cilindro exterior, las capas cilíndrica,! de fluido rozan con las capas de fluido adyacente, dando lugar a una producción de calor. Es decir, que la energía mecánica se degrada invariablemente a energía calorífica. El manantial de calor por unidad de volumen que resulta de esta «disipación viscosa)), lo designaremós por S_v. Esta magnitud depende del gradiente, local de velocidad; cuanto más rápidamente se mueva una capa de fluido respecto de otra adyacente, mayor será el calentamiento producido por disipación viscosa. Las superficies interna' y externa del fluido se mantienen, respectivamente, a las temperaturas $T = T_0$ y $T = T_b$. Evidentemente, T será una función exclusiva de r.

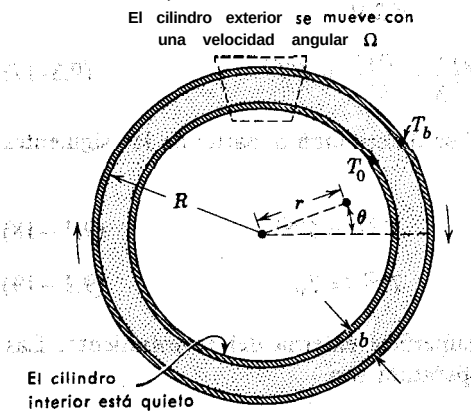


Fig. 9.4-1. Flujo entre dos cilindros con generación de calor de origen viscoso. El fluido comprendido entre las líneas de trazos se presenta en forma idealizada en la Fig. 9.4-2.

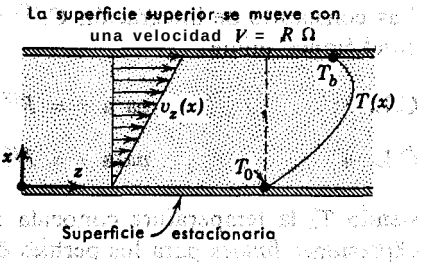


Fig. 9.4-2. Idealización de una parte del sistema de flujo de la Fig. 9.4-1, en' el que se ha despreciado la curvatura de las superficies cilíndricas.

Si el espesor b de la rendija es pequeño comparado con el radio R del cilindro exterior, el problema puede resolverse aproximadamente utilizando el sistema un tdnto-simplificado que se indica en la Fig. 9.4-2'; es decir, despreciar los efectos de la curvatura y resolver cl problema en coordenadas cartesianas.[1] En este caso, el manantial calorífico de origen viscoso viene dado por

$$S_v = -\tau_{xz}\left(\frac{dv_z}{dx}\right) = \mu\left(\frac{dv_z}{dx}\right)^2 \qquad (9.4\text{-}1)$$

[1] 'En los problemas 2.F y 2.P hemos visto como un anillo circular se comporta de igual forma que una rendija plana en el caso límite de que la separación entre los cilindros tienda hacia cero. El problema que estamos considerando se resuelve én coordenadas cilíndricas en el ejemplo 10.5 — 1.

Pedimos al lector que acepte ahora esta expresión; la ecuación general para el calor de disipación viscosa se estudia, en el Capítulo 10. El perfil de velocidad para el flujo laminar estacionario de un fluido de viscosidad constante en una rendija; de acuerdo con. la. Ec. 9.4—2, es lineal:

$$v_z = \left(\frac{x}{b}\right) V \tag{9.4-2}$$

de forma que la velocidad de producción de calor de origen viscoso por unidad de volumen,, es

$$S_v = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 \tag{9.4-3}$$

Ahora estamos en condiciones; de introducir esta magnitud en un balance de energía. Un. balance de energía calorífica aplicado, a una envoltura de espesor Δx, anchura, W, y longitud L, en estado estacionario, conduce a

$$WLq_x|_x - WLq_x|_{x+\Delta x} + WL\,\Delta x\mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 = 0 \tag{9.4-4}$$

Obsérvese que la «entrada» y «salida» se toman en la dirección x positiva, a pesar de que en este problema el calor fluye en la dirección x negativa en parte del sistema. Dividiendo por $WL\Delta x$ y tomando $\Delta x \to 0$, se obtiene :

$$\frac{dq_x}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 \tag{9.4-5}$$

que puede integrarse considerando μ constante, para obtener

$$q_x = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1 \tag{9.4-6}$$

Como no conocemos la densidad de flujo de calor para ningún valor de, x, no podemos determinar. Cr: Introduciendo la ley. de, Fourier en la Ec. 9.4—6, se tiene

$$-k\frac{dT}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1 \tag{9.4-7}$$

en la que k es la conductividad calorífica del fluido. Integrando la' Ec. 9.4—7 con respecto a x (para k constante), se obtiene

$$T = -\left(\frac{\mu}{k}\right)\left(\frac{V}{b}\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{k} x + C_2 \tag{9.4-8}$$

Las constantes. de integración C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones límité:

C.L. 1 : para x = 0 $T = T_0$ *(9.4-9)*

C.L. 2: para $x = l$ $T = T_b$ (9.4 — 10)

Substituyendo los valores de las constantes en la **Ec.** 9.4-8, se obtiene

$$\boxed{\frac{T - T_0}{T_b - T_0} = \left(\frac{x}{b}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Br}\left(\frac{x}{b}\right)\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)\right]} \qquad \textbf{(9.4-11)}$$

En esta expresión $\mathrm{Br} = [\mu V^2/k(T_b - T_0)]$ es el «número de **Brinkman**» que es una medida de la importancia del calentamiento **viscoso**[2] con relación al flujo de calor que resulta de la diferencia de temperatura comunicada $(T_b - T_0)$. Si $B_r > 2$, existe , una temperatura máxima en un punto comprendido entre las dos paredes.

ER ***la mayor parte*** de los casos, el calentamiento viscoso no tiene importancia. Existen, sin embargo, varios problemas en ingeniería para los que el efecto del calentamiento viscoso es importante, cuando tienen lugar grandes cambios de velocidad en distancias muy cortas: ***(a)*** flujo de una substancia lubrificante entre partes móviles animadas de gran velocidad, ***(b)*** flujo de plásticos a través de boquillas en la extrusión-a alta velocidad, y (c) flujo de aire en la capa limite inmediata a la **superficie** de un satélite terrestre o cohete (el problema de reentrada). Los dos primeros casos presentan además una complicación adicional debido a que muchos lubrificantes y plásticos fundidos son no-newtonianos. Un ejemplo de flujo no-newtoniano con generación de calor se estudia en el problema 9.K; en el problema 9.0 se presenta otro ejemplo de este mismo tipo, teniendo en cuenta además que la viscosidad y la conductividad calorífica varían con la temperatura.

§ 9.5 CONDUCCIÓN DEL CALOR CON MANANTIAL **CALORÍFICO** DE ORIGEN **QUÍ** MICO

Una **reacción química** se realiza en un reactor de flujo de lecho fijo, tal como se indica en la Fig. 9.5-1. El reactor se extiende- desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$ y esta dividido en tres zonas. La zona de reacción ($0 < z < L$) esta rellena de pequeñas esferas **catalíticas,** y las zonas de entrada y salida están también rellenas **con** esferas físicamente iguales a las anteriores pero no catalíticas. Se desprecian **los** gradientes. de velocidad radial (es decir, que se supone «flujo de tapón»). Por otra parte, la pared del reactor esta bien aisla&, de forma que la temperatura puede considerarse prácticamente independiente de ***r.*** Se desea conocer la distribución axial de temperatura en estado estacionario $T(z)$ cuando el fluido entra por $z = -\infty$ con una temperatura uniforme T_1 y velocidad **superficial** $v_1 = w/(\pi R^2 \rho_1)$. (Véase § *6.4.*)

***El profesor H. C. Brinkman resolvió el problema del flujo en un tubo circular con efectos caloríficos de origen viscoso. [*Appl. Sci. Research,* AZ, 120-124 (1951)]; véase § 11.2.**

Este tipo de problemas pueden resolverse suponiendo que la conducción axial del calor sigue la ley de Fourier, tomando una «conductividad calorífica efectiva» para el lecho de relleno. Las conductividades efectivas radial y axial de los lechos de relleno, $k_{r,ef}$ y $k_{z,ef}$, han sido muy estudiadas debido a su importancia en la teoría de los reactores catalíticos. En general, $k_{z,ef}$ y $k_{r,ef}$ tienen valores muy diferentes.

En una reacción química se produce o consume energía calorífica debido a la reordenación de los átomos de las moléculas reaccionnntes para dar lugar a los productos de reacción. La velocidad de producción de energía calorífica por unidad de volumen en las reacciones químicas, S_c, es, generalmente, una función compleja de la presión, temperatura, composición y actividad del catalizador. Para simplificar consideramos aquí a S_c como una función exclusiva de la temperatura, y suponemos que varía linealmente con esta variable:

$$S_c = S_{c1}\left(\frac{T - T^\circ}{T_1 - T^\circ}\right) \tag{9.54}$$

En esta expresión, T es la temperatura local del fecho catalítico (supuesta igual para el catalizador y el fluido[1]), y S_{c1} y T° son constantes empíricas para unas determinadas condiciones de entrada al reactor. Utilizando métodos de cálculo adecuados se pueden obtener expresiones más realistas para S_c.

Para el balance de envoltura elegimos un disco de radio R y espesor, Δz situado en la zona catalítica (véase Fig. 9.5—1), de forma que Δz sea mucho mayor que las dimensiones de las partículas del catalizador.

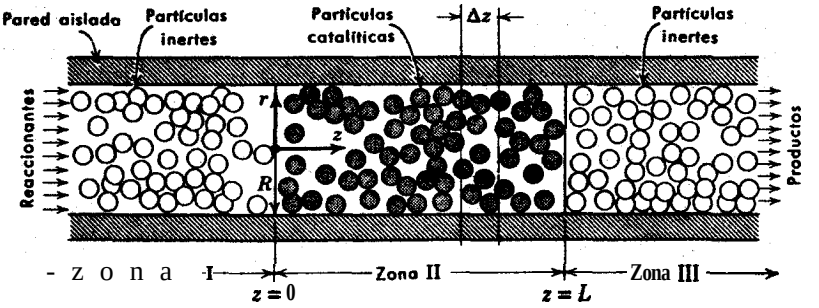


Fig. 9.5—1. Reactor de lecho fijo con flujo axial. Los reaccionantes entran por $z = -\infty$ y los productos salen por $z = +\infty$. La zona de reacción se extiende desde z = 0 hasta z = L.

De acuerdo con esto, el balance de energía calorífica en estado estacionario contiene los siguientes términos :

[1] La diferencia de temperatura entre el catalizador y el fluido no es siempre despreciable. (Véanse problemas 21, I, J.)

entrada por z de energía calorífica por conducción $\pi R^2 q_z|_z$ (9.5-2)

salida por z + Δz de energía calorífica por conducción $\pi R^2 q_z|_{z+\Delta z}$ (9.5-3)

entrada por z de energía calorífica debida al flujo $\pi R^2 \rho_1 v_1 \hat{C}_p (T - T_0)|_z$ (9.5-4)

salida por z + Δz de energía calorífica debida al flujo $\pi R^2 \rho_1 v_1 \hat{C}_p (T - T_0)|_{z+\Delta z}$ (9.5-5)

Energía calorífica producida $(\pi R^2 \Delta z) S_c$ (9.5-6)

Se ha supuesto que $\hat{C}_p$ permanece constante para la mezcla reaccionante, y la velocidad másica de flujo $\pi R^2 \rho_1 v_1$ se ha expresado en función de las condiciones de entrada. Obsérvese que la energía calorífica del fluido que circula está expresada con relación a una temperatura de referencia Te. Es preciso elegir dicha temperatura de referencia, ya que el contenido energético no puede expresarse de forma absoluta sino relativa.

Substituyendo estos términos en la Ec. 9.1— 1 y dividiendo por $\pi R^2 \Delta z$, se obtiene

$$\frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\Delta z} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{T|_{z+\Delta z} - T|_z}{\Delta z} = S_c \tag{9.5-7}$$

Ahora tomamos límites en la Ec. 9.5-7 cuando $\Delta z \to 0$. Estrictamente hablando, esta operación no es «lícita» puesto que no se opera con un medio continuo. Sin embargo, efectuamos este proceso de límites sabiendo que las ecuaciones que resultan no describen valores puntuales sino valores medios de q_z, T y S_c, para todo el flujo a través de las secciones de z constante. La expresión que se obtiene es

$$\frac{dq_z}{dz} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT}{dz} = S_c \tag{9.54}$$

Ahora se substituye la ley de Fourier en la Ec. 9.5-8, operando una vez más con el sistema como si fuese continuo. Suponiendo que la conductividad efectiva axial $k_{z,\text{ef}}$ es constante, se tiene

$$-k_{z,\text{ef}} \frac{d^2T}{dz^2} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT}{dz} = S_c \tag{9.5-9}$$

La Ec. 9.5-9 también es válida para las zonas I y III si se toma S_c igual a cero. Las ecuaciones diferenciales que resultan para la distribución de temperatura en las tres zonas de la Fig. 9.5-1, son

Zona I (z < 0): $$-k_{z,\text{ef}} \frac{d^2T^{\text{I}}}{dz^2} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT^{\text{I}}}{dz} = 0 \tag{9.5—10}$$

Zona II $(0 < z < L)$: . .

$$-k_{z,\text{ef}} \frac{d^2T^{\text{III}}}{dz^2} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT^{\text{III}}}{dz} = 0 \qquad (9.5\text{-}11)$$

Zona III $(z > L)$

$$-k_{z,\text{ef}} \frac{d^2T^{\text{II}}}{dz^2} + \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT^{\text{II}}}{dz} = S_{c1}\left(\frac{T^{\text{II}} - T^\circ}{T_1 - T^\circ}\right) \qquad (9.5-12)$$

Como se ve, hemos utilizado el mismo valor de $k_{z,\,ef}$ para las tres zonas. Estas tres ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden resolverse utilizando las seis condiciones límite siguientes :

para z = $-\infty$, $T^{\text{I}} = T_1$ (9.5—13)

para z = 0, $T^{\text{I}} = T^{\text{II}}$ (9.5—14)

para z = 0. $k_{z,\text{ef}} \frac{dT^{\text{I}}}{dz} = k_{z,\text{ef}} \frac{dT^{\text{II}}}{dz}$ (9.5—15)

para z = L, $T^{\text{II}} = T^{\text{III}}$ (9.5—16)

para z = L, $k_{z,\text{ef}} \frac{dT^{\text{II}}}{dz} = k_{z,\text{ef}} \frac{dT^{\text{III}}}{dz}$ (9.5—17)

para z = ∞, $T^{\text{III}} =$ finita (9.5-18)

Las Ecs. 9.5-14 a 17 expresan la continuidad de la temperatura y de la densidad de flujo de calor entre las zonas, y la Ec. 9.5-18 se basa en principios físicos.

La solución se facilita introduciendo las siguientes variables adimensionales :

$$Z = \frac{z}{L} \qquad (9.5\text{-}19)$$

$$\Theta = \frac{T - T^\circ}{T_1 - T^\circ} \qquad (9.5\text{-}20)$$

$$B = \frac{\rho_1 v_1 \hat{C}_v L}{k_{z,\text{ef}}} \qquad (9.5\text{-}21)$$

$$N = \frac{S_{c1} L}{\rho_1 v_1 \hat{C}_p (T_1 - T^\circ)} \qquad (9.5\text{-}22)$$

De esta forma, las ecuaciones diferenciales 9.5-10, 11 y 12 se transforman en

$$-\frac{1}{B}\frac{d^2\Theta^{\text{I}}}{dZ^2} + \frac{d\Theta^{\text{I}}}{dZ} = 0 \qquad (9.5\text{-}23)$$

$$-\frac{1}{B}\frac{d^2\Theta^{\text{II}}}{dZ^2} + \frac{d\Theta^{\text{II}}}{dZ} = N\Theta^{\text{II}} \qquad (9.5\text{-}24)$$

$$-\frac{1}{B}\frac{d^2\Theta^{\text{III}}}{dZ^2} + \frac{d\Theta^{\text{III}}}{dZ} = 0 \qquad (9.5\text{-}25)$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son

$$\Theta^{I} = c_1 + c_2 e^{BZ} \tag{9.5-26}$$

$$\Theta^{II} = c_3 e^{m_3 Z} + c_4 e^{m_4 Z} \quad (\text{para } m_3 \neq m_4) \tag{9.5-27}$$

$$\Theta^{III} = c_5 + c_6 e^{BZ} \tag{9.5-28}$$

en las que

$$m_3 = \tfrac{1}{2}B(1 - \sqrt{1 - (4N/B)}) \tag{9.5-29}$$

$$m_4 = \tfrac{1}{2}B(1 + \sqrt{1 - (4N/B)}) \tag{9.5-30}$$

Aplicando la condición limite de la Ec. 9.5-18 se obtiene $c_6 = 0$; por lo tanto, la temperatura en la zona III es constante. De la Ec. 9.5-13 se deduce que c_1 es la unidad. Al aplicar las cuatro condiciones límite restantes se obtienen los siguientes resultados para el perfil de temperatura en las tres zonas (cuando $1 - (4N/B) > 0$):

$$\Theta^{I} = 1 + \left(\frac{m_3 m_4 (e^{m_4} - e^{m_3})}{m_4^2 e^{m_4} - m_3^2 e^{m_3}}\right) e^{(m_3 + m_4)Z} \tag{9.5-31}$$

$$\Theta^{II} = \left(\frac{m_4 e^{m_4} e^{m_3 Z} - m_3 e^{m_3} e^{m_4 Z}}{m_4^2 e^{m_4} - m_3^2 e^{m_3}}\right)(m_3 + m_4) \tag{9.5-32}$$

$$\Theta^{III} = \left(\frac{m_4^2 - m_3^2}{m_4^2 e^{m_4} - m_3^2 e^{m_3}}\right) e^{m_3 + m_4} \tag{9.5-33}$$

En la Fig. 9.5-2 se indican algunos perfiles de temperatura basados en estas ecuaciones. Obsérvese que la mezcla reaccionante puede precalentarse o enfriarse apreciablemente por conducción axial antes de entrar en la zona de reacción; este efecto merece una atención cuidadosa en la interpretación de las experiencias catalíticas. Obsérvese también que la pendiente del perfil de temperatura tiende siempre hacia cero a la salida del lecho catalítico, de acuerdo con las Ec. 9.5-17 y 33.

Deberá tenerse en cuenta que la Ec. 9.5-1 es solamente aceptable cuando la variación de composición es pequeña. Este caso se da en reactores cortos, para velocidades de flujo elevadas, o para reacciones lentas; es decir, cuando N es pequeño. En el tratamiento anterior se ha supuesto que el sistema reaccionante alcanza un estado estacionario, siempre que se parta de unas adecuadas condiciones iniciales. Esta suposición puede comprobarse solamente por experiencia, o bien analizando las condiciones correspondientes a las Ecs. 9.5-23, 24 y 25 para el estado no estacionario. Para el sistema que estamos considerando, no se alcanza el régimen estacionario para valores muy grandes de N/B, debido a que la velocidad

de flujo es insuficiente para contrarrestar la velocidad' de generación de calor en la zona II y el precalentamiento de las substancias reaccionantes en la zona 1.

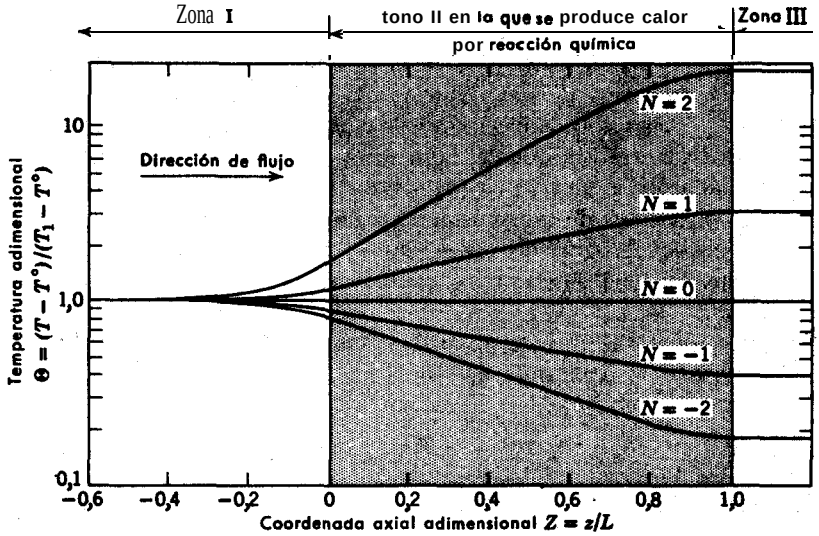


Fig. 9.5-2. Perfiles de temperatura previstos para un reactor de lecho fijo con flujo axial, para $B = 8$ y diversos valores de N.

§ 9.6 CONDUCCIÓN DEL CALOR A TRAVÉS DE PAREDES COMPUESTAS: SUMA DE RESISTENCIAS

En los problemas industriales de transmisión de calor se opera frecuentemente con conducción a través de paredes constituidas por capas de varios materiales,

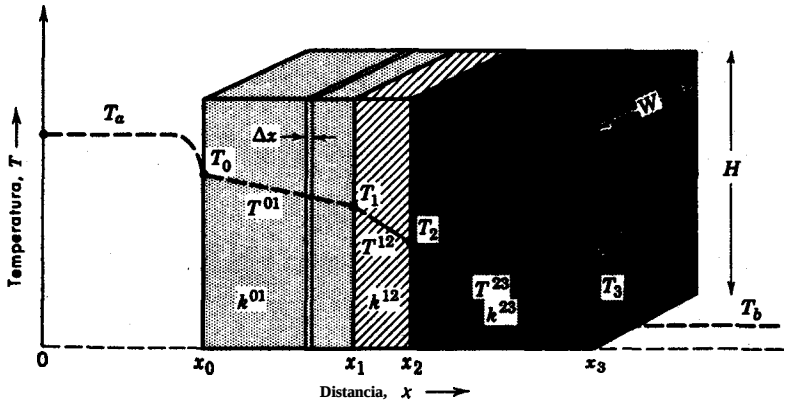


Fig. 9.6-1. Conducción de calor a través de una pared compuesta situada entre dos corrientes de fluidos a temperaturas T_a y T_b.

cada uno. de los cuales tiene su propia y característica conductividad calorífica. En esta sección vamos a estudiar cómo se combinan las distintas resistencias de conducción de calor para dar lugar a una resistencia total.

En la Fig. 9.6— 1 se presenta una pared compuesta formada por tres materiales de distinto espesor, $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ y $x_3 - x_2$, y diferentes conductividades caloríficas k^{01}, k^{12} y k^{23}. Para $x = x_0$ la substancia «01» está en contacto con un fluido a la temperatura T_a, y para $x = x_3$ la substancia «23» está en contacto con un fluido a la temperatura T_b. La transmisión del calor en las superficies extremas, para $x = x_0$ y $x = 3$, viene dada por la «ley de enfriamiento» de Newton, siendo h_0 y h_3 los correspondientes coeficientes de transmisión de calor. En la Fig. 9.6-1 se ha representado gráficamente el perfil de temperatura; antes de comenzar el problema puede hacerse un esquema de este tipo, que generalmente resulta muy útil para su interpretación.

Deduciremos primeramente la ecuación diferencial para la conducción del calor en la región «01». Aplicando un balance a la lámina de volumen $WH\Delta x$, se obtiene

$$q_x^{01}|_x WH - q_x^{01}|_{x+\Delta x} WH = 0 \tag{9.61}$$

Dividiendo por $WH\Delta x$ y tomando el límite cuando Δx tiende hacia cero,

$$\frac{dq_x^{01}}{dx} = 0 \tag{9.6-2}$$

La integración de esta ecuación conduce a

$$q_x^{01} = 40 \quad \text{(una constante)} \tag{9.6-3}$$

La constante q_0 es la densidad de flujo de calor en el plano $x = x_0$. Como en *el estado estacionario* la densidad de flujo de calor ha de ser la misma en las tres regiones :

$$q_x^{01} = q_x^{12} = q_x^{23} = 40 \tag{9.6-4}$$

Sabemos también que

$$q_x^{01} = -k^{01} \frac{dT^{01}}{dx} \tag{9.6-5}$$

con ecuaciones análogas para q_x^{12} y q_x^{23}. Combinando estas relaciones con la Ec. 9.6-4, se obtiene

$$-k^{01} \frac{dT^{01}}{dx} = q_0 \tag{9.6-6}$$

$$-k^{12} \frac{dT^{12}}{dx} = q_0 \tag{9.6-7}$$

$$-k^{23}\frac{dT^{23}}{dx} = q_0 \qquad \textbf{(9.6–8)}$$

'La integración de estas ecuaciones, siendo k^{01}, k^{12} y k^{23} constantes, conduce a

$$T_0 - T_1 = -q_0\left(\frac{x_0 - x_1}{k^{01}}\right) \qquad (9.6\text{-}9)$$

$$T_1 - T_2 = -q_0\left(\frac{x_1 - x_2}{k^{12}}\right) \qquad \textbf{(9.6–10)}$$

$$T_2 - T_3 = -q_0\left(\frac{x_2 - x_3}{k^{23}}\right) \qquad (9.6\text{-}11)$$

Por otra parte, sabemos que la transmisión de calor en las superficies viene dada por

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0} \qquad \textit{(9.612)}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3} \qquad (9.613)$$

Sumando estas cinco ecuaciones, se obtiene

$$T_a - T_b = q_0\left(\frac{1}{h_a} + \frac{x_1 - x_0}{k^{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k^{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k^{23}} + \frac{1}{h_3}\right) \qquad (9.6\text{-}14)$$

o bien

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i - x_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{h_3}\right)} \qquad (9.615)$$

A veces este resultado se escribe en una forma análoga a la ley de enfriamiento de Newton

$$q_0 = U(T_a - T_b) \quad \text{o} \quad Q_0 = U(WH)(T_a - T_b) \qquad (9.616)$$

siendo U el llamado «coeficiente global de transmisión de calor», que viene dado por

$$U = \left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i - x_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{h_3}\right)^{-1} \qquad (9.617)$$

Evidentemente, este resultado puede generalizarse para incluir más capas en la pared compuesta, reemplazando el límite superior «3» del sumatorio por un número entero «n», que representa el número de capas de que consta la pared, y análogamente, reemplazando h_3 por h_n. La Ec. 9.6— 15 resulta útil para calcular la velocidad de transmisión de calor a través de una pared compuesta que separa dos corrientes

fluidas cuando se conocen las conductividades caloríficas y los coeficientes de transmisión de calor. La forma de calcular estos coeficientes de transmisión se trata en un capítulo posterior.

Es preciso hacer una observación con respecto a las deducciones anteriores. Se ha supuesto tácitamente que las distintas capas están íntimamente unidas entre sí, de forma que no hay entre ellas «cámaras de aire». Naturalmente que si las capas se tocan entre sí sólo en algunos puntos, la resistencia a la transmisión de calor aumentará considerablemente.

Ejemplo 9.6-1. Paredes cilíndricas compuestas

Efectuar un desarrollo análogo al anterior, para el caso de una pared cilíndrica compuesta, tal como se indica en la Fig. 9.6-2.

Solución. Un balance de energía calorífica aplicado a una envoltura de volumen $2\pi rL\,\Delta r$ situada en la región «01», da

$$q_r^{01}\big|_r \cdot 2\pi rL - q_r^{01}\big|_{r+\Delta r} \cdot 2\pi(r+\Delta r)L = 0 \qquad (9.6\text{–}18)$$

Dividiendo por $2\pi L\,\Delta r$ y tomando el límite cuando $\Delta r \to 0$, se obtiene

$$\frac{d}{dr}(rq_r^{01}) = 0 \qquad (9.6\text{–}19)$$

La integración de esta ecuación para k^{01}, k^{12} y k^{23} constantes, conduce a

$$rq_r^{01} = r_0 q_0 \qquad \text{(una constante)} \qquad (9.620)$$

en la que r_0 es el radio interior de la región «01», y q_0 es la densidad de flujo de calor en ella. Por lo tanto, para el estado estacionario podemos escribir las ecuaciones análogas a las Ecs. 9.6-6, 7 y 8,

$$-k^{01}r\frac{dT^{01}}{dr} = r_0 q_0 \qquad (9.6\text{-}21)$$

$$-k^{12}r\frac{dT^{12}}{dr} = r_0 q_0 \qquad (9.6\text{-}22)$$

$$-k^{23}r\frac{dT^{23}}{dr} = r_0 q_0 \qquad (9.6\text{-}23)$$

Integrando estas ecuaciones para k^{01}, k^{12} y k^{23} constantes:

$$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \left(\frac{\ln r_1/r_0}{k^{01}}\right) \qquad (9.6\text{-}24)$$

$$T_1 - T_2 = r_0 q_0 \left(\frac{\ln r_2/r_1}{k^{12}}\right) \qquad (9.6\text{–}25)$$

$$T_2 - T_3 = r_0 q_0 \left(\frac{\ln r_3/r_2}{k^{23}}\right) \qquad (9.6\text{-}26)$$

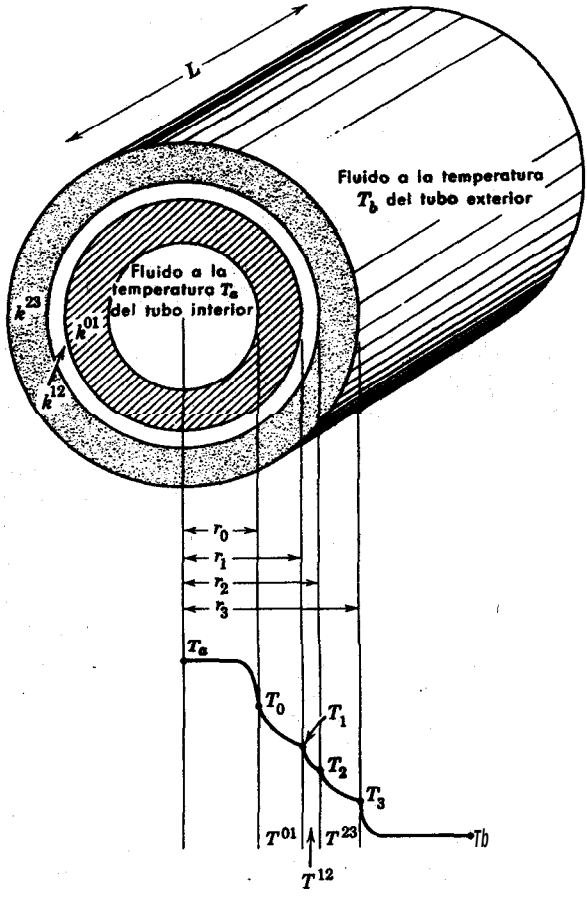


Fig. 9.6-2. **Conducción** de calor a **través** de una pared **cilíndrica compuesta,** siendo T_a *la* temperatura del fluido interior y T_b **la** del exterior.

Sabemos que en las dos interfases Mido-fluido se cumple

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0} \tag{9.6-27}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_3}{h_3} = \frac{q_0}{h_3}\frac{r_0}{r_3} \tag{9.6-28}$$

Sumando estas cinco ecuaciones se puede obtener la siguiente expresión para q_0 en función de $T_a - T_b$

$$Po = 2\pi L r_0 q_0 = \frac{2\pi L(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln r_1/r_0}{k^{01}} + \frac{\ln r_2/r_1}{k^{12}} + \frac{\ln r_3/r_2}{k^{23}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)} \qquad (9.6\text{-}29)$$

Definimos ahora un «coeficiente global de transmisión de calor basado en la superficie interna» U_0:

$$Qo = U_0(2\pi r_0 L)(T_a - T_b) \qquad (9.6\text{-}30)$$

Combinando las Ecs. 9.6-29 y 9.6-30, se obtiene

$$U_0 = r_0^{-1}\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\ln r_i/r_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)^{-1} \qquad (9.6\text{-}31)$$

El subíndice «0» que se ha puesto *en* U_0 indica que el coeficiente **'global** de transmisión **de calor está referido al radio** *ro.* **Este resultado puede generalizarse para un tubo cilíndrico constituido por** *n* **láminas, substituyendo «3» por «n» las tres veces que aparece en la Ec. 9.6-31.**

§ 9.7 CONDUCCIÓN DE CALOR EN UNA ALETA DE ENFRIAMIENTO[1]

Otra aplicación sencilla, pero práctica, de la conducción del calor es el calculo de la eficacia de una aleta de enfriamiento. Estas aletas se utilizan para aumentar la superficie disponible para la transmisión de calor entre paredes metálicas y fluidos que son muy malos conductores, tales como gases. En la Fig. 9.7-1 se indica un esquema de una aleta rectangular sencilla.

Puede obtenerse una descripción aceptable del sistema substituyendo la verdadera situación física por un modelo aproximado:

Caso real	*Modelo*
1. *T* es función de *z* y x pero la influencia de *z* es más importante.	1. *T* es sólo función de *z*.
2. Por el extremo de la aleta (área *2BW*) y los bordes (área *2BL* + *2BL)* se pierde una pequeña cantidad de calor.	2. No hay pérdida de calor por el extremo y los bordes.
3. El coeficiente de transmisión de calor es función de la posición	3. La densidad de flujo de calor en la superficie viene dada por $q = h(T - T_a)$, en la que h es constante y $T = T(z)$.

Aplicando un balance de energía a un segmento Δz de la aleta,

$$q_z|_z \cdot 2BW - q_z|_{z+\Delta z} \cdot 2BW - h(2W\,\Delta z)(T - T_a) = 0 \qquad (9.7\text{-}1)$$

[1] **Para un tratamiento más amplio de aletas véase, por ejemplo, M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1949), vol. 1, capítulo 11; véase también E. R. G. ECKERT y R. M. DRAKE junior, *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, Nueva York (1959), segunda edición, capítulo 3.**

Dividiendo *por* $2BW\Delta z$ y pasando al límite cuando Az tiende a cero,

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B}(T - T_a) \tag{9.7-2}$$

Introduciendo la ley de Fourier $(q_z = -kdT/dz)$, siendo k la conductividad calorífica del metal, que se considera constante, se obtiene

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a) \tag{9.7-3}$$

Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones límite:

C.L. 1 : para $z = 0$. $T = T_w$ ***(9.7-4)***

C.L. 2 : para z = L $\dfrac{dT}{dz} = 0$ (9.7-5)

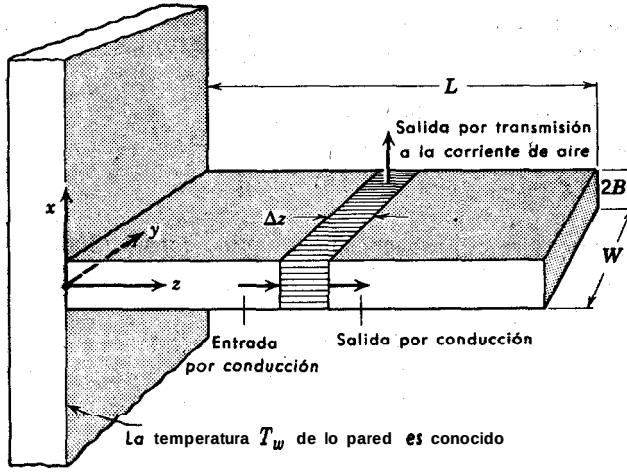


Fig. 9.7-1. Aleta de enfriamiento sencilla con B $\ll$ L.

Introducimos ahora las siguientes variables adimensionales :

$$\Theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a} = \text{temperatura adimensional} \tag{9.7-6}$$

$$\zeta = \frac{z}{L} = \text{distancia adimensional} \tag{9.7-7}$$

$$N = \sqrt{\frac{hL^2}{kB}} = \text{coeficiente adimensional de transmisión de calor} \tag{9.7-8}$$

De acuerdo con esto, el problema puede replantearse de esta forma:

$$\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = N^2\Theta \qquad \text{con} \qquad \Theta|_{\zeta=0} = 1 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{d\Theta}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0 \quad \textbf{(9.7—9, 10, 11)}$$

Al integrar la **Ec.** 9.7-9 y determinar las dos constantes de **integración,** se obtiene la siguiente función hiperbólica

$$\theta = \cosh N\zeta - (\tanh N) \operatorname{senh} N\zeta \qquad \textbf{(9.7—12)}$$

que puede expresarse así

$$\boxed{\Theta = \frac{\cosh N(1 - \zeta)}{\cosh N}} \qquad (9.743)$$

Es preciso resaltar que esta expresión es solamente aceptable si las **pérdidas** de calor en los bordes son despreciables.

La «eficacia de una **aleta**»[2] se define de la siguiente forma

$$\eta = \frac{\text{(calor disipado por la superficie de la aleta)}}{\left[\begin{array}{c}\text{calor que se disiparia si la superficie se} \\ \text{mantuviese a } T_w, \text{ (sin variar } h)\end{array}\right]} \qquad \textbf{(9.7—14)}$$

El valor **teórico** de η para el problema que estamos considerando, es, por lo tanto

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L h(T - T_a)\, dz\, dy}{\int_0^W \int_0^L h(T_w - T_a)\, dz\, dy} \qquad (9.7\text{-}15)$$

o bien

$$\eta = \frac{\int_0^1 \Theta\, d\zeta}{\int_0^1 d\zeta}$$

$$= \frac{1}{\cosh N}\left(-\frac{1}{N}\operatorname{senh} N(1 - \zeta)\right)\Big|_0^1 = \frac{\tanh N}{N} \qquad (9.7\text{-}16)$$

siendo N el numero adimensional que se ha **definido** en la **Ec.** 9.7-8.

---

2 M. **JAKOB,** *op. cit.,* p. *235.*

Ejemplo 9.7-1. Error en la medida de un termopar

En la Fig. 9.7 -2 se muestra un termopar situado en el interior de una vaina cilindrica que se introduce en una corriente gaseosa. Estimar la temperatura verdadera de la corriente gaseosa a partir de los siguientes datos.:

$T_1 = 260^\circ$ C = temperatura que señala el termopar
$T_w = 177^\circ$ C = temperatura de la pared
$h = 0{,}0167$ cal cm-2 seg^{-1} $^\circ C^{-1}$
$k = 0{,}250$ cal cm $^{-1}$ seg^{-1} $^\circ C^{-1}$
$B = 0{,}20$ cm = espesor de pared de la vaina
$L = 6$ cm

Solución. La vaina del termopar tiene un espesor de pared B, que es pequeño en comparación con el diámetro, y esta en contacto con la corriente gaseosa por un solo lado. Por lo tanto la distribución de temperatura en esta pared sera aproximadamente la misma que en una aleta de espesor $2B$ que estuviese en contacto con el gas por los dos lados. De acuerdo con la Ec. 9.7— 13, la temperatura en el extremo de la vaina (que es la que registra el termometro) es:

$$\frac{T_1 - T_a}{T_w - T_a} = \frac{\cosh 0}{\cosh N} = \frac{1}{\cosh \sqrt{hL^2/kB}}$$

$$= \frac{1}{\cosh \sqrt{(0{,}0167)\ (6)^2/(0{,}25)\ (0{,}2)}}$$

$$\frac{1}{\cosh 2\sqrt{3}} = \frac{1}{16.0} \qquad (9.7\text{-}17)$$

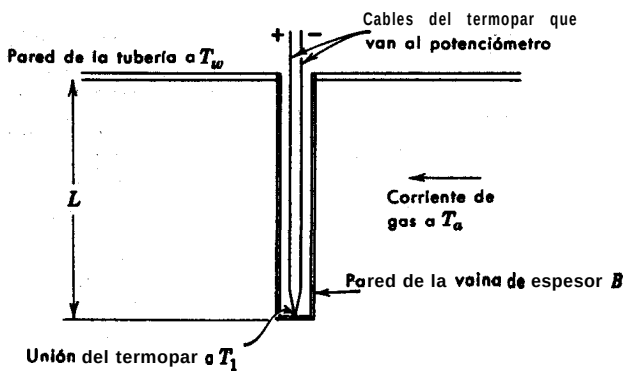


Fig. 9.7-2. Termopar en una vaina cilíndrica.

Por tanto, la temperatura real del gas se obtiene despejando T_a en esta ecuación:

$$\frac{260 - T_a}{177 - T_a} = \frac{1}{16{,}0}$$

$$T_a = 266^\circ C$$

Por consiguiente, la lectura del termopar es 6° C más baja. (Si se resolviese el problema teniendo en cuenta la variación de temperatura en la dirección x y el correspondiente flujo de calor bidireccional, se obtendría un resultado de 266,6° C.)

Este ejemplo señala una clase de error que se puede cometer en termometría. Generalmente puede utilizarse un análisis sencillo como el anterior para estimar la magnitud de los errores que se cometen.'

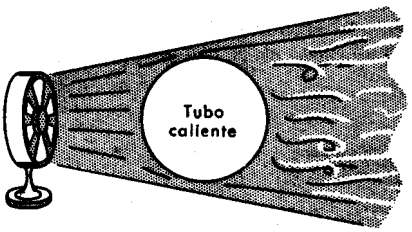
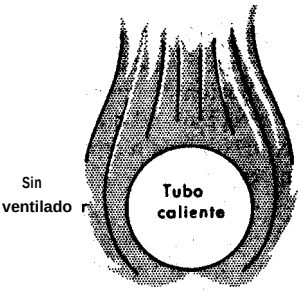
Transmisión de color por convección forzado	Transmisión de color por convección libre
	
El calor es barrido hacia la derecha por la corriente forzado de aire	El calor se transporta hacia arriba por el aire caliente que asciende
1. Las características del flujo están determinados fundamentalmente por una fuerza externa	1. Las características del flujo están determinadas por el efecto de flotación del fluido caliente
2. Primeramente se hallan los perfiles de velocidad, que se utilizan después para calcular los perfiles de temperatura [procedimiento general para fluidos cuyas propiedades físicas son constantes]	2. Los perfiles de velocidad y temperatura están íntimamente relacionados
3. El número de Nusselt depende de los números de Reynolds y Prandtl. (Véase Cap. 13)	3. El número de Nusselt depende de los números de Grashof y Prandtl (Véase Cap. 13)

Fig. 9.8-1. Comparación de la convección libre y forzada en sistemas no isotérmicos.

[3] Para un estudio más amplio, véase M. JAKOB, *op. cit.* vol. II. capítulo 33. pp. 147-201.

§9.8 CONVECCIÓN FORZADA

Las secciones anteriores se han dedicado principalmente a la conducción del calor en' sólidos. En ésta, y en la siguiente, estudiaremos dos tipos de la transmisión de calor en fluidos: ***convección forzada y convección libre.*** Las principales diferencias entre estos dos tipos de comportamiento se exhiben en la Fig. **9.8—1.** Hasta ahora, la mayor parte de los problemas industriales de transmisibn de calor se han situado arbitrariamente en una u otra de estas dos categorías limite; en algunos casos, sin embargo, es preciso considerar ambos efectos.

En esta sección vamos a considerar un problema de convección forzada en estado. estacionario, que presenta un caso límite suficientemente sencillo para poder resolverse analíticamente.[1,2] Un fluido viscoso cuyas propiedades físicas son constantes $(\rho, \mu, k, \hat{C}_p)$ circula con flujo laminar en un tubo de radio R. Para $z < 0$ la temperatura del fluido es constante e igual a T_0, y para $z > 0$ hay un flujo constante de calor q_1 a través de la pared. Estas condiciones se dan, por ejemplo, en una tubería que está uniformemente bobinada con una resistencia de calefacción eléctrica.

Como se ha indicado en la Fig. 9.8-1, la primera etapa en la resolución de un problema de transmisión de calor por convección forzada consiste en el dlculo de los perfiles de velocidad en el sistema. En § 2.3 ya hemos visto cómo se realtza esto para el caso de un tubo, mediante la aplicación del método del balance envolvente de cantidad de movimiento. Sabemos que la distribución de velocidad, a una distancia suficientemente alejada aguas abajo del obstáculo, de forma que se sobrepase la longitud de entrada, es

$$v_z = v_{z,\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (9.8\text{—}1)$$

en la que $v_{z\text{máx}}$ viene dada por $(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R^2/4\mu L$.

Para obtener la distribución de temperatura aplicamos un balance de energía calorífica a un elemento en forma de anillo circular, tal como se indica en la Fig. 9.8-2, teniendo en cuenta que T es una función de r y z. A este anillo entra y sale energla por conducción en ambas direcciones r y z (señaladas con las flechas de trazo continuo), También entra y sale energía debido a las corrientes de entrada y salida del fluido que llevan una cierta cantidad de «calor sensible». Por lo tanto, las contribuciones al balance de energla son:

entrada .de energla por r por conducción $\qquad q_r|_r \cdot 2\pi r\,\Delta z \qquad (9.8\text{-}2)$

salida de energía por $r + \Delta r$ por conducción $\qquad q_r|_{r+\Delta r} \cdot 2\pi(r + \text{Ar})\,\Delta z \qquad (9.8\text{-}3)$

---

1 A. EAGLE y R. M. FERGUSON, *Proc. Roy. Soc. (London),* A127, 540-566 (1930).

2 S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics,* Oxford University Press (1938), vol. II, p. 622.

entrada de energía por z por conducción $q_z|_z \cdot 2\pi r\,\Delta r$ *(9.8-4)*

salida de energía por $z + \Delta z$ por conducción $q_z|_{z+\Delta z} \cdot 2\pi r$ Ar *(9.8-5)*

entrada de energía por z debido al flujo del fluido $\rho \hat{C}_p v_z (T - T_0)|_z \cdot 2\pi r$ Ar *(9.8-6)*

salida de energía por $+ Az$ debido al flujo del fluido $\rho \hat{C}_p v_z (T - T_0)|_{z+\Delta z} \cdot 2\pi r\,\Delta r$ *(9.8—7)*

Estos dos últimos términos representan el contenido **calorífico** de las corrientes de entrada y salida respecto de una temperatura de referencia T_0; es preciso elegir esta temperatura de referencia ya que las-energías no pueden expresarse en forma absoluta, sino relativa. La elección del plano de **referencia** es arbitraria; después se verá que no aparece en la **ecuación** diferencial.

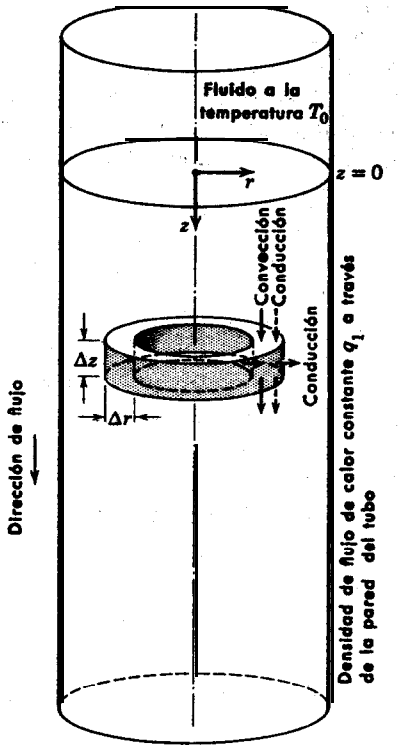


Fig. 9.8-2. Anillo circular al que se aplica el balance de energía para obtener las ecuaciones diferenciales de la distribución de temperatura para el flujo laminar en un tubo.

Al igualar las entradas y salidas de energía se establece el balance de energía aplicado al anillo circular de la Fig. 9.8-2. Dividiendo por $2\pi\Delta r\Delta z$, queda

$$\frac{(rq_r)|_{r+\Delta r} - (rq_r)|_r}{\Delta r} + r\,\frac{q_z|_{z+\Delta z} - q_z|_z}{\mathrm{AZ}} + r\rho\hat{C}_p v_z \frac{T|_{z+\Delta z} - T|_z}{\mathrm{AZ}} = 0 \qquad (9.8\text{-}8)$$

Al tender Δr e Δz hacia cero, se obtiene

$$\rho\hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) - \frac{\partial q_z}{\partial z} \qquad (9.8\text{-}9)$$

Introduciendo en esta ecuación la distribución de velocidad de la Ec. 9.8-1, y la ley de Fourier de la conducción del calor para ambas direcciones r y z:

$$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}; \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (9.8\text{-}10)$$

se llega a la siguiente ecuación diferencial entre derivadas parciales:

$$\rho\hat{C}_p v_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial z} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \qquad (9.8\text{-}11)$$

Generalmente la conducción del calor en la dirección z (el término que contiene $\partial^2 T/\partial z^2$) es pequeña compara& con la transmisión convectiva (el término que contiene. $\partial T/\partial z$), de forma que $\partial^2 T/\partial z^2$ puede suprimirse en la Ec. 9.8—11. Un caso en el que no puede hacerse esto es el del flujo lento de substancias que poseen una conductividad calorífica elevada, tales como metales líquidos. Cuando puede suprimirse el termino conductivo en la dirección z, queda finalmente

$$\rho\hat{C}_p v_{\text{máx}}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial z} = k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad (9.8\text{-}12)$$

Al resolver esta ecuación diferencial entre derivadas parciales se obtiene la temperatura en función de r y z en el tubo. Las condiciones límite son:

C.L. 1: para $r = 0$, T = finito (9.8—13)

C.L. 2: para $r = R$, $-k\dfrac{\partial T}{\partial r} = q_1$ (una constante) (9.8—14)

C.L. 3: para $z = 0$, $T = T_0$ (para cualquier valor de r) (9.8-15)

Con el fin de simplificar, se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{q_1 R/k}; \qquad \xi = \frac{r}{R}; \qquad \zeta = \frac{zk}{\rho\hat{C}_p v_{z,\text{máx}} R^2} \qquad (9.8\text{-}16,17,18)$$

La ecuación que se obtiene para la distribución de temperatura es

$$(1 - \xi^2)\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right) \tag{9.8-19}$$

con las siguientes condiciones límite

C.L. 1 : para $\xi = 0$, Θ = finito (9.840)

C.L. 2 : para $\xi = 1$, $-\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 1$ (9.8-21)

C.L. 3 : para $\zeta = 0$, $\Theta = 0$ (9.8-22)

La ecuación diferencial (Ec. 9.8-19) se ha resuelto para estas condiciones límite,[3] pero no daremos aquí la solución completa.

Sin embargo, es instructivo obtener la forma límite de la solución de la Ec. 9.8-19 cuando ζ es grande. Después que el fluido se ha alejado aguas abajo del comienzo de la sección de calefacción, es de esperar, intuitivamente, que la densidad de flujo de calor constante a través de la pared dará lugar a un aumento lineal de la temperatura con ζ. Además, es de esperar también que la forma de los perfiles radiales de temperatura no sufrirá al fin cambios ulteriores al aumentar ζ. Por consiguiente, para valores grandes de ζ parece razonable una solución de la siguiente forma

$$\Theta = C_0\zeta + \Psi(\xi) \tag{9.8-23}$$

en la que C_0 es una constante que se ha de determinar posteriormente.

La función correspondiente a la Ec. 9-8-23 no es evidentemente una solución completa del problema. Aunque esta función debe de cumplir la ecuación entre derivadas parciales así como las condiciones límite «1» y «2», es fácil ver que puede no cumplir la condición límite «3». Por lo tanto, substituimos esta última por

C.L. 3' : $$-2\pi R z q_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho \hat{C}_p (T - T_0) v_z r \, dr \, d\theta \tag{9.8-24}$$

0

$$-\zeta = \int_0^1 \Theta(\xi, \zeta)(1 - \xi^2)\xi \, d\xi \tag{9.8-25}$$

Esta condición establece que el calor que entra a través de las paredes es igual a la diferencia entre el calor transportado a través de las secciones transversales correspondientes a $\zeta = \zeta$ y $\zeta = 0$.

Substituyendo la Ec. 9.8-23 en la Ec. 9.8-19 se obtiene para Ψ la siguiente ecuación diferencial ordinaria

---

3 R. SIEGEL, E. M. SPARROW y T. M. HALLMAN, *Appl. Sci. Research.* **A7,** 386-392 (1958).

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Psi}{d\xi}\right) = C_0(1-\xi^2) \qquad (9.8\text{–}26)$$

Integrando dos veces esta ecuación con respecto a ξ y substituyendo el resultado en la Ec. 9.8-23, se obtiene

$$\Theta = C_0\zeta + C_0\left\{\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^4}{16}\right\} + C_1 \ln \xi + C_2 \qquad (9.8\text{-}27)$$

en la que C_1 y C_2 son constantes de integración, que se determinan a partir de las condiciones límite que se han indicado anteriormente:

C.L. 1 : $C_1 = 0$ (9.8-28)

C.L. 2 : $C_0 = -4$ *(9.8-29)*

C.L. 3' : $C_2 = +\frac{7}{24}$ (9.8—30)

Substituyendo estas expresiones en la Ec. 9.8-27 se obtiene finalmente,[4]

$$\Theta = -4\zeta - \xi^2 + \tfrac{1}{4}\xi^4 + \tfrac{7}{24} \qquad (9.8\text{-}31)$$

Este resulta& expresa la temperatura en función de la coordenada radial adimensional ξ y la axial ζ. Es exacta en el límite cuando $\zeta \to \infty$; para $\zeta = 0{,}1$ predice el valor local de θ don un error aproximado del 2 por ciento.

Una vez que se' conoce la distribución de temperatura, pueden deducirse otras magnitudes. En relación con el flujo de fluidos para los que ρ y $\hat{C}_p$ son prácticamente constantes, se utilizan dos clases de temperaturas medias:

$$\langle T\rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R T(r)r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta} \qquad (9.8\text{-}32)$$

$$\frac{\langle v_z T\rangle}{\langle v_z\rangle} \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z(r)T(r)r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z(r)r\,dr\,d\theta} = T_b \qquad (9.8\text{-}33)$$

Ambas medias son funciones de z. $\langle T\rangle$ es exactamente la media aritmética de las temperaturas en una determinada sección transversal. La «temperatura global» T_b

[4] En el problema 9.R se halla una solución de la distribución de temperatura para valores muy pequeños de ζ.

es la temperatura que se medirla si el tubo se aserrase por z, recogiendo en un recipiente el fluido que sale y mezclándolo totalmente (de aquí que esta temperatura media se llame a veces «temperatura de mezcla en taza» o «temperatura media de flujo»).

Antes de acabar esta sección hemos de indicar que la coordenada axial adimensional ζ que aparece más arriba, puede expresarse de esta forma:

$$\zeta = \left[\frac{z}{R}\right]\left[\frac{\mu}{D\langle v_z\rangle\rho}\right]\left[\frac{k}{\mu \hat{C}_p}\right] = \left[\frac{z}{R}\right]\frac{1}{\mathrm{Re\ Pr}} \tag{9.8-34}$$

en la que D es el diámetro del tubo, Re es el número de Reynolds utilizado en la Parte 1, y Pr = $\hat{C}_p\mu/k$ es el número de Prandtl. En el Capítulo 10 se vera que, generalmente, es de esperar que los números de Reynolds y Prandtl intervengan en los problemas de convección forzada. De esto se hace aplicación en el Capítulo 13 al correlacionar los coeficientes de transmisión de calor.

§ 9.9 CONVECCIÓN LIBRE

En § 9.8 se ha presentado un ejemplo de convección forzada. En esta sección fijaremos nuestra atención en un problema de convección libre, que corresponde al flujo entre dos paredes paralelas que están a distinta temperatura. Un fluido de densidad ρ y viscosidad μ está situado entre dos paredes verticales separadas entre sí una distancia $2b$, tal como se indica en la Fig. 9.1—1. La pared caliente, situada en $y = -b$, se mantiene a la temperatura T_2 y la pared fría, situada en $y = +b$, a la temperatura T_1. Debido al gradiente de temperatura, el fluido próximo a la pared caliente asciende, mientras que desciende el que está junto a la pared fría. Se supone que el sistema esta construido de tal forma que la velocidad volumétrica de flujo de la corriente ascendente es igual a la de la, descendente.

Si las láminas son muy largas en la dirección z, la temperatura será una función exclusiva de y (aparte los efectos finales, por supuesto). Para obtener la distribución de temperatura se aplica un balance de energía calorífica a una envoltura de espesor Δy, que conduce a la siguiente ecuación diferencial de la temperatura (para k constante) :

$$k\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \tag{9.9-1}$$

Esta ecuación se resuelve con las condiciones límite:

C.L. 1 : para $y = -b$ $T = T_2$ *(9.9-2)*

C.L. 2 : para $y = +b$ $T = T_1$ *(9.9-3)*

Fácilmente se encuentra que la solución es

$$\boxed{T = T_m - \frac{1}{2}\Delta T\left(\frac{y}{b}\right)} \tag{9.9-4}$$

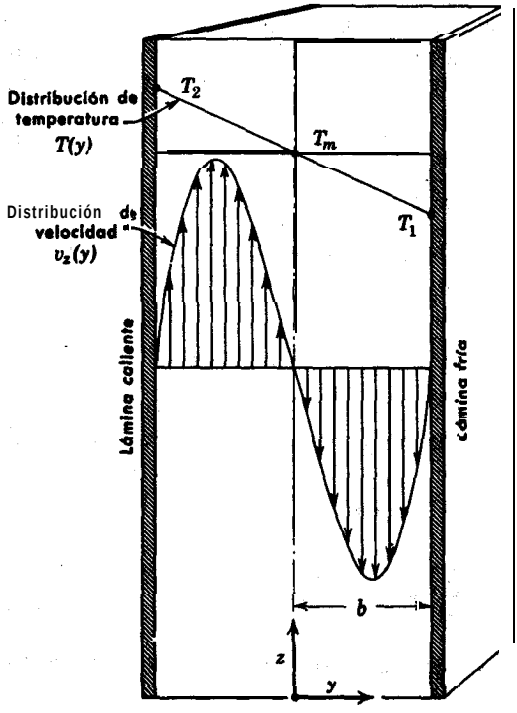


Fig. 9.9-1. Flujo laminar en la convección libre entre dos láminas verticales a distinta temperatura; la velocidad es una función cúbica de la distancia.

en la que $\Delta T = T_2 - T_1$, es la diferencia entre la temperatura de las paredes y $T_m = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, es su media aritmética.

Aplicando un balance de cantidad de movimiento a la misma placa de espesor Δy, se llega a la siguiente ecuación diferencial para la distribución de velocidad:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \rho g \tag{9.9-5}$$

En esta ecuación se ha supuesto que μ es constante.

Desarrollando en serie ρ mediante la formula de Taylor alrededor de una temperatura de referencia T (hasta ahora no especificada):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho|_{\bar{T}} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{\bar{T}} (T - \bar{T}) + \cdots \\ &= \bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T}) + \cdots \end{aligned} \tag{9.9-6}$$

En esta expresión se ha introducido $\bar{\rho}$, la densidad a la témperatura $\bar{T}$, y el coeficiente de expansión en volumen[1] $\bar{\beta}$, también calculado a la temperatura $\bar{T}$. La Ec. 9.9-6 puede considerarse como una función de estado obtenida por la fórmula de Taylor. Substituyendo los dos primeros términos de la serie en la Ec. 9.9-5, se obtiene

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \bar{\rho} g - \bar{\rho}\bar{\beta} g(T - \bar{T}) \tag{9.9-7}$$

Si el gradiente de presión del sistema se debe exclusivamente al peso de la lámina de fluido tendremos que $dp/dz = -\bar{\rho}g$, y por tanto, la ecuación de movimiento se transforma en

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\bar{\rho}\bar{\beta} g(T - \bar{T}) \tag{9.9-8}$$

El sentido físico de esta ecuación es que las fuerzas viscosas equilibran exactamente a las fuerzas de flotación.

Substituyendo la expresión de la distribución de temperatura (véase Ec. 9.9-4) en la Ec. 9.9-8, se obtiene

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = -\bar{\rho}\bar{\beta} g\left[(T_m - \bar{T}) - \frac{1}{2}\Delta T\left(\frac{y}{b}\right)\right] \tag{9.9-9}$$

Esta ecuación puede resolverse utilizando las siguientes condiciones límite :

C.L. 1 : para $y = -b$ $\quad v_z = 0$ (9.9—10)

C.L. 2: para $y = +b$ $\quad v_z = 0$ (9.9-11)

La solución es

$$v_z = \frac{\bar{\rho}\bar{\beta} g b^2 \Delta T}{12\mu}[\eta^3 - A\eta^2 - \eta + A] \tag{9.9-12}$$

en la que $A = 6(T_m - \bar{T})/\Delta T$, y $\eta = y/b$.

Como el flujo neto de volumen en la dirección z es cero,

$$\int_{-1}^{+1} v_z \, d\eta = 0 \tag{9.9-13}$$

Substituyendo la Ec. 9.9— 12 en esta expresión se obtiene

$$-\tfrac{2}{3}A + 4A = 0 \tag{9.9-14}$$

[1] El coeficiente de expansión en volumen se define mediante la ecuación:

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{(1/\rho)}\left(\frac{\partial (1/\rho)}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \tag{9.9-6a}$$

por lo tanto $A = 0$ o $\bar{T} = T_m$. De donde se deduce que la expresión final de la velocidad es:

$$v_z = \frac{\bar{\rho}\bar{\beta}gb^2\,\Delta T}{12\mu}(\eta^3 - \eta) \tag{9.9-15}$$

Hemos visto como la distribución de velocidad se debe a las fuerzas de flotación que resultan de las desigualdades de temperatura en el sistema. En la Fig. 9.9-1 se ha representado gráficamente la distribución de velocidad correspondiente a la Ec. 9.9-15. Esta clase de distribución de velocidad es la que tiene lugar durante el funcionamiento de una columna de Clusius-Dickel para la separación de isótopos o mezclas de líquidos orgánicos, combinando los efectos de la difusión térmica y la convección libre.2

Antes de terminar esta sección, obsérvese que la Ec. 9.9— 15 puede expresarse en función de una velocidad adimensional $\phi = bv_z\bar{\rho}/\mu$ y una longitud adimensional $\eta = y/b$, en la forma siguiente:

$$\phi = \tfrac{1}{12}\,\mathrm{Gr}\,(\eta^3 - \eta) \tag{9.9-16}$$

en la que Gr es el número de Grashof:

$$\mathrm{Gr} = \left[\frac{\bar{\rho}^2\bar{\beta}gb^3\,\Delta T}{\mu^2}\right] = \left[\frac{\bar{\rho}gb^3\,\Delta\rho}{\mu^2}\right] \tag{9.9-17}$$

En esta ecuación, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, y la segunda forma que se indica para el número de Grashof se obtiene a partir de la primera mediante la Ec. 9.9-6. El número de Grashof interviene en los problemas de convección libre, que se estudian de una forma general en el Capítulo 10. La utilización del número de Grashof para correlacionar los coeficientes experimentales de transmisión de calor se expone en el Capítulo 13.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Comparar y contrastar los cuatro sistemas tratados en §§ 9.2-9.5, en los que intervienen manantiales de calor.

2. ¿Cuál es el equivalente de un manantial calorífico en el transporte de cantidad de movimiento ?

3. ¿Qué problema de un circuito eléctrico es análogo a la suma de las resistencias térmicas?

4. ¿ Cuál es el coeficiente de expansión en volumen β de un gas ideal? ¿ Cuál es la expresión correspondiente al número de Grashof?

5. Indicar ejemplos de diversos tipos de transmisión de calor por convección en meteorología.

6. ¿Cómo debería modificarse la C.L.2 de la Ec. 9.2— 12 para expresar que se pierde calor, de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, a un ambiente gaseoso que está a la temperatura T_y?

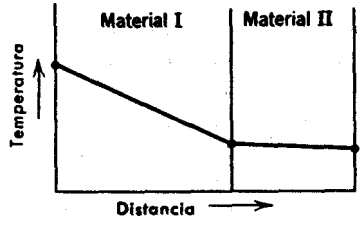
---

2 Para un breve tratamiento de la difusión térmica, véase Capítulo 18.

7. Explíquense con detalle las operaciones de promedio correspondientes a las Ecs. 9.2-15, 9.8-32 y 33.

8. Indíquense algunas consecuencias que puede ocasionar la existencia de elevados gradientes de temperatura, producidos por efectos calorificos de origen viscoso, en extrusión de plásticos y en lubrificación.

9. Los perfiles de temperatura en estado estacionario en un sistema laminado son de la siguiente forma:



¿Cuál de los dos materiales tiene mayor conductividad calorlfica?

10. ¿Está de acuerdo la Ec. 9.5-1 con la ecuación de Arrhenius de cinética química?

ll. ¿Por qué es preciso especificar en la Ec. 9.6 -30 que U_0 esta «basado en la superficie interna» ?

12. Demostrar que los números de Grashof, Brinkman y Prandtl son adimensionales.

13. ¿Cuál es la velocidad media de la corriente ascendente en la Fig. 9.9–1?

14. ¿ Como se modificarán (cualitativamente) los resultados de § 9.4 si la viscosidad varía considerablemente al aumentar la temperatura?

15. ¿Qué ocurre cuando en la Ec. 9.4-11 $T_b = T_0$?

16. ¿Cuál es el valor límite de η en la Ec. 9.7-16 cuando la aleta se hace muy corta? ¿Es razonable el resultado?

17. ¿Qué importancia puede tener el efecto estudiado en § 9.4 como origen de error en medidas viscosimétricas?

PROBLEMAS

9.A_1 Pérdidas de calor en una tubería aislada

Una tubería de acero norma 40, de dos pulgadas de diámetro (diámetro interno 5,250 cm y espesor de pared 0,391 cm), que conduce vapor de agua, está aisladacon una capa de magnesia (85 %) de 5 cm de espesor y sobre ella un revestimiento de corcho también de 5 cm. Calcular las pérdidas de calor, en kcal por hora y metro de tubería, sabiendo que la temperatura de la superficie interna de la tubería es de 120" C y la de la externa del corcho, 30° C. Las conductividades caloríficas de las substancias que intervienen son:

acero	39 kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1}
magnesia (85 %)	0,060
corcho	0,045

Respuesta: 20,8 kcal hr^{-1} m^{-1}

9.B_1 Pérdidas de calor en una aleta rectangular

Calcular las perdidas de calor en una aleta rectangular (véase Fig. 9.7 — 1) en las siguientes condiciones :

temperatura del aire	176,7° C
temperatura de la pared	260° C
conductividad calorífica de la aleta	89.3 kcal hr^{-1} m-t $°C^{-1}$
coeficiente de transmisión de calor	586 kcal hr^{-1} m^{-2} "C-t
longitud de la aleta	61 mm
anchura de la aleta	30,5 mm
espesor de la aleta	4,1 mm

Respuesta: 525 kcal hr^{-1}

9.C_1 Temperatura **máxima** en **un lubrificante**

Un aceite actúa como lubrificante de dos superficies cilíndricas como las que se indican en la Fig. 9.4— 1. La velocidad angular del cilindro exterior es de 7908 rpm. El radio del cilindro exterior es de 5,06 cm, y la luz entre los dos cilindros 0,027 cm. ¿ Cual es la máxima temperatura en el aceite, si se sabe que la temperatura de ambas paredes es de 70° C? Las propiedades físicas del aceite son:

viscosidad		92,3 cp
densidad		1,22 g cm-3
conductividad	calorífica	0,0055 cal seg-t cm-t ° c-t

Respuesta: 79" C

9.D_1 Capacidad de un alambre para la conducción de corriente eléctrica

Un alambre de cobre de 1 mm de diámetro esta uniformemente aislado con un material plástico, de forma que el diámetro externo del conductor aislado es de 3 mm. El conductor está expuesto a un ambiente a 38" C. El coeficiente de transmisión de calor desde la superficie exterior del plástico a los alrededores es de 2,04 x 10^{-4} cal seg-t cm^{-2} $°C^{-1}$ ¿Cuál es la máxima corriente, en amperios, que en régimen estacionario puede conducir este alambre sin que se sobrepase en ninguna parte del plástico el límite de operación de 93° C? Las conductividades caloríficas y eléctricas se suponen constantes, siendo sus valores:

	k cal seg-t cm--t ° C-t	k_e ohm-t cm-t
cobre	0,90	5,1 x 10^{-5}
plástico	8.27 x 10^{-4}	0,0

Respuesta: 13 amp.

9.E_1 Velocidad de convección libre

¿Cuál es la velocidad *media* de la corriente ascendente del sistema descrito en la Fig.9.9—1, para el flujo de aire en estas condiciones?

presión	1 atm
temperatura de la pared caliente	100°C
temperatura de la pared fría	20° C
separación entre las paredes	0,6 cm

Respuesta: 2,3 *cm* seg^{-1}

9.F_2 Pérdidas por evaporación en un tanque de oxigeno

a. A veces se almacenan los gases al estado liquido en recipientes esféricos bien aislados, con comunicación a la atmósfera. Deducir una expresión para la velocidad de transmisión de calor en estado estacionario a través de las paredes del recipiente, llamando a los radios interior y ex-

terior de las paredes r_0 y r_1. Supóngase que se conocen las temperaturas Te y T_1 (correspondientes a $r = r_0$ y $r = r_1$). Admítase que la conductividad calorifica del aislamiento varía linealmente con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$k = k_0 + (k_1 - k_0)\left(\frac{T - T_0}{T_1 - T_0}\right)$$

¿ Cuál es el significado físico de las constantes k_0 y k_1 ?

b. Estimar la velocidad de evaporación del oxigeno líquido contenido en un recipiente esférico de. 1,85 m de diámetro que está recubierto con una capa de amianto de 30 cm de espesor. Se dispone de los siguientes datos:

temperatura de la superficie interna del aislamiento	−183° c
temperatura de la superficie externa del aislamiento	0°C
temperatura de ebullición del O_2	−183°C
calor de vaporización del O_2	*1636* cal g-mol^{-1}
conductividad calorifica del aislamiento a 0°C	*0,133* kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1}
conductividad calorifica del aislamiento a − 183" C	0,107 kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1}

Respuesta: a. $Q_0 = 4\pi r_0 r_1 \left(\frac{k_0 + k_1}{2}\right)\left(\frac{T_1 - T_0}{r_1 - r_0}\right)$

b. 20,4 kg hr^{-1}

9.G$_2$ Otros métodos para resolver el problema del alambre calentado

a. Demostrar que la Ec. 92-9 puede deducirse efectuando un balance de energía calorifica a un *cilindro* de radio r y longitud L situado en el interior del alambre que se calienta (en vez de una *envoltura cilindrica* como se ha hecho en §9.2).

b. Substituir la ley de Fourier en la Fc. 9.2-6 para obtener una ecuación diferencial de la temperatura. ¿Qué condiciones límite tiene esta ecuación ? Integrarla. para estas condiciones límite y obtener la Ec. 9.2-13.

9.H$_2$ Conducción de calor desde una esfera a un fluido estancado

Una esfera caliente de radio R esta suspendida en una gran masa de fluido en reposo. Se desea estudiar la conducción de calor en el fluido que rodea a la esfera. En este problema se supone que los efectos de la convección libre son despreciables (véase § 9.9).

a. Plantear la ecuación diferencial que describe la temperatura T del fluido circundante en función de r, la distancia desde el centro de la esfera. La conductividad calorifica k del fluido es constante.

b. Integrar la ecuación diferencial y utilizar las siguientes condiciones limite:

C.L. 1: para $r = R$, $T = T_R$

C.L. 2: para $r = \infty$, $T = T_\infty$

para determinar las constantes de integración.

c. Obtener una ecuación para la densidad de flujo de calor en la superficie, a partir del perfil de temperatura. Igualar este resultado a la densidad de flujo de calor, expresada como «ley del enfriamiento de Newton», y demostrar que el coeficiente adimensional de transmisión de calor (conocido con el nombre de «número de Nusselt») viene dado por

$$\mathrm{Nu} = \frac{hD}{k} = 2 \qquad (9.H\text{–}1)$$

de un material resistente al calor o ladrillo refractario; segunda, una capa de ladrillo aislante; y finalmente, una chapa de acero para protección mecánica, cuyo espesor ea de 6,3 mm.

Calcular el espesor de cada capa de ladrillo para obtener un espesor total mínimo con una pérdida de calor por la pared de 13.560 kcal m^{-2} hr^{-1}, suponiendo que las capas hacen buen contacto térmico. Se conocen los siguientes datos:

Material	Temperatura máxima de utilización	Conductividad calorífica (kcal hr^{-1} m^{-1} °C^{-1} a 38°C	1100° C
Ladrillo refractario	1425" C	2.68	5,36
Ladrillo aislante	1100° C	1,34	2,68
Acero		39,0	—

Respuesta: ladrillo refractario, 11,9 cm.
ladrillo aislante, 15.5 cm.

9.M_2 Gradiente de temperatura radial en un reactor químico de tubos concéntricos

Una reacción catalítica se realiza a presión constante en un lecho de relleno situado en el espacio anular comprendido entre dos cilindros coaxiales de radio interno R_0 y externo R_1. Esta configuración se presenta cuando se miden temperaturas con una caña termométrica centrada y resulta ademas útil para al control de los gradientes de temperatura si se utiliza un anillo delgado. Toda la pared interna está a temperatura constante T_0 y puede suponerse que prácticamente no hay transmisión de calor a través de esta superficie. La reacción desprende calor con una velocidad volumétrica S_c uniforme en todo el reactor. La conductividad calorífica efectiva k_{ef} del contenido del reactor debe de considerarse como una constante global.

a. Mediante un balance envolvente de energía calorífica, deducir una ecuación diferencial de segundo orden que describa los perfiles de temperatura, admitiendo que pueden despreciarse los gradientes de temperatura en la dirección axial. ¿Qué condiciones límite deben de utilizarse?

b. Plantear de nuevo la ecuación diferencial y las condiciones límite en función de la temperatura y la longitud adimensionales definidas de la siguiente forma:

$$\xi = \frac{r}{R_0}; \qquad \Theta = \frac{T - T_0}{S_c R_0^2 / 4k_{ef}} \tag{9.M-1,2}$$

¿Por qué es lógico elegir estas variables adimensionales?

c. Integrar la ecuación diferencia1 adimensional, para obtener el perfil de temperatura radial. ¿Qué problema de flujo viscoso es análogo a éste de conducción del calor?

d. Deducir las expresiones para la temperatura de la pared externa y la temperatura media.

e. Calcular la temperatura de la pared externa cuando R_0 = 11,4 mm, R_1 = 12,7 mm, k_{ef} = 0.45 kcal hr^{-1} m^{-1} ° C^{-1}, T_0 = 482° C, y S_c = *480* cal hr^{-1} cm-s.

f. ¿Cómo variaría el resultado del apartado (*e*) si se duplicasen los radios interno y externo?

Respuesta: e. 481, 3°C

9.N_2 Transmisión de calor a un fluido no-newtoniano

Ampliar el problema tratado en § 9.8, con el fin de describir la transmisión de calor a un fluido que se ajusta al modelo de Ellis de la Fc. 1.2-5.

9.O_3 Calentamiento viscoso de un fluido cuya viscosidad y conductividad calorífica varían coa la temperatura

Consideremos el caso esquematizado en las Figs. 9.4-1 y 2. Tanto la superficie estacionaria

como la móvil Se mantiene a la temperatura constante T_0. La variación de k y μ con la temperatura viene dada por las expresiones:

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1\Theta + \alpha_2\Theta^2 + \cdots \tag{9.O-1}$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 + \beta_1\Theta + \beta_2\Theta^2 + \cdots \tag{9.O-2}$$

en la que φ es la fluidez y el subíndice 0 quiere decir «evaluado a T_0» ; la temperatura adimensional Θ está definida por $\Theta = (T - T_0)/T_0$.

a. Demostrar que las ecuaciones diferenciales que describen el flujo viscoso y la conducción de calor pueden expresarse en la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\frac{d\phi}{d\xi}\right) = 0 \tag{9.O-3}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{k}{k_0}\frac{d\Theta}{d\xi}\right) + B\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = 0 \tag{9.O-4}$$

en las que $\phi = v_x/V$, $\xi = x/b$ y $B = \mu_0 V^2/k_0 T_0$.

b. La distribución de velocidad reducida puede integrarse para obtener $d\phi/d\xi = C_1(\varphi/\varphi_0)$ Al substituir esta expresión en la ecuación del balance calorífico, se llega a

$$\frac{d}{d\xi}\left((1 + \alpha_1\Theta + \alpha_2\Theta^2 + \cdots)\frac{d\Theta}{d\xi}\right) + BC_1^2(1 + \beta_1\Theta + \beta_2\Theta^2 + \cdots) = 0 \tag{9.O-5}$$

en la que C_1 es una constante de integración procedente de la ecuación de ϕ. Obtener los dos primeros términos de una solución. de la forma

$$\Theta = B\Theta_1 + B^2\Theta_2 + B^3\Theta_3 + \cdots \tag{9.O-6}$$

$$\phi = \phi_0 + B\phi_1 + B^2\phi_2 + \cdots \tag{9.O-7}$$

siendo ϕ_i y Θ_i funciones de ξ pero independientes de B.

Insinuación: El ejemplo 9.2-2 sugiere la técnica que debe de utilizarse. ge indica también que C_1 puede desarrollarse de esta forma:

$$C_1 = C_{10} + BC_{11}B^2C_{12} + \cdots \tag{9.O-8}$$

Respuesta:
$$\phi = \xi - \tfrac{1}{12}B\beta_1(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \cdots$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2}B(\xi - \xi^2) - \tfrac{1}{8}B^2\alpha_1(\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) - \tfrac{1}{24}B^2\beta_1(\xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) + \cdots$$

9.P$_3$ Transmisión del calor por convección forzada para el flujo no-newtoniano en tubos con tiempos de contacto cortos

Un fluido no-newtoniano que puede describirse por el modelo de la Ec. 1.2-5, fluye en el sistema que se indica en la Fig. 9.P. Se desea hallar los perfiles de temperatura y la densidad de flujo de calor en la pared, para el caso especial de «cortos tiempos de contacto». Esto quiere decir que el calor no debe «penetran> mucho en el fluido.

a. Obtener el perfil de velocidad.

b. Establézcase la ecuación diferencial de $T(r, z)$ aplicando un balance de energía calorífica

siendo *D el* diámetro de la esfera. Este resultado es muy conocido y corresponde al valor límite del Nu para la tranmisión de calor desde esferas con pequeños valores de los números de Reynolds o Grashof (véanse Capítulos 13 y 21), por ejemplo, en el caso de esferas pequeñas.

9.I$_2$ Transmisión de calor en el acoplamiento de una barra de combustible nuclear

Consideremos una barra larga de un combustibk nuclear que esta rodeada por una plancha anular de un «revestimiento» de aluminio, tal como se indica en la Fig. 9.1. Debido al proceso de fisión, se produce calor en el interior de la barra de combustible; et desarrollo de calor depende de la posición, variando la intensidad del manantial calorífico de acuerdo *con* la expresión aproximada:

$$S_n = S_{n0}\left[1 - b\left(\frac{r}{R_F}\right)^3\right] \qquad (9.I\text{–}1)$$

Siendo S_{n0} el calor producido por unidad de volumen y unidad de tiempo para r = 0, y *r* la distancia desde el eje de la barra de combustibk. Calcular la temperatura máxima que se alcanza en ta barra de combustible, sí la superficie externa de la vaina de aluminio esta en contacto con

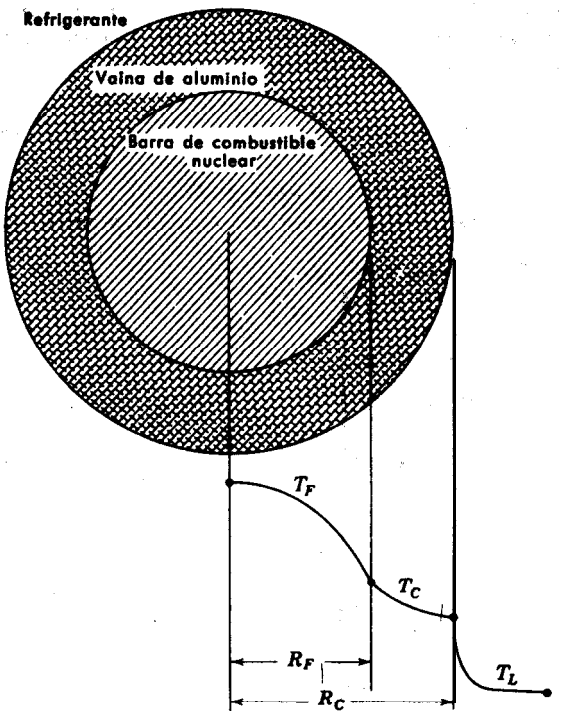


Fig. 9.1. Distribución de temperatura en el acoplamiento de una barra de combustible.

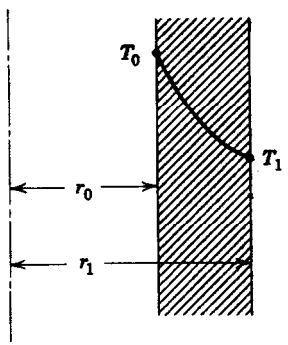


Fig. 9.J. Perfil de temperatura en una pared anular.

. un llquido refrigerante cuya temperatura es T_L y el coeficiente de transmisión de calor en la interfase vaina-refrigerante es h_L. Las conductividades caloríficas de la barra y la vaina son k_F y k_C.

Respuesta: $$(T_{F,\text{máx}} - T_L) = \frac{S_{n0}R_F^2}{4k_F}\left(1 - \frac{b}{4}\right) + \frac{S_{n0}R_F^2}{2k_C}\left(1 - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{k_C}{R_C h_L} + \ln\frac{R_C}{R_F}\right)$$

9.J$_2$ Conducción de calor en un anillo circular

a. El calor fluye a través de una pared anular cuyo radio interno es r_0 y el externo r_1. La conductividad calorífica varía linealmente con la temperatura desde k_0 a la temperatura T_0 hasta k_1 a la temperatura T_1. Deducir una expresión para el flujo de calor a través de la pared situada en $r = r_0$. (Véase Fig. 9.J.)

b. Demostrar como puede simplificarse la expresión obtenida en (*a*) cuando $(r_1 - r_0)$ es muy pequeño. Interpretar físicamente el resultado,

Respuesta: a. $$Q_0 = 2\pi L(T_0 - T_1)\left(\frac{k_0 + k_1}{2}\right)\left(\ln\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}$$

b. $$Q_0 = 2\pi r_0 L\left(\frac{k_0 + k_1}{2}\right)\left(\frac{T_0 - T_1}{r_1 - r_0}\right)$$

9.K$_2$ Generación de calor en un fluido no-newtoniano

Rehacer el problema estudiado en § 9.4 para el caso de un fluido no-newtoniano que sigue el modelo de Ostwald-de Waele (véase § 1.2). Demostrar que la distribución de temperatura es la misma de la Ec. 9.4-11, sólo que Br se ha reemplazado por Br$_{,,}$, siendo

$$\text{Br}_{,,} = \left[\frac{m V^{n+1}}{k b^{n-1}(T_b - T_0)}\right] \qquad \textbf{(9.K–1)}$$

9.L$_2$ Cálculo del espesor de aislamiento de la pared de un horno

La pared de un horno consta de tres capas, como se indica en la Fig. 9.L: primera, una capa

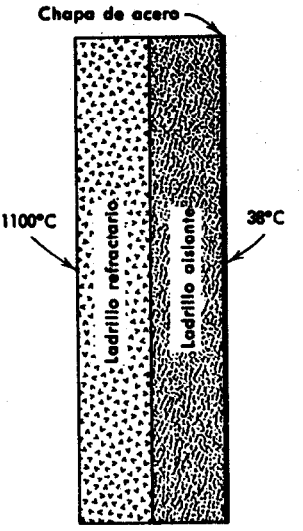


Fig. 9.L. Pared compuesta de un horno.

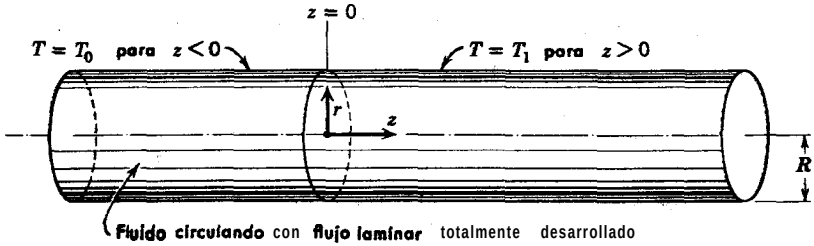


Fig. 9.P. Tuberia con variación súbita de la temperatura de la pared.

según el método descrito en § 9.8, Hágase después $s = R - r$ y despréciense algunos términos que son poco importantes en la proximidad de la pared. Demostrar que se llega a la ecuación

$$\rho \hat{C}_p(\varphi_0 \tau_R + \varphi_1 \tau_R^{\alpha}) s \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \qquad (9.P\text{–}1)$$

en la que τ_R es. la densidad de flujo de cantidad de movimiento para r = R. Escríbase de nuevo la Ec. 9.P–1 en función de las siguientes variables adimensionales:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \qquad \zeta = \frac{z}{R}; \qquad \sigma = \frac{s}{R}; \qquad N = \frac{\rho \hat{C}_p R^2}{k}(\varphi_0 \tau_R + \varphi_1 \tau_R^{\alpha}) \qquad (9.P\text{–}2,3,4,5)$$

c. Demostrar que si se admite una solución de la forma siguiente

$$\Theta = f(\eta) \qquad \text{siendo } \eta = \left(\frac{N\sigma^3}{9\zeta}\right)^{1/3} \qquad (9.P\text{–}6,7)$$

la ecuación diferencial entre derivadas parciales que se obtiene en *(b)* se transforma en la ecuación diferencial ordinaria,

$$f''' + 3\eta^2 f' = 0 \qquad (9.P\text{-}8)$$

en la que las comillas indican diferenciación con respecto a η. ¿ Cuáles son las condiciones límite correspondientes a la Ec. 9.P–8? Resolver la Ec. 9.P–8 y obtener

$$f = [\Gamma(\tfrac{4}{3})]^{-1} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^3}\, d\eta \qquad (9.P\text{–}9)$$

en la que $\Gamma(\frac{4}{3})$ es la «función gamma» evaluada para $\frac{4}{3}$.

d. A partir de la distribución de temperatura obtenida en (c) evaluar la densidad de flujo de calor en la pared, en función de la distancia a lo largo del tubo.

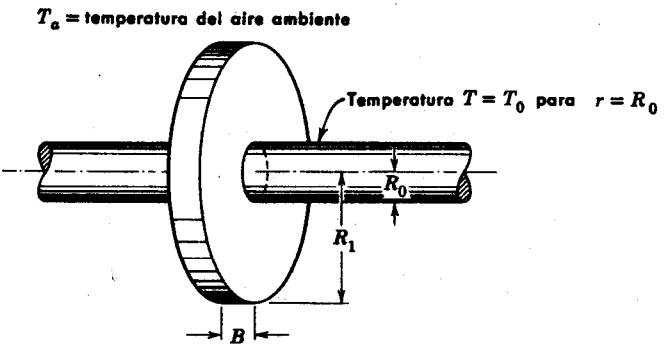
e. Integrar el resultado de *(d)* para obtener el flujo total de calor a través de la superficie de la tubería comprendida entre $z = 0$ y $z = L$.

Respuesta: e. $Q = 4\pi Rk(T_1 - T_0)\left(\frac{N}{9}\right)^{1/3}\left(\frac{L}{R}\right)^{2/3}[\Gamma(\frac{4}{3})]^{-1}$

9.Q$_4$ Pérdidas de calor en una **aleta circular**

a. Obtener el perfil de temperatura *T(r)* para una aleta circular de espesor *B*, situada sobre una tuberia cuya temperatura de la pared externa es T_0. Háganse las mismas suposiciones que en el caso de la aleta rectangular que se estudió en § 9.7. (Véase Fig. 9.Q.)

b. Dedúzcase una expresión para las pérdidas totales de calor en la aleta.



F g. 9.Q. Aleta circular situada sobre una tubería caliente.

9.R$_4$ Transmisión de calor por convección forzada para el flujo no-newtoniano en tubos. — Tiempos de contacto cortos, con densidad flujo de calor constante a través de la pared[1]

En el problema 9.N se han calculado los perfiles de temperatura para un fluido no-newtoniano de tres parámetros que fluye en un tubo circular con densidad de flujo de pared constante. Los cálculos se ajustaron al modelo desarrollado en §9.8 y por lo tanto, el resultado es una expresión asintótica del perfil de temperatura, que es sólo válida para distancias alejadas de la entrada del tubo.

En este problema se obtiene una solución asintótica en la región de entrada del tubo calentado. Imaginemos que el fluido está circulando con flujo laminar totalmente desarrollado a la temperatura $T = T_0$ en la región $z < 0$. En la región $z > 0$ hay una densidad de flujo de calor constante q_1 en la pared. Se desea hallar *Ten* función de r y z para pequeños valores de z. Utilizar un método similar al del problema 9.P.

a. Demostrar que la ecuación diferencial entre derivadas parciales que describe el transporte de calor es

$$\frac{\rho \hat{C}_p v_0}{R} s \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \tag{9.R-1}$$

en la que $v_0 = (\varphi_0 \tau_R + \varphi_1 \tau_R^{\alpha})R$. ¿Cuál ea el significado físico de v_0?

b. Utilizar la ley de Fourier con el fin de obtener la siguiente ecuación para la densidad de flujo de calor:

$$\frac{\rho \hat{C}_p v_0}{R} \frac{\partial q_s}{\partial z} = k \frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{\partial q_s}{\partial s}\right) \tag{9.R-2}$$

c. Escribir de nuevo la ecuación del apartado *(b)* en función de las siguientes variables adimensionales

$$Q = \frac{q_s}{q_1}; \qquad \sigma = \frac{s}{R}; \qquad \zeta = \frac{z}{R}; \qquad \text{Pé}_0 = \frac{\rho \hat{C}_p R v_0}{k} \tag{9.R-3,4,5,6}$$

[1] R. B. BIRD, *Chemie. Ing. Techn.*, *31, 569-572* (1959).

siendo $Pé_0$ el número de Péclet basado en la velocidad v_0 y el radio del tubo R. ¿Cuáles son las condiciones lhnite?

d. Resolver la ecuación diferencial entre derivadas parciales obtenida en (c) utilizando el método de combinación de variables y sabiendo que Q depende solamente de χ, siendo%

$$\chi = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{9\zeta/Pé_0}} \tag{9.R–7}$$

Demostrar que esto conduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $Q(\chi)$:

$$\chi \frac{d^2Q}{d\chi^2} + (3\chi^3 - 1)\frac{dQ}{d\chi} = 0 \tag{9.R-8}$$

¿Cuáles son las dos condiciones Limite?

e. Resolver la ecuación obtenida en *(d)* y utilizarla para hallar los perfiles de temperatura.

Respuesta: $$\Theta = \frac{T - T_0}{q_1R^2/k} = \sqrt[3]{\frac{9\zeta}{Pé_0}}\left\{\frac{e^{-\chi^3}}{\Gamma(\frac{4}{3})} - \chi\left[1 - \frac{\Gamma(\frac{4}{3}, \chi^3)}{\Gamma(\frac{4}{3})}\right]\right\}$$

donde $\Gamma(\frac{4}{3}, \chi^3)$ es una función gamma incompleta.

CAPÍTULO 10

LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS NO ISOTÉRMICOS

En el Capítulo 9 'hemos determinado los perfiles de temperatura en varios sistemas sencillos de transmisión de calor, mediante la aplicación de balances de energía a una envoltura, y hemos visto que estos perfiles podrían utilizarse para obtener otras magnitudes, tales como temperaturas medias y densidades de flujo de energía. En aquellos casos en que la transmisión del calor acompaña al flujo de un fluido, es necesario utilizar, además de un balance de energía, las ecuaciones de continuidad y movimiento. El'estudio del Capítulo 9 habrá proporcionado al lector algún conocimiento acerca. de los balances diferenciales de energía y su aplicación a los problemas sencillos de transmisión de calor. En este capítulo se generaliza el balance de energía aplicado a una envoltura con el fin de obtener la *ecuación de energía,* una ecuación entre derivadas parciales que describe el transporte de energía en un sólido o fluido homogéneos. .

Este capítulo esta también intimamente relacionado con el Capítulo 3, en el que se ha introducido al lector en la ecuación de continuidad (conservación de la materia), la ecuación de movimiento (conservación de La cantidad de movimiento), y la ecuación de energia mecánica (que se deduce de la ecuación de movimiento). La adición a esta serie de la *ecuación de energía* (conservación de la energía o primer principio de termodinámka) permite ampliar los análisis precedentes a sistemas no isotérmicos.

Se comienza en § 10.1 por deducir la ecuacibn de energía. Se resta después de ella la ecuación de energía *mecánica* con el fin de obtener la más frecuentemente utilizada ecuación de energía *calorífica.* En § 10.2 se expresa la ecuacibn de energía calorífica en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

Aunque nuestro principal interés en este capítulo reside en las distintas ecuaciones de energía, hemos creído de utilidad introducir en § 10.3 una aproximación a la ecuación de movimiento que resulta conveniente para la resolución de problemas de convección libre.

Como las ecuaciones de variación para sistemas isotérmicos pueden expresarse en una gran variedad de formas útiles, se presenta un resumen de ellas en § 10.4 para tener a mano una cómoda referencia. En § 10.5 se indica cómo pueden uti-

lizarse estas ecuaciones tabuladas en los problemas de transmisión de calor, descartando los términos que no son necesarios.

Finalmente, en § 10.6 se amplia el análisis dimensional de § 3.7 con el fin de obtener los grupos adimensionales clave que intervienen en los problemas de transmisión de calor.

§ 10.1 LAS ECUACIONES DE ENERGÍA

De igual forma que en § 3.2 se han generalizado los balances de cantidad de movimiento aplicados a una envoltura del Capítulo 2 para obtener las ***ecuaciones de movimiento, se*** pretende generalizar aquí los balances de energía aplicados a una envoltura del Capítulo 9 con el fin de obtener las ***ecuaciones de energía.*** Para ello se parte, como antes, de un elemento estacionario de volumen a través del cual fluye un líquido puro ; se escribe después la ley de la conservación de la energía para el fluido contenido en el interior de este elemento de volumen en un determinado instante :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{acumulación}\\ \text{de energía}\\ \text{cinética e interna}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de en-}\\ \text{trada de energía}\\ \text{cinética e interna}\\ \text{por convección}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de sa-}\\ \text{lida de energía}\\ \text{cinética e interna}\\ \text{por convección}\end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad neta}\\ \text{de adición de ca-}\\ \text{lor por conduc-}\\ \text{ción}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad neta}\\ \text{de trabajo comu-}\\ \text{nicado por el sis-}\\ \text{tema a los}\\ \text{alrededores}\end{array}\right\} \quad (10.1\text{ -- }1)$$

Éste es el primer principio de termodinámica expresado para un sistema «abierto» no estacionario. En realidad esta exposición del primer principio no es completa puesto que no se incluyen otras formas de energía y transporte de energía, tales como nuclear, radiactiva y electromagnética. La Ec. 10.1 — 1 representa una generalización con respecto a la Fc. 9.1-1, ya que se incluyen los efectos del trabajo y la energía cinética, y sirve también para el estado no estacionario. En la Ec. 10.1 — 1 la ***energía cinética*** corresponde a la energía relacionada con el movimiento observable del fluido (por ejemplo, $\frac{1}{2}\rho v^2$, tomando como base la unidad de volumen). La ***energtá interna*** corresponde a la energía relacionada con los movimientos fortuitos de traslación e internos de las moléculas más, la energía de interacción entre las moléculas; es decir, que la energía interna depende de la temperatura local y de la densidad del fluido. La energía potencial del fluido no aparece de forma explícita en la Ec. 10.1 — 1 ya que se ha preferido incluirla en el término de trabajo, como se estudiará después.

Escribimos ahora la **Ec. 10.1 — 1** para el elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$. (Véase Fig. 3.2— 1.) La velocidad de acumulación de energia cinética e interna en el interior de $\Delta x \Delta y \Delta z$ es

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z \frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2) \tag{10.1-2}$$

siendo $\hat{U}$ la energía interna por unidad de masa de fluido contenido en el elemento y v la velocidad local del fluido.

La velocidad neta de entrada de energía interna y **cinética** en el elemento por **convección** es

$$\begin{aligned} &\Delta y\, \Delta z\{v_x(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_x - v_x(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_{x+\Delta x}\} \\ &+ \Delta x\, \Delta z\{v_y(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_y - v_y(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_{y+\Delta y}\} \\ &+ \Delta x\, \Delta y\{v_z(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_z - v_z(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)|_{z+\Delta z}\} \end{aligned} \tag{10.1-3}$$

La velocidad neta de entrada de energía por conducción es

$$\begin{aligned} &\Delta y\, \Delta z\{q_x|_x - q_x|_{x+\Delta x}\} + \Delta x\, \Delta z\{q_y|_y - q_y|_{y+\Delta y}\} \\ &\qquad + \Delta x\, \Delta y\{q_z|_z - q_z|_{z+\Delta z}\} \end{aligned} \tag{10.1-4}$$

siendo q_x, q_y, q_z, los componentes x, y, z, del vector densidad de flujo de calor q.

El trabajo realizado por el elemento de fluido **contra** los alrededores **consta** de dos partes: el trabajo contra las fuerzas de volumen (por ejemplo, gravedad) y el trabajo contra las fuerzas de **superficie** (por ejemplo, fuerzas viscosas y de presión). **Recuérdese** que, (trabajo) = (fuerza) x (distancia en la dirección de la fuerza), y que (la velocidad de producción de trabajo) = (fuerza) x (velocidad en la dirección de la fuerza). La velocidad de producción de trabajo **contra** los tres componentes de la fuerza de gravitación por unidad de 'masa, g, es

$$-\rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \tag{10.14}$$

El signo menos se debe a que el trabajo se realiza contra la gravedad, siendo v y g opuestos. La velocidad de producción de trabajo contra la presión estática p **en** las seis caras de $\Delta x \Delta y \Delta z$, es

$$\begin{aligned} \text{AY}\ &\Delta z\{(pv_x)|_{x+\Delta x} - (pv_x)|_x\} + \Delta x\, \Delta z\{(pv_y)|_{y+\Delta y} - (pv_y)|_y\} \\ &\qquad + \Delta x\, \Delta y\{(pv_z)|_{z+\Delta z} - (pv_z)|_z\} \end{aligned} \tag{10.1-6}$$

Análogamente, la velocidad de producción de trabajo **contra** las fuerzas viscosas es

$$\begin{aligned} &\Delta y\, \Delta z\{(\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z)|_{x+\Delta x} - (\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z)|_x\} \\ &+ \Delta x\, \Delta z\{(\tau_{yx}v_x + \tau_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z)|_{y+\Delta y} - (\tau_{yx}v_x + \tau_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z)|_y\} \\ &+ \Delta x\, \Delta y\{(\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \tau_{zz}v_z)|_{z+\Delta z} - (\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \tau_{zz}v_z)|_z\} \end{aligned} \tag{10.1-7}$$

Substituimos ahora las expresiones anteriores en la Ec. 10.1 — 1 y dividimos toda la ecuación por $\Delta x \Delta y \Delta z$. Tomando el límite de la expresión que resulta cuando Δx, Δy y Δz tienden a cero, se obtiene una forma de la ecuación de energía:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2) \\
&\quad = -\left(\frac{\partial}{\partial x} v_x(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y} v_y(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} v_z(\rho \hat{U} + \tfrac{1}{2}\rho v^2)\right) \\
&\qquad - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \\
&\qquad - \left(\frac{\partial}{\partial x} p v_x + \frac{\partial}{\partial y} p v_y + \frac{\partial}{\partial z} p v_z\right) \\
&\qquad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z)\right)
\end{aligned} \tag{10.1-8}$$

Esta ecuación puede expresarse en una forma más compacta empleando la notación vectorial-tensorial.[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2) = -(\nabla \cdot \rho v(\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2)) - (\nabla \cdot q) + \rho(v \cdot g) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot \ldots \tag{10.1-9}$$

velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen

velocidad do entrada de energía por unidad de volumen debido a la convección

velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a la conducción

velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación

velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de presión

velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas viscosas

Es conveniente ahora reordenar la ecuación de energía con ayuda de las ecuaciones de movimiento y continuidad. Nótese que se ha seguido un proceso análogo

[1] El desarrollo que sigue se dedica principalmente a transformaciones matemáticas, en las que se utilizan fórmulas comunes de matemáticas y termodinámica. Es preferible que el lector, Por lo menos en la primera lectura, pase directamente a la Ec. 10.1—19, que se deduce de la Ec. 10. 1-9 *sin* más suposiciones adicionales.

al pasar de una forma de la ecuación de movimiento de la Ec. 3.2-5 a la forma que se expresa en la Ec. 3.2-9 con ayuda de la ecuación de continuidad.

Comenzamos por efectuar las diferenciaciones indicadas en el primer miembro de la Ec. 10.1-9, y de la contribución convectiva, para obtener

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(\hat{U}+\tfrac{1}{2}v^2)+(v\cdot\nabla(\hat{U}+\tfrac{1}{2}v^2))\right]+(\hat{U}+\tfrac{1}{2}v^2)\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\nabla\cdot\rho v)\right]$$
$$=-(\nabla\cdot q)+\rho(v\cdot g)-(\nabla\cdot pv)-(\nabla\cdot[\tau\cdot v]) \qquad (10.1\text{-}10)$$

El primer término del primer miembro de la Ec. 10.1 — 10 es la densidad local del fluido multiplicada por la derivada substancial de $(\hat{U}+\frac{1}{2}v^2)$. Como puede observarse, con ayuda de la ecuación de continuidad (Ec. 3.1—4), el segundo término es cero. Por tanto, se puede escribir

$$\rho\frac{D}{Dt}(\hat{U}+\tfrac{1}{2}v^2)=-(\nabla\cdot q)+\rho(v\cdot g)-(\nabla\cdot pv)$$
$$-(\nabla\cdot[\tau\cdot u]) \qquad (10.1\text{-}11)$$

Obsérvese que hemos obtenido ahora dos formas de la ecuación de energía, que corresponden a las dos formas obtenidas anteriormente para las ecuaciones de continuidad (Ecs. 3.1-4 y 6) y movimiento (Ecs. 3.2-8 y 10). La Ec. 10.1—9 describe los intercambios de energía en un fluido desde el punto de vista de un observador estacionario, y la Ec. 10.1-11 describe dichos cambios tal como serían vistos por un observador que se moviese con el fluido.

La Ec. 10.1-11 es una ecuación de variación para la suma de $\hat{U}$ y $\frac{1}{2}v^2$. El lector recordará que en § 3.3 se ha deducido una ecuación de variación para $\frac{1}{2}v^2$, que puede volverse a escribir de esta forma

$$\rho\frac{D}{Dt}(\tfrac{1}{2}v^2)=p(\nabla\cdot v)-(\nabla\cdot pv)+\rho(v\cdot g)$$
$$-(\nabla\cdot[\tau\cdot\ldots])+(\tau\ldots) \qquad (10.1\text{-}12)$$

Restando la Ec. 10.1 — 12 de la Ec. 10.1-11 se obtiene una ecuación de variación para $\hat{U}$,

$$\rho\frac{D\hat{U}}{Dt}=-(\nabla\cdot q)-p(\nabla\cdot v)-(\tau:\nabla v) \qquad (10.1\text{-}13)$$

velocidad de ganancia de energía interna por unidad de volumen	velocidad de entrada de energía interna por unidad de volumen debido a la conducción	velocidad *reversible* de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la compresión	velocidad *irreversible* de aumento de energía interna por unidad de volumen debido a la disipación viscosa

Por analogía con la ecuación de energía mecánica, la Ec. 10.1 — 13 puede denomi-

narse *ecuación de energía calorífica.* Generalmente, esta ecuación resulta más conveniente para operar en transmisión de calor que la ecuación completa de energía.

Es interesante comparar las ecuaciones de energía mecánica y energía calorífica, Ecs. 10.1-12 y 10.1-13. Obsérvese que sólo los términos $p(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$ son comunes a ambas ecuaciones, y que además intervienen con signos opuestos. Por consiguiente, estos términos describen la interconversión de energía mecánica y carífica. El término $p(\nabla \cdot v)$ puede ser positivo o negativo, según que el fluido se expansione o se comprima; por lo tanto, representa una forma reversible de intercambio. En cambio el término $(-\tau : \nabla v)$, es siempre positivo (véase Ec. 3.3-3) y representa por consiguiente, una forma *irreversible de* degradación de energía mecánica a energía calorífica.

Hasta ahora no se ha hecho mención de la energía potencial Φ. Si la fuerza externa g se expresa en función del gradiente de una función escalar (por ejemplo, $g = -\nabla\Phi$), resulta

$$\rho(v \cdot g) = -\rho(v \cdot \nabla\Phi) = -\rho \frac{D\Phi}{Dt} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (10.1\text{–}14)$$

Si Φ es independiente del tiempo, el ultimo termino desaparece, y la Ec. 10.1 — ll se transforma en

$$\rho \frac{D}{Dt}(\hat{U} + \Phi + \tfrac{1}{2}v^2) = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) \qquad (10.1\text{-}15)$$

Ésta es una ecuación de variación para $\hat{E} = \hat{U} + \Phi + \frac{1}{2}v^2$, que denominamos *energía total.* Para problemas terrestres en los que no intervienen más fuerzas que las de gravedad, Φ es independiente del tiempo y la Ec. 10.1 — 15 es válida.

Para la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles es conveniente expresar la ecuación de energía calorífica (Ec. 10.1 — 13) en función de la temperatura y del calor específico del fluido en vez de la energía interna. Vamos a escribir la ecuación en estos términos, teniendo en cuenta que la energía interna $\hat{U}$ puede considerarse como una función de $\hat{V}$ y T,

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT$$

$$= \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] d\hat{V} + \hat{C}_v\, dT \qquad (10.1\text{–}16)$$

En esta expresión $\hat{C}_v$ es el calor específico a volumen constante por unidad de masa. Por tanto, el producto de ρ por la derivada substancial de $\hat{U}$, será

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} \qquad (10.1\text{-}17)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, el término $\rho(D\hat{V}/Dt)$ puede transformarse de la siguiente forma:

$$\rho \frac{D\hat{V}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = (\nabla \cdot v) \tag{10.1-18}$$

Substituyendo la Ec. 10.1—18 en la Ec. 10.1—17, y la Ec. 10.1—17 en la Ec. 10.1—13, se obtiene

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v) \tag{10.1-19}$$

que es la *ecuación de energía* en función de la temperatura del fluido *T. Esta* ecuación es tan general como la Ec. 10.1—9, pero es una forma más útil para calcular los perfiles de temperatura. El resto de esta sección se dedica a las formas simplificadas de esta ecuación que tienen mayor aplicación práctica.

La primera simplificación de la Ec. 10.1-9 se obtiene expresando q en función de los gradientes de temperatura (véanse Ecs. 8.1-3 a 5) y τ en función de los gradientes de velocidad (véanse Ecs. 3.2-11 a 16). Según esto, para un fluido newtoniano de conductividad calorífica constante, la Ec. 10.1-19 resulta

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}(\nabla \cdot v) + \mu\Phi_v \tag{10.140}$$

Esta ecuación establece que la temperatura de un elemento móvil de fluido varía debido a: (*a*) conducción de calor, (*b*) efectos de expansión, y (c) calentamiento viscoso. La magnitud Φ_v se denomina función de disipación, y su forma en coordenadas *rectangulares es*

$$\begin{aligned}\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] \\ + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 \\ - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\end{aligned} \tag{10.1-21}$$

La Ec. 10.1-20 puede utilizarse también para fluidos newtonianos generalizados (véase Ec. 3.6-2) substituyendo η por μ.

Haremos mención especial de otras cuatro simplificaciones de la ecuacih de energía que son muy utilizadas. En todas ellas se omitirá el término de disipación viscosa, que sólo es necesario en casos especiales. Supondremos también que la *conductividad calorifica es constante.*

(i) Para un *gas ideal* $(\partial p/\partial T)_{\hat{V}} = p/T$, y *se* obtiene

(gas ideal) $$\rho\hat{C}_v\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - p(\nabla\cdot v) \qquad (10.1-22)$$

(ii) Para un *fluido a presión constante,* la Ec. 10.1 — 16 puede modificarse para dar

$$d\hat{U} = -p\,d\hat{V} + \hat{C}_p\,dT \qquad (10.1\text{-}23)$$

Siguiendo un desarrollo análogo al comprendido entre las Ecs. 10.1-16 y 10.1-20, se obtiene para este caso (despreciando la disipación viscosa):

(fluido a presión constante) $$\rho\hat{C}_p\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \qquad (10.1\text{-}24)$$

(iii) Para *fluidos incompresibles* (p = constante), $\hat{C}_p = \hat{C}_v$ y $(\nabla\cdot v)$ es cero. Por lo tanto la Ec. 10.1-20 se reduce a

(fluido incompresible) $$\rho\hat{C}_p\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \qquad (10.1\text{-}25)$$

Obsérvese que las Ecs. 10.1-24 y 25 son la misma, pero describen. situaciones físicas totalmente diferentes.

(iv) Para sólidos, la densidad puede considerarse generalmente constante, y por tanto se puede tomar $v = 0$:

(sólido) $$\rho\hat{C}_p\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \qquad (10.1\text{-}26)$$

Las Ecs. 10.1-22 a 26 se toman como punto de partida para la mayor parte de los tratamientos posteriores de transmisión de calor.

El lector recordará que en el Capítulo 9 se han incluido en los balances de energía calorífica aplicados a una envoltura varios «términos de manantial». En el desarrollo anterior se ha visto que el manantial de *disipación viscosa* S_v *es* $-(\tau\colon \mathrm{Va})$; este término aparecía de forma automática debido a que se habían considerado correctamente todos los términos de trabajo y energía mecánica. El desarrollo que se hace en esta sección no conduce a un manantial *químico* S_c, debido a que sólo consideramos fluidos puros; sin embargo, intervendrá un término de este tipo en el estudio de mezclas del Capítulo 18. De igual forma, tampoco aparece un manantial *nuclear* S_n o un manantial *eléctrico* S_e, puesto que no se han tenido en cuenta estas formas de energía.[2] Para describir los perfiles de temperatura que resultan de la generación de calor de origen químico, nuclear y eléctrico, se puede añadir el correspondiente término de manantial al segundo miembro de las Ecs. 10.1-20 a 26.

[2] B. T. CHU, *Physics of Fluids*, *2, 473-484* (1959).

§ 10.2 LA ECUACIÓN DE ENERGÍA EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

En esta sección se expresan las Ecs. 8.1-6 y 10.1-19 y 20 en coordenadas rectangulares,' cilíndricas y esféricas. No se presentan en la Tabla 10.2-2 las Ecs. 10.1-22, 24, 25 v 26, puesto que pueden obtenerse fácilmente en coordenadas curvilíneas por analogía con la Ec. 10.1-20.

En este caso, existe también la misma ventaja de utilizar coordenadas curvilíneas que se ha indicado en § 3.4. Plantear problemas en coordenadas curvilíneas mediante balances aplicados a una envoltura es realizar un esfuerzo inútil. En vez de esto, se partirá siempre de las ecuaciones nentrales de variación, descartando los términos que no sean necesarios.

§ 10.3 LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA CONVECCIÓN FORZADA Y CONVECCIÓN LIBRE EN EL FLUJO NO ISOTÉRMICO

Como ya se ha indicado al iniciar' este capítulo, la ecuación de movimiento que se ha desarrollado en § 3.2 es válida para el flujo no isotérmico. Teniendo esto en cuenta, vamos a considerar ahora que ρ y μ son funciones de la temperatura y de la presión. En los problemas de convección forzada se acostumbra utilizar la ecuación de movimiento en una de las formas que se indican en el Capítulo 3. En convección libre, la variación de ρ con la temperatura tiene una importancia crítica, y es conveniente modificar la ecuación de movimiento para tener en cuenta automáticamente los efectos de flotación. La conveniencia de esta modifkación se ha visto ya en § 9.9.

Comencemos considerando un sistema de convección libre, en el que la temperatura del fluido varía alrededor de un cierto valor medio T. Si todas las partes del

TABLA 10.2-1

COMPONENTES DE LA DENSIDAD DE FLUJO DE ENERGÍA q

Rectangulares	Cilíndricas	Esféricas
$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$ (A)	$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$ (D)	$q_r = -k\frac{\partial T}{\partial r}$ (G)
$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$ (B)	$q_\theta = -k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$ (E)	$q_\theta = -k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}$ (H)
$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$ (C)	$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$ (F)	$q_\phi = -k\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}$ (I)

TABLA 10.2–2

LA ECUACIÓN DE ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LAS DENSIDADES DE FLUJO DE ENERGÍA Y DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Coordenadas rectangulares:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\left\{\tau_{xx}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v_y}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}$$
$$-\left\{\tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right\} \qquad (A)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\tau_{\theta\theta}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)\right.$$
$$\left.+\tau_{zz}\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}-\left\{\tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]+\tau_{rz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.+\tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\right\} \qquad (B)$$

Coordenadas esféricas:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)=-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2q_r)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}\right]-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)-\left\{\tau_{rr}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r}{r}\right)\right.$$
$$\left.+\tau_{\phi\phi}\left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)\right\}-\left\{\tau_{r\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)\right.$$
$$\left.+\tau_{r\phi}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\phi}{r}\right)+\tau_{\theta\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}-\frac{\cot\theta}{r}v_\phi\right)\right\} \qquad (C)$$

Nota: Los términos entre corchetes { } corresponden a la disipación viscosa y pueden generalmente despreciarse, excepto para sistemas que poseen elevados gradientes de velocidad.

TABLA 10.2–3

LAS ECUACIONES DE ENERGÍA EN FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE TRANSPORTE

(para fluidos newtonianos de ρ, μ y k constantes; obsérvese que la constancia de ρ iinplica que $\hat{C}_v = \hat{C}_p$)

Coordenadas *rectangulares:*

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$
$$+ 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \mu\left\{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (A)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$
$$+ 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \mu\left\{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^2\right\} \qquad (B)$$

Coordenadas esféricas:

$$\rho\hat{C}_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) = k\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right] + 2\mu\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)^2\right\}$$
$$+ \mu\left\{\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]^2\right.$$
$$\left. + \left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\mathrm{sen}\,\theta}\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]^2\right\} \qquad (C)$$

Nota: Los términos entre corchetes { } corresponden a la disipación viscosa y generalmente pueden despreciarse, excepto para sistemas con gradientes de velocidad elevados.

fluido estuviesen a la temperatura $\bar{T}$, y si el fluido no se moviese, el gradiente de presión en el sistema vendría dado por la ecuación de movimiento, siendo v = 0:

$$\nabla p = \bar{\rho} g \tag{10.3-1}$$

en la que $\bar{\rho}$ es la densidad del fluido a la temperatura $\bar{T}$ y presión local. Si los gradientes de velocidad resultan exclusivamente de las desigualdades de temperatura, el movimiento del fluido es, generalmente, muy lento, y la Ec. 10.3— 1 puede tomarse como una aproximación bastante correcta del gradiente de presión, aún para el fluido en movimiento. Teniendo en cuenta esta suposición, la ecuación de movimiento puede expresarse en la siguiente forma

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\bar{\rho} g - [\nabla \cdot \tau] + \rho g \tag{10.3–2}$$

Esta ecuación puede simplificarse substituyendo ρ por $\bar{\rho}$ en el primer miembro, y ρ por $\bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T})$ en el término ρg (véase § 9.9), de forma que

$$\underset{\text{masa por unidad de volumen} \times \text{aceleración}}{\bar{\rho} \frac{Dv}{Dt}} = \underset{\text{fuerzas viscosas por unidad da volumen}}{-[\nabla \cdot \tau]} \underset{\text{fuerza de flotación por unidad de volumen}}{- \bar{\rho}\bar{\beta} g (T - \bar{T})} \tag{10.3-3}$$

Ésta es la ecuación que se utilii en los problemas de convección libre, cuando puede definirse una temperatura media $\bar{T}$. Obsérvese que es una ecuación aproximada, limitada para bajas velocidades de fluido y pequeñas variaciones de temperatura. En todos los tratamientos de convección libre que se realizan en este libro seguiremos la norma habitual de omitir las rayas situadas sobré ρ y β.

Nos hemos expresado aquí como si un sistema no isotérmico tuviera que pertenecer a una de las dos formas de convección libre o forzada; realmente, en las aplicaciones ingenieriles, esta distinción es arbitraria y se nace generalmente por conveniencia. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que la convección libre y forzada representan dos casos límite, uno en el que las fuerzas de flotación son despreciables, y otro en el que los efectos de la presión y las fuerzas de gravitación pueden expresarse totalmente en función de las fuerzas de flotación. La transición entre la convección libre y forzada es gradual,[1] y existe una gran región mal definida en la que el comportamiento del sistema no puede predecirse satisfactoriamente sólo con el análisis de la convección libre o de la convección forzada. Este tipo intermedio de comportamiento se presenta en muchos casos industriales importantes.

[1] Véase, por ejemplo, A. ACRIVOS, *A. I. Ch. E. Journal, 4, 285-289* (1958).

§ 10.4 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN

En el Capítulo 3, y en las tres primeras secciones de éste, se han deducido las tres ecuaciones de variación para fluidos puros, y se ha presentado cada una de ellas en diversas formas. Es conveniente hacer ahora un resumen de estas ecuaciones, no sólo para disponer de un conveniente «diccionario», sino también para ver cómo se puede disponer el estudio del transporte de energía y cantidad de movimiento en fluidos homogéneos para presentarlo en una forma ordenada. Este resumen aparece en las Tablas 10.4-1 y 2, en las que para mayor brevedad se utiliza notación vectorial-tensorial. Siempre que es posible se hace referencia a la primera aparición de cada ecuación en el texto. Sin embargo, algunas expresiones de las tablas no han aparecido con anterioridad, y puede tener interés para el lector el comprobarlas.

En la Tabla 10.4— 1 se comienza por las ecuaciones de variación en función τ y q, tanto para un observador estacionario como para uno que se mueve con el fluido. Todas las formas de la ecuación de energía son totalmente equivalentes a la Ec. 10.1-9, excepto las Ecs. *D y N.*

En la Tabla 10.4-2 se resumen las ecuaciones de variación para el caso especial de ρ, μ y k constantes. A pesar de estas restricciones, estas ecuaciones se han utilizado grandemente para el análisis de problemas de transmisión del calor.

En algunos problemas se puede obtener una información muy útil a partir de las ecuaciones de la Tabla 10.4— 1 tomando τ y q iguales a cero, es decir, despreciando totalmente los fenómenos de transporte molecular. Para saber si estas suposiciones son válidas o no, se requiere bastante experiencia y criterio. Ejemplo de casos en los que pueden despreciarse τ y q son: (a) procesos de flujo adiabático en sistemas que han sido diseñados para obtener efectos de fricción mínimos, como venturímetros y turbinas, y (b) flujo de alta velocidad alrededor de objetos sumergidos. En ninguno de estos dos ejemplos se podría obtener información acerca del estado del fluido en las inmediaciones de la separación sólido-fluido, pero en cambio, la descripción del flujo .a una cierta distancia de la superficie de separación sería bastante aceptable.

§ 10.5 USO DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN EN LOS PROBLEMAS DE TRANSMISIÓN DE CALOR EN ESTADO ESTACIONARIO

En el Capítulo 3 se ha visto que es más rápido y seguro plantear problemas de flujo simplificando las ecuaciones de continuidad y movimiento, que establecer un balance diferencial de cantidad de movimiento para cada nuevo caso. De igual forma, veremos aquí que el mejor método para plantear problemas de transmisión de calor consiste en simplificar las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía. Con el fin de ilustrar los procedimientos a seguir, resolveremos varios ejemplos, en la mayor parte de los cuales sólo intervienen ecuaciones diferenciales ordinarias. En el Capítulo ll se estudian algunos casos más complejos que tienen interés en ingeniería y que conducen a ecuaciones entre derivadas parciales.

TABLA 10.4-1

ECUACIONES DE **VARIACIÓN** PARA FLUIDOS PUROS EN FUNCIÓN DE LAS DENSIDADES DE FLUJO

Ec.	Forma especial	En función *de* D/Dt		Observaciones
Cont.	—	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v)$	3.1-6 (A)	Para $D\rho/Dt = 0$ se transforma en $(\nabla \cdot v) = 0$
Movimiento	Convección forzada	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$	3.2-10 (B)	Para $\tau = 0$ se transforma en la ecuación de Euler
Movimiento	Convección libre	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \rho\beta g(T - \hat{T})$	10.3-3 (C)	Aproximada
Energía	En función de $\hat{E} = \hat{U} + \hat{K} + \hat{\Phi}$	$\rho \frac{D\hat{E}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$	10.1-15 (D)	Sólo exacta para $\hat{\Phi}$ independiente del tiempo
Energía	En función de $\hat{U} + \hat{K}$	$\rho \frac{D(\hat{U} + \hat{K})}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) + \rho(v \cdot g)$	10.1-11 (E)	
Energía	En función de $\hat{K} = \frac{1}{2}v^2$	$\rho \frac{D\hat{K}}{Dt} = -(v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho(v \cdot g)$	3.3-1 (F)	
Energía	En función de $\hat{U}$	$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - p(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$	10.1-13 (G)	El término que contiene p es cero para $D\rho/Dt = 0$
Energía	En función de $\hat{H}$	$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \frac{Dp}{Dt}$	(H)	
Energía	En función de $\hat{C}_v$ Y T	$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$	10.1-19 (I)	Para un gas ideal $T(p\partial/\partial T)_\rho = p$
Energía	En función de $\hat{C}_p$ Y T	$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v)$	(J)	Para un gas ideal $(\partial \ln \hat{V}/\partial \ln T)_p = 1$

Tabla 10.4— 1 *(Continuación)*

Ec.	Forma especial	En función de $\partial/\partial t$		
Cont	—	$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -(\nabla \cdot \rho v)$		3.1–4 (*K*)
Movimi	Convección forzada	$\frac{a}{\partial t}\rho v = -[\nabla \bullet \text{p4} - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$		3.2–8 (*L*)
	Convección libre	$\frac{a}{\partial t}\rho v = -[\nabla \cdot \rho v v] - [\nabla \cdot \tau] - \rho\beta g(T - \hat{T})$	(Aproximada)	(*M*)
Energía	En función de $\hat{E} = \hat{U} + \hat{K} + \Phi$	$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{E} = -(\nabla \cdot \rho\hat{E}v) - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$		(*N*)
	En función de $\hat{U} + \hat{K}$	$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\hat{U} + \hat{K}) = -(\nabla \cdot \rho(\hat{U} + \hat{K})v) - (\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot pv) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) + \rho(v \cdot g)$		10.1–9 (*O*)
	En función de $\hat{K} = \frac{1}{2}v^2$	$\frac{a}{\partial t}\rho\hat{K} = -(\nabla \cdot \rho\hat{K}v) - (v \cdot \nabla p) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho(v \cdot g)$		3.3–2 (*P*)
	En función de $\hat{U}$	$\frac{a}{\partial t}\rho\hat{U} = -(\nabla \cdot \rho\hat{U}v) - (\nabla \cdot q) - p(\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v)$		(*Q*)
	En función de $\hat{H}$	$\frac{a}{\partial t}\rho\hat{H} = -(\nabla \cdot \rho\hat{H}v) - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \frac{Dp}{Dt}$		(*R*)
	En función de $\hat{C}_v$ y T	$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{C}_v T = -(\nabla \cdot \rho\hat{C}_v T v) - (\nabla \cdot q) - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\nabla \cdot v) - (\tau : \nabla v) + \rho T\frac{D\hat{C}_v}{Dt}$		(*S*)
	En función de $\hat{C}_p$ y T	$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{C}_p T = -(\nabla \cdot \rho\hat{C}_p T v) - (\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T}\right)_p \frac{Dp}{Dt} + \rho T\frac{D\hat{C}_p}{Dt}$		(*T*)

TABLA 10.4 -2

ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA FLUIDOS PUROS DE ρ, μ y k CONSTANTES

	Ec.	Forma especial	Ecuación en forma simbólica		Sistema coordenado		
					Rect.	Cil.	Esf.
Cont.		—	$(\nabla \cdot v) = 0$	*(A)*	Tabla 3.4-1 **Ec.** *A*	Tabla 3.4-1 *F.c. B*	Tabla 3.4-1 **Ec.** c
Movimiento		Convección forzada	$\rho \frac{Do}{Dt} = -\nabla p + \mu\nabla^2 v + \rho g$	*(B)*	Tabla 3.4-2 **Ecs.** *D, E, F*	Tabla 3.4-3 **Ecs.** *D, E, F*	Tabla 3.4-4 **Ecs.** *D, E, F*
		Convección libre	$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu\nabla^2 v - \rho\beta g(T - \bar{T})$	*(C)*	—	—	—
Energía		En función de $\hat{U}$	$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$	*(D)*	—	—	—
		En función de $\hat{C}_v$ y T	$\rho\hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \mu\Phi_v$	*(E)*	**Tabla 10.2—3 Ec.** *A*	**Tabla 10.2—3 Ec.** *B*	Tabla 10.2-3 **Ec.** c

Antes de exponer estos ejemplos, vamos a ver cómo se simplifican las ecuaciones de variación para deducir la Ec. 9.8-11, que es la ecuación diferencial para la convección laminar forzada en un largo tubo circular. Comenzamos por observar que $v_r = v_\theta = q_\theta = 0$. Suponemos, después, que todas las propiedades físicas son constantes y que la disipación viscosa es despreciable. Las ecuaciones de variación en coordenadas cilíndricas que resultan para este sistema son

(continuidad) $$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(10.5-1)}$$

(movimiento) $$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \qquad (10.5\text{-}2)$$

(energía) $$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = +k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \qquad (10.5\text{-}3)$$

La ecuación de continuidad nos permite descartar el primer miembro de la ecuación de movimiento y el último término del segundo. Es posible entonces integrar directamente la ecuación de movimiento para obtener el perfil parabólico de velocidad que se ha hallado en § 2.3 y substituir la distribución de velocidad que resulta en la Ec. 10.5—3, con lo que se obtiene la Ec. 9.8-11. De igual forma, pueden plantearse fácilmente otros problemas del Capítulo 9 simplificando las ecuaciones de variación.

Ejemplo 10.5—1. Flujo tangencial en tubos concéntricos con generación de calor de origen viscoso

Determinar fa distribución de temperatura en un fluido newtoniano incompresible contenido entre dos cilindros coaxiales, el exterior de los cuales está girando en estado estacionario con una velocidad angular Ω_o. (Véase § 9.4 y ejemplo 3.5— 1). Utilícese la nomenclatura del Ejemplo 3.5-1 y supóngase que κ es bastante pequeño, de forma que es preciso tener en cuenta la curvatura de las líneas de corriente del fluido. Considérese que las superficies mojadas de los cilindros externo e interno están a las temperaturas T_1 y T_κ, respectivamente; supóngase flujo laminar estacionario y despréciese la variación de ρ, μ, y k con la temperatura. Este ejemplo es una ilustración de un problema de convección forzada; primeramente se resuelve la ecuación de movimiento para obtener los perfiles de velocidad; la distribución de velocidad que resulta se introduce en la ecuación de energía; finalmente se resuelve esta última para obtener los perfiles de temperatura. Este problema tiene interés en. relación con los efectos caloríficos en viscosimetría.

Solución. Puesto que se desprecia el efecto de la temperatura sobre las propiedades físicas, se puede utilizar la distribución de velocidad del Ejemplo 3.5-1:

$$v_\theta = \Omega_o R \frac{\left(\frac{r}{\kappa R} - \frac{\kappa R}{r}\right)}{\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)} \qquad v_r = v_z = 0 \qquad \textbf{(10.5-4)}$$

La ecuación, de energía se puede obtener de la Ec. B de la Tabla 10.2-3:

$$0 = k\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \mu\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^2 \qquad (10.5\text{–}5)$$

Substituyendo ahora la Ec. 10.5−4 en la Ec. 10.5−5 y efectuando la diferenciación indicada, se obtiene una ecuación diferencial sencilla para la distribución de temperatura:

$$0 = k\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{4\mu\Omega_0^2\kappa^4R^4}{(1-\kappa^2)^2}\frac{1}{r^4} \qquad (10.5\text{-}6)$$

Esta ecuación puede expresarse en función de magnitudes adimensionales, haciendo

$$\xi = \frac{r}{R} = \text{coordenada radial adimensional} \qquad (10.5\text{-}7)$$

$$\Theta = \frac{T-T_\kappa}{T_1-T_\kappa} = \text{temperatura adimensional} \qquad (10.5\text{-}8)$$

$$N = \frac{\mu\Omega_0^2R^2}{k(T_1-T_\kappa)}\cdot\frac{\kappa^4}{(1-\kappa^2)^2} = \mathrm{Br}\,\frac{\kappa^4}{(1-\kappa^2)^2} \qquad (10.5\text{-}9)$$

siendo Br el número de Brinkman para el sistema. (Véase § 9.4.) Por tanto, la Ec. 10.5 −6 se transforma en

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -4N\frac{1}{\xi^4} \qquad (10.5\text{–}10)$$

Integrando dos veces con respecto a ξ se obtiene

$$\Theta = -N\frac{1}{\xi^2} + C_1\ln\xi + C_2 \qquad (10.5\text{–}11)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 están determinadas por las condiciones límite:

C.L. 1: para $\xi = \kappa$, $\Theta = 0$ (10.5−12)

C.L. 2: para $\xi = 1$, $\Theta = 1$ (10.5−13)

La expresión final para la distribución de temperatura reducida es por tanto

$$\Theta = \left((N+1) - \frac{N}{\xi^2}\right) - \left((N+1) - \frac{N}{\kappa^2}\right)\frac{\ln\xi}{\ln\kappa} \qquad (10.5\text{–}14)$$

Cuando N = 0, se obtiene la distribución de temperatura para una envoltura cilíndrica inmóvil de espesor $R(1-\kappa)$, cuyas temperaturas de las paredes interna y externa son T_κ y T_1, respectivamente. Si N es bastante grande, puede en realidad existir un máximo en la distribución de temperatura situado en

$$\xi = \left(\frac{-2N\ln\kappa}{N/\kappa^2 - (N+1)}\right)^{1/2} \qquad (10.5\text{–}15)$$

siendo la temperatura en este punto superior a cualquiera de las dos T_κ y T_1.

Ejemplo **10.5—2. Flujo** estacionario de **una película** no **isotérmica**

Un líquido desciende con flujo laminar estacionario sobre la **superficie** de un plano inclinado, tal como se indica en las Fig. 2.2-1 y 2. Las condiciones son **tales** que la superficie libre del Iíquido se mantiene a $T = T_0$, *y* la **superficie** del **sólido** situada en $x = \delta$ se mantiene a $T = T_\delta$. **Las** correspondientes viscosidades **del** fluido son μ_0 y μ_δ, **respectivamente** y tanto la densidad como la conductividad calorífica pueden suponerse constantes. Desarrollar expresiones para la **distribución** de velocidad **en** función de las propiedades del **fluido. Supóngase** que la **variación** de la viscosidad con la temperatura puede expresarse mediante una ecuación de la forma

$$\mu = Ae^{B/T} \tag{10.5–16}$$

de acuerdo con lo que sugiere la teoría de Eyring estudiada **en §** 1.5, siendo A y B **constantes** empíricas. **Los** efectos finales y el calentamiento viscoso, pueden despreciarse.

En **este** ejemplo, se resuelve en primer lugar la ecuación 'de **energía** para obtener el perfil de temperatura, que se **utiliza después** para determinar la variación de la viscosidad con la distancia; por último, resolviendo la **ecuación** de **movimiento** se **obtiene la** distribucibn de velocidad.

Solución. Comenzamos con la ecuación de energía, que en este caso se reduce a

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{10.5–17}$$

Esta **ecuación** puede integrarse de forma **inmediata** utilizando los valores conocidos de las temperaturas extremas, para obtener la distribución de temperatura en la película:

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{x}{\delta} \tag{10.5–18}$$

Valiéndose de la **Ec. 10.5—18** y de los valores conocidos de las viscosidades extremas, se puede determinar la **viscosidad** en **función** de la **posición** en la película. Cuando la diferencia de temperatura a **través** de la **película es** moderada, se puede escribir:'

[1] De acuerdo con la **Ec, 1.5—** 12, μ/μ_0 debería ser de la forma

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left[B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right] \tag{10.5–19a}$$

en la que Bes una constante. Combinando la **10.5—19a con** la **Ec. 10.5—18** se obtiene

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left(\frac{B}{TT_0}(T_0 - T_\delta)\frac{x}{\delta}\right)$$

$$\approx \exp\left(\frac{B}{T_\delta T_0}(T_0 - T_\delta)\frac{x}{\delta}\right) \tag{10.5–19b}$$

siendo la segunda **expresión** una buena aproximación si la **variación** de temperatura **es pequeña.** Introduciendo **la Ec.** 10.5 **— 19a,** expresada para $T = T_\delta$, en la **Ec.** 10.5 **—** 196. se obtiene

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left(\frac{x}{\delta}\ln\frac{\mu_\delta}{\mu_0}\right) = \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_0}\right)^{x/\delta} \tag{10.5–19c}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\mu_\delta}{\mu_0}\right)^{x/\delta} \tag{10.5-19}$$

Esta expresión es equivalente a la Ec. 2.2−22, siendo $-a = \ln(\mu_\delta/\mu_0)$. Vemos por tanto que la elección aparentemente arbitraria de la distribución de viscosidad del ejemplo 2.2-2, es en realidad razonable y está de acuerdo con el comportamiento observado para líquidos típicos. Podemos escribir ahora la expresión que se desea para la distribución de velocidad a partir de los resultados obtenidos anteriormente en el Ejemplo 2.2-2:

$$v_z = \left(\frac{\rho g \cos\beta}{\mu_0}\right)\left(\frac{\delta}{\ln \mu_\delta/\mu_0}\right)^2\left[\frac{1 + (x/\delta)\ln(\mu_\delta/\mu_0)}{(\mu_\delta/\mu_0)^{x/\delta}} - \frac{1 + \ln(\mu_\delta/\mu_0)}{(\mu_\delta/\mu_0)}\right] \tag{10.5-20}$$

Ejemplo 10.5−3. Enfriamiento por transpiración

Consideremos dos envolturas esféricas porosas de radios κR y R, tal como se indica en la Fig. 10.5−1. La superficie interna de la envoltura exterior está a $T = T_1$, y la superficie exterior de la interna se mantiene a una temperatura inferior, T_κ.

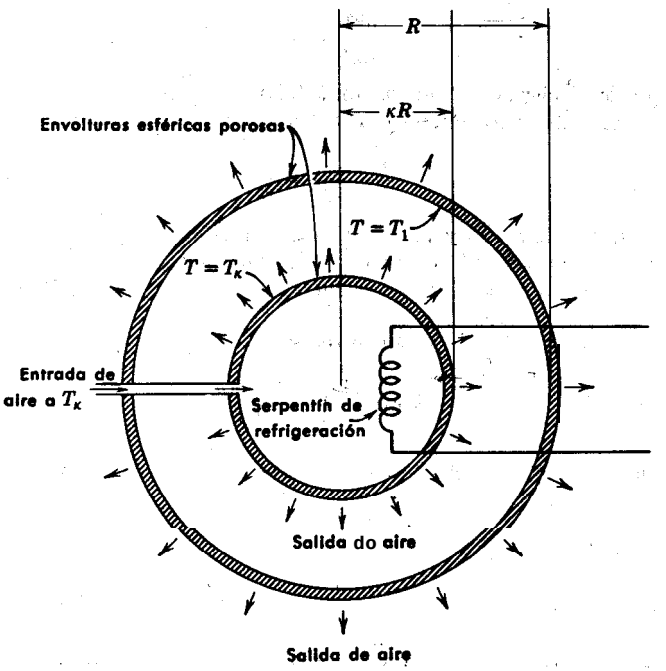


Fig. 10.5-1. Enfriamiento por transpiración. La esfera interna se enfría mediante el serpentín de refrigeración con el fin de mantener su temperatura a T_κ. Al insuflar aire hacia fuera, como se indica en la figura, se necesita menos refrigeración.

Radialmente sale aire seco a la temperatura $T = T_\kappa$ desde la esfera interna al espacio intermedio y de aquí al exterior a través de la esfera externa. Deducir una expresión para la velocidad necesaria de eliminación de calor de la esfera interna, en función de la velocidad **másica** de flujo del gas. Supóngase que el flujo es laminar estacionario y que la velocidad del gas es pequeña.

En este ejemplo se resuslven las ecuaciones de continuidad y energía para obtener la distribución de temperatura.

Solución. Para este sistema $v_\theta = v_\phi = 0$, y la ecuación de ***continuidad se*** reduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\rho v_r) = 0 \tag{10.5-21}$$

Esta ecuación puede integrarse para obtener

$$r^2\rho v_r = \text{const.} = \frac{w_r}{4\pi} \tag{10.5-22}$$

siendo w_r la velocidad radial de flujo de masa del gas.

La ecuación de ***movimiento*** puede integrarse para obtener el incremento de presión entre las esferas interna y externa. Sin embargo, para bajas velocidades de gas esta información tendría poco **interés.**

La ecuación de ***energía*** para el sistema es

$$\rho\hat{C}_p v_r\frac{dT}{dr} = k\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) \tag{10.5-23}$$

Hemos utilizado la **Ec.** 10.1-24 para un fluido puro a presión constante wn conductividad **calorífica** también constante. Para escribir la ecuación en coordenadas **esféricas** nos hemos **guíado** por la **Ec.** C de la Tabla 10.2-3. Acontinuación se utiliza la **Ec. 10.5—22** para eliminar v, de la **Ec.** 10.5-23; de esta forma se obtiene una ecuación diferencial que describe la distribución de temperatura ***T(r)*** en el espacio comprendido entre las esferas

$$\frac{dT}{dr} = \frac{4\pi k}{w_r\hat{C}_p}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) \tag{10.5-24}$$

Integrando dos veces y utilizando los valores conocidos de las temperaturas extremas, se llega a

$$\frac{T - T_1}{T_\kappa - T_1} = \frac{e^{-R_0/r} - e^{-R_0/R}}{e^{-R_0/\kappa R} - e^{-R_0/R}} \tag{10.5-25}$$

en la que $R_0 = w_r\hat{C}_p/4\pi k$. **Obsérvese** que para Ra **pequeño** la **Ec.** 10.5-25 se reduce a

$$\frac{T - T_1}{T_\kappa - T_1} = \frac{1/r - 1/R}{1/\kappa R - 1/R} \tag{10.5-26}$$

Si además R es infinito y κR es finito, para las proximidades de la superficie de la esfera interior, resulta

$$\frac{T - T_\infty}{T_\kappa - T_\infty} = \frac{\kappa}{r} \tag{10.5-27}$$

La Ec. 10.5—27 se ha obtenido ya en el problema 9.H.

La velocidad de flujo de calor en la dirección r negativa de la esfera interior (es decir, la velocidad de eliminación de calor por el refrigerante) es

$$Q = -4\pi\kappa^2 R^2 q_r|_{r=\kappa R} \tag{10.5-28}$$

Súbstituyendo la expresión para q_r de la Ec. G, Tabla 10.2-1, en la Ec. 10.5 -28, se llega a

$$Q = +4\pi k\kappa^2 R^2 \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=\kappa R} \tag{10.5-29}$$

Evaluamos ahora dT/dr en la superficie $r = \kappa R$ con ayuda de la Ec. 10.5—25, a fin de obtener la relación que se desea para la velocidad de eliminación de calor:

$$Q = 4\pi k R_0 (T_1 - T_\kappa)/(e^{(R_0/\kappa R)(1-\kappa)} - 1) \tag{10.5-30}$$

Cuando $R_0 = 0$, se obtiene la velocidad de eliminación de calor para una velocidad del gasigualacero:

$$Q_0 = 4\pi k\kappa R(T_1 - T_\kappa)/(1 - \kappa) \tag{10.5-31}$$

Por tanto, la «eficacia», ϵ, de la transpiración de gas, definida por $\epsilon = (Q_0 - Q)/Q_0$, es

$$\epsilon = 1 - \frac{\phi}{e^\phi - 1} \tag{10.5-32}$$

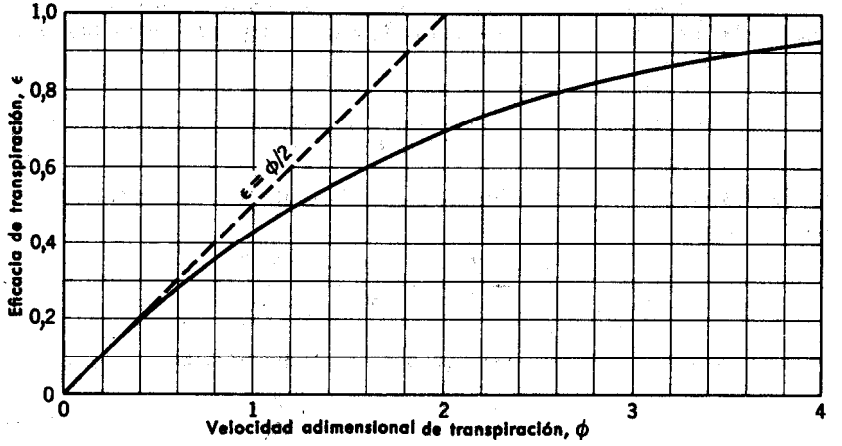


Fig. 10.5-2. Efecto de enfriamiento por transpiración.

siendo $\phi = R_0(1 - \kappa)/\kappa R = w_r \hat{C}_p(1 - \kappa)/4\pi k \kappa R$ la velocidad adimensional de **transpiración.** En la **fig. 10.5—2** se representa **gráficamente** la **Ec. 10.5—32.** Para valores bajos de ϕ, la eficacia ϵ es aproximadamente igual a $\phi/2$.

Como se ve, la **transpiración** puede ser un método muy efectivo para reducir velocidades de transmisión de calor. Se ha sugerido el enfriamiento por **transpiración** para la refrigeración de los conos de cohetes durante la reentrada en la atmósfera. Este efecto puede ser importante en los casos en los que tiene lugar una transferencia simultánea de calor y materia. **(Véase §** 21.5).

Ejemplo 10.5—4. Transmisión de calor por convección libre desde una lámina vertical

Una lamina plana a la temperatura T_0 está suspendida en una gran masa de fluido, que esta a la temperatura T_1. El fluido asciende en la proximidad de la lámina caliente debido a la fuerza de flotación. (Véase Fig. 10.5—3.) A partir de las ecuaciones de variación, deducir la variación de las pérdidas de calor con las variables del sistema. Las propiedades físicas del fluido pueden considerarse constantes; a menos que se utilice la forma de convección libre de la ecuación de movimiento.

Solución. Sea H la altura de la lámina caliente y supóngase que la dimensión en la dirección x es muy grande, de forma que v_y y v_z pueden considerarse como funciones exclusivas de y y z. Supondremos que el componente v_y de la velocidad es muy pequeño, es decir, que el fluido asciende casi verticalmente. De acuerdo con esto eliminamos en nuestro análisis el componente y de la ecuación de movimiento y escribimos las ecuaciones de continuidad,, movimiento y energfa, en la siguiente forma:

(continuidad)
$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (10.5-33)$$

(movimiento)
$$\rho\left(v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_z = \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \rho g \beta (T - T_1) \qquad (10.5-34)$$

(energía)
$$\rho \hat{C}_p\left(v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(T - T_1) = k\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(T - T_1) \qquad (10.5-35)$$

Las correspondientes condiciones límite son

C.L. 1: para y = 0, $v_y = v_z = 0$, y $T = T_0$ (10.5—36)

C.L. 2: para y = co, $v_y = v_z = 0$, y $T = T_1$ (10.5—37)

C.L. 3: para $z = \infty$, $v_y = v_z = 0$, y $T = T_1$ (10.5-38)

Obsérvese que el incremento de temperatura interviene en la ecuación de movimiento y que la distribución de velocidad interviene en la ecuación de energía. Las ecuaciones están por tanto «acopladas». Las soluciones analíticas de tales ecuaciones diferenciales no lineales acopladas son muy difíciles, de forma que nos contentamos con una aproximación por análisis dimensional.

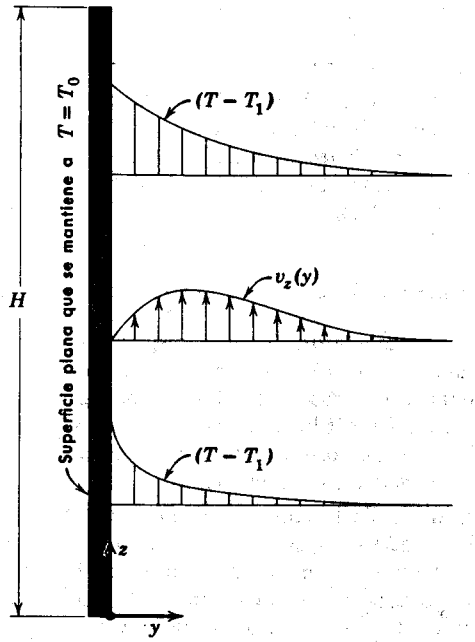


Fig. 10.5-3. Perfiles de temperatura y velocidad en las proximidades de una' lamina vertical caliente.

Es conveniente introducir las siguientes variables adimensionales:

$$\Theta = (T - T_1)/(T_0 - T_1) \quad = \text{temperatura adimensional} \qquad \textbf{(10.5-39)}$$

$$\zeta = z/H \quad = \text{distancia vertical adimensional} \qquad (10.5\text{-}40)$$

$$\eta = \left(\frac{B}{\mu\alpha H}\right)^{1/4} y \quad = \text{distancia horizontal adimensional} \qquad \textbf{(10.5-41)}$$

$$\phi_z = \left(\frac{\mu}{B\alpha H}\right)^{1/2} v_z \quad = \text{velocidad vertical adimensional} \qquad \textbf{(10.5-42)}$$

$$\phi_y = \left(\frac{\mu H}{\alpha^3 B}\right)^{1/4} v_y \quad = \text{velocidad horizontal adimensional} \qquad (10.5\text{-}43)$$

siendo $\alpha = k/\rho C_p$ y $B = \rho g \beta (T_0 - T_1)$.

Escribiendo las ecuaciones de variación en función de estas variables adimensionales, se obtiene

(continuidad) $$\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = 0 \qquad \textbf{(10.5-44)}$$

(movimiento)
$$\frac{1}{\Pr}\left(\phi_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\phi_z = \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial \eta^2} + \Theta \qquad (10.5\text{-}45)$$

(energía)
$$\phi_y \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \qquad (10.5\text{-}46)$$

ge han omitido los términos subrayados con líneas de trazos en las Ecs. 10.5—34 y 35, basándose en que el transporte de energía y de cantidad de movimiento en la dirección z, debido a procesos moleculares, es pequeño en comparación de los correspondientes términos convectivos del primer miembro de las ecuaciones. Las condiciones límite que acompañan a las anteriores ecuaciones son

C.L. 1: para $\eta = 0$, $\phi_y = \phi_z = 0$, y $\Theta = 1$ (10.5—47)

C.L. 2: para $\eta = \infty$, $\phi_y = \phi_z = 0$, y $\Theta = 0$ (10.5-48)

C.L. 3: para $\zeta = -\infty$, $\phi_y = \phi_z = 0$, y $\Theta = 0$ (10.5-49)

De estas ecuaciones y las condiciones límite, se deduce inmediatamente que los componentes adimensionales de la velocidad, ϕ_y y ϕ_z, y la temperatura adimensional Θ, dependen de η y ζ, así como también del parámetro Pr, el número de Prandtl. Puesto que el flujo es generahnente muy lento en la convección libre, los términos en los que interviene Pr serán más bien pequeños (tomándolos exactamente iguales a cero se tendría la «suposición de flujo reptante»). De acuerdo con esto, se llega a la conclusión de que la influencia del número de Prandtl es de poca importancia.

La densidad media de flujo de calor procedente de la lamina puede expresarse así:

$$q_{\text{med}} = +\frac{k}{H}\int_0^H \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} dz \qquad (10.5\text{-}50)$$

Esta integral puede ponerse en función de los parámetros adimensionales que hemos introducido anteribrmente :

$$\begin{aligned} q_{\text{med}} &= +k(T_0 - T_1)\left(\frac{B}{\mu\alpha H}\right)^{1/4} \cdot \int_0^1 -\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} d\zeta \\ &= +k(T_0 - T_1)\left(\frac{B}{\mu\alpha H}\right)^{1/4} \cdot C \\ &= C \cdot \frac{k}{H}(T_0 - T_1)(\text{Gr Pr})^{1/4} \end{aligned} \qquad (10.5\text{-}51)$$

como Θ es una función de η, ζ y Pr, la derivada $\partial\Theta/\partial\eta$ depende también de η, ζ y Pr. Por consiguiente, $\partial\Theta/\partial\eta$, evaluada para $\eta = 0$ depende solamente de ζ y Pr, y la integral definida sobre ζ resulta una función adimensional de Pr. De las anteriores consideraciones se infiere que esta función C será casi constante, es decir, una débil funcion del número de Prandtl.

El análisis anterior indica que aun sin resolver las ecuaciones se puede predecir que la densidad media de flujo de calor es proporcionai a la potencia $\frac{5}{4}$ de $(T_0 - T_1)$ e inversamente proporcional a la potencia $\frac{1}{4}$ de H. Ambas predicciones han sido confirmadas

por experimentación. Lo único que no permite este análisis es determinar el valor de C en función del número de Prandtl.

Para determinar C hay que recurrir a medidas experimentales o bien resolver las ecuaciones 10.5−44 a 46. Hace unos 80 años, Lorenza obtuvo una solución aproximada de estas ecuaciones, hallando un valor de 0,548 para C. Posteriormente, mediante cálculos más rigurosos,' se ha obtenido la siguiente variación de C con Pr:

Pr	0,73 (aire)	10	10^2	1 0 3
C	0,517	0,612	0,652	0 , 6 5 3

Estos valores de C coinciden casi exactamente con las mejores medidas experimentales que se conocen para el intervalo de flujo laminar (ea decir, para $GrPr < 10^9$).

Ejemplo 10.5−5. Flujo compresible unidimensional: gradientes de velocidad, 'temperatura Y presión en una onda de choque estacionaria

Considerar el flujo adiabático de un, gas ideal a través de una región de «no equilibrio» en una conducción de sección constante, tal como se indica en la Fig. 10.5 -4. Supóngase por el momento que el perfil de velocidad en la conducción es plano. En la región de no equilibrio, la velocidad, temperatura y presión, varían desde los valores v_1, T_1 y P_1 en la corriente de entrada, hasta v_2, T_2 y p_2 *en* la salida. *Fuera* de esta región no existe variación de velocidad, temperatura o presión. En condiciones adecuadas, se puede demostrar[4] que casi todas las variaciones de las condiciones del gas ocurren en una región sumamente delgada que se llama una «onda de choque», tal como se indica en la Fig. 10.5−5. En estas circunstancias, no es necesario suponer una conducción de sección constante ni un perfil plano de velocidad: las soluciones unidimensionales de las ecuaciones de variación se aplican siempre localmente para las condiciones de la región inmediata al «choque», con tal de que sea normal a la línea de corriente en cuestión.

Utilizar las tres ecuaciones de variación para determinar las condiciones en las que es posible la existencia de una onda de choque y hallar las distribuciones de velocidad, temperatura y presión en dicha onda. Supóngase estado estacionario, flujo unidimensional de un gas ideal y no se tengan en cuenta las variaciones de μ, k y $\hat{C}_p$ con la temperatura y la presión.

Solucióu. Las ecuaciones de variación para el sistema que estamos considerando son

---

[2] *L.* LOPENZ, *Wiedzmann's Ann. Physik.,* 13, 582-606 (1881).

[3] E. SCHMIDT y W. BECKMANN *Techn. Mech. Thermodynam., 1, 341,* 391 (1930). Véase E. M. SPARROW y J. L. GREGG, *Trans. ASME,* 80, *379-386* (1958).

[4] Para tratamientos más detallados de fenómenos de choque, se remite al lector a H, W. LIEPMANN *y A.* ROSHKO, *Elements of Gasdynamics,* Wiley, Nueva York (1957); también M. MORDUCHOW y P. A. LIBBY, *J. Aeronaut. Sci.,* 16, 674-84 (1949); R. VON MISES, *ibid.,* 17, 551-554 (1950); G. S. S. LUDFORD, *ibid.,* 18, 830-834 (1951).

(continuidad)
$$\frac{d}{dx}\rho v_x = 0 \tag{10.5-52}$$

(movimiento)
$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{dv_x}{dx}\right) \tag{10.5-53}$$

(energía)
$$\rho \hat{C}_p v_x \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + v_x \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3}\mu\left(\frac{dv_x}{dx}\right)^2 \tag{10.5-54}$$

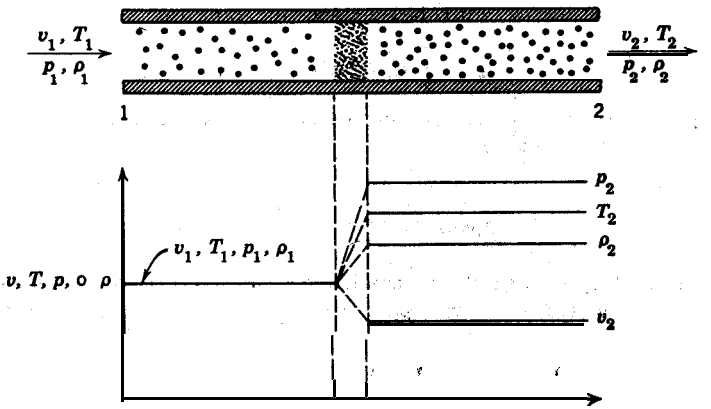


Fig. 10.5–4. Variaciones de velocidad, temperatura, presión y densidad en una onda de choque.

Esta ecuación de energía corresponde a la Ec. *J* de la Tabla 10.4–1, expresada para el estado estacionario y en la que $(\partial \ln \hat{V}/\partial \ln T)_p = 1$ para un gas ideal.

La ecuación de *continuidad* puede integrarse para obtener

$$\rho v_x = \rho_1 v_1 \tag{10.5-55}$$

en la que ρ_1 y v_1, son magnitudes evaluadas a una corta distancia medida aguas arriba del punto de choque.

Eliminando en la ecuación de energía ρv_x mediante la Ec. 10.5-55 y dp/dx mediante la ecuación de movimiento, se obtiene

$$\hat{C}_p \frac{dT}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_1 v_1}\frac{d}{dx}\left(v_x \frac{dv_x}{dx}\right) + \frac{1}{\rho_1 v_1}\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) \tag{10.5-56}$$

Integrando una vez esta ecuación y ordenando términos se llega a

$$\hat{C}_p T + \tfrac{1}{2}v_x^2 = \frac{k}{\hat{C}_p \rho_1 v_1}\left[\frac{4}{3}\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + \hat{C}_p \frac{dT}{dx}\right] + C_I \tag{10.5-57}$$

en la que C_I es una constante de integración. Nótese que la Ec. 10.5-57 es exacta para flujo unidimensional de un gas ideal. La ulterior integración debe efectuarse en general por métodos numéricos. Sm embargo, si se admite que el número de Prandtl $\hat{C}_p\mu/k$ es

$\frac{3}{4}$ (una suposición bastante correcta para la mayoría de los gases[5]) se puede completar la integración de la ecuación de energía para obtener

$$\tfrac{1}{2}v_x^2 + \hat{C}_p T = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} \exp\left(\frac{\rho_1 v_1 \hat{C}_p x}{k}\right) \tag{10.5-58}$$

Se evalúan ahora las constantes de integración. Tomamos primeramente C_{II} igual a cero, puesto que la suma $\hat{C}_p T + \frac{1}{2}v_x^2$ no puede crecer ilimitadamente en la dirección x positiva. La constante C_{I} se evalúa a partir de las condiciones de la corriente de entrada, de forma que $C_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}v_1^2 + \hat{C}_p T_1$; por lo tanto, la ecuación integrada es

$$\tfrac{1}{2}v_x^2 + \hat{C}_p T = \tfrac{1}{2}v_1^2 + \hat{C}_p T_1 \tag{10.5-59}$$

Substituyendo la ecuación de continuidad integrada en la ecuación de *movimiento* e integrando una vez, se obtiene

$$\rho_1 v_1 v_x = -p + \frac{4}{3}\mu\frac{dv_x}{dx} + C_{\mathrm{III}} \tag{10.5-60}$$

La evaluación de C_{III} a partir de las condiciones de la corriente de entrada (cuando $dv_x/dx = 0$) conduce a $C_{\mathrm{III}} = p_1 + \rho_1 v_1^2 = \rho_1(v_1^2 + RT_1/M)$. Utilizando la ley del gas ideal y la ecuación de energía integrada, se puede eliminar p de la Ec. 10.5–60 para obtener una relación que contiene v_x y x como únicas variables:

$$\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_1 v_1} v_x \frac{dv_x}{dx} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} v_x^2 + \frac{C_{\mathrm{III}}}{\rho_1 v_1} v_x = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C_{\mathrm{I}} \tag{10.5-61}$$

siendo γ la relación de calores específicos $\hat{C}_p/\hat{C}_v$.

Esta ecuación puede expresarse en función de variables adimensionales para dar, después de una considerable reordenación,

$$\phi\frac{d\phi}{d\xi} = \beta \mathrm{Ma}_1(\phi - 1)(\phi - \alpha) \tag{10.5-62}$$

Las variables adimensionales están definidas por

$$\phi = \frac{v_x}{v_1} = \text{velocidad adimensional} \tag{10.5-63}$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda} = \text{distancia adimensional} \tag{10.5-64}$$

---

[5] La Ec. 8.3-14, con $\hat{C}_p/\hat{C}_v = \frac{5}{3}$, indica que el número de Prandtl de un gas monoatómico ideal debería ser igual a dos tercios. Experimentalmente se ha encontrado que para la mayor parte de los gases poliatómicos a baja densidad el número de Prandtl está comprendido entre 0.65 y 0,85, con un valor medio bastante próximo a 0,75. Véase, por ejemplo. Tabla 8.3-1.

$$\mathrm{Ma}_1 = v_1\sqrt{\frac{M}{\gamma RT_1}} = \text{número de Mach}^6 \text{ para las} \qquad (10.5\text{-}65)$$

condiciones de la corriente de entrada

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1}\frac{1}{\mathrm{Ma}_1^2} \qquad (10.5\text{–}66)$$

$$\beta = \tfrac{2}{3}(\gamma + 1)\sqrt{\pi/8\gamma} \qquad (10.5\text{–}67)$$

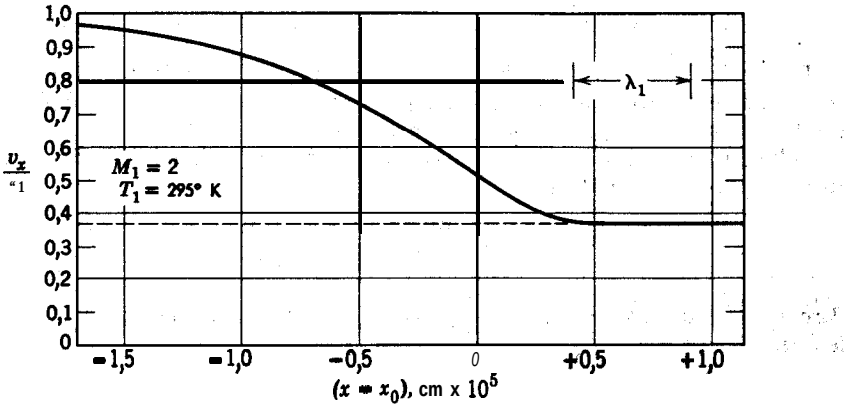


Fig. **10.5–5.** Distribución de velocidad en **una onda de choque estacionaria.**

La longitud de referencia λ es el recorrido libre medio **definido** en la **Ec.** 1.4-3 (habiendo eliminado d^2 mediante la **Ec.** 1.4-9):

$$\lambda = 3\frac{\mu_1}{\rho}\sqrt{\frac{\pi M}{8RT_1}} \qquad (10.5\text{–}68)$$

Integrando la F.c. **10.5–62** se obtiene

$$\frac{1 - \phi}{(\phi - \alpha)^\alpha} = \exp\left[\beta(1 - \alpha)\mathrm{Ma}_1(\xi - \xi_0)\right] \qquad (10.569)$$

Esta ecuación es la distribución de **velocidad** adimensional, que contiene una constante de integración $\xi_0 = x_0/\lambda$. Las distribuciones de temperatura y presión pueden determinarse a partir de esta ecuación y las Ecs. **10.5–59** y 60. Como ϕ tiene que tender hacia la unidad cuando $\xi \to -\infty$, la constante α es menor que 1. Esto sólo puede ser cierto si $\mathrm{Ma}_1 > 1$, es decir, si el flujo de la corriente de entrada es supersónico. También puede verse que para valores positivus muy grandes de ξ, la velocidad reducida ϕ tiende a a.

En la Fig. 10.5-5 puede verse que las ondas de choque son realmente muy delgadas.

---

6 El numero de Mach puede considerarse como la relación entre la velocidad v_1 y la velocidad del sonido a la temperatura T_1. **Véanse** los problemas **10.L** y **10.Q.**

Von Mises[4] amplió el resultado anterior para gases con número de Prandtl distinto de $\frac{3}{4}$, y Morduchow y Libby[4] han tenido en cuenta la variación de la viscosidad con la temperatura.

La tendencia del flujo supersónico de un gas a «degradarse» expontáneamente a flujo subsónico es importante en los túneles de viento y en el diseño de sistemas de alta velocidad, por ejemplo, en turbinas y motores de cohetes. Obsérvese que los cambios que tienen lugar en las ondas de choque son irreversibles y que como los gradientes de velocidad son muy bruscos se disipa una considerable cantidad de energía mecánica.

Ejemplo 10.5-6. Procesos adiabáticos sin fricción para un gas ideal

Desarrollar ecuaciones para la relaci&n de la presión local a la densidad o temperatura en una corriente de un gas ideal, en la que la densidad de flujo de cantidad de movimiento τ y la densidad de flujo de calor q son despreciables.

Solución. Para las condiciones supuestas, la ecuación de energía (Ec. *J* de la Tabla 10.4– 1) puede escribirse así

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T}\right)_p \cdot \frac{Dp}{Dt} \tag{10.5-70}$$

Pero como para un gas ideal $(\partial \ln \hat{V}/\partial \ln T)_p = 1$, para un elemento móvil del fluido tendremos

$$\frac{dp}{dT} = \rho \hat{C}_p \tag{10.5-71}$$

Utilizando de nuevo la ley del gas ideal se puede escribir

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p\hat{C}_p M}{RT} \tag{10.5-72}$$

en la que M es el peso molecular del gas. Definiendo $\gamma = C_p/C_v$, se llega a

$$\frac{d \ln p}{d \ln T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \tag{10.5-73}$$

que integrada para γ constante, se obtiene

$$p^{(\gamma-1)/\gamma} T^{-1} = \text{constante} \tag{10.5-74}$$

Evaluando T en función de ρ y p se obtiene la otra solución.

$$pp_{-}^{\gamma} = \text{constante} \tag{10.5-75}$$

Teniendo en cuenta esta deducción, se puede advertir que se obtiene la misma solución para los procesos de flujo o no flujo y estado estacionario o no estacionario; además, no es necesaria ninguna suposición con respecto al trabajo realiido por el gas. Por tanto, el resultado es muy útil y es importante recordarlo. Sin embargo, deberá tenerse en cuenta que el despreciar q y τ equivale a suponer un comportamiento adiabático reversible

y que por esta razón, las Ecs. 10.5—74 y 75 representan el caso límite de flujo *isentrópico*. En un sistema adiabático real el aumento de temperatura por compresión será mayor que el calculado a partir de la Ec. 10.5-74. Sin embargo, las Ecs. 10.5-74 y 75 son útiles, como casos límite, para determinar la eficacia de compresores y soplantes. Por otra parte, estas ecuaciones proporcionan una buena descripción de las relaciones $p - T$ y $p - \rho$ en ondas sonoras.[7]

§ 10.6 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN

Una vez que hemos presentado las ecuaciones de variación en sistemas no isotérmicos, y que hemos visto la forma en que pueden utilizarse para resolver diversos problemas de transporte de calor, estudiaremos brevemente el análisis dimensional de dichas ecuaciones. Este estudio es análogo al de § 3.7 y está destinado a servir de introducción al Capítulo 13. Para mayor sencillez, este estudio se restringe a sistemas de propiedades físicas constantes. Teniendo en cuenta esta restricción, se puede escribir

(continuidad)
$$(\nabla \cdot v) = 0 \tag{10.6-1}$$

(movimiento)
$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu \nabla^2 v + \begin{cases} -\nabla p + \rho g & \text{(convección forzada)} \\ -\rho \beta g (T - T_0) & \text{(convección libre)} \end{cases} \tag{10.6-2}$$

(energía)
$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v \tag{10.6-3}$$

Obsérvese que en la Ec. 10.6-2 se han incluido los «manantiales de cantidad de movimiento» para la convección libre o la forzada, ya que es conveniente definir variables adimensionales en una forma ligeramente distinta para cada una de ellas. En la Ec. 10.6-2, T_0 es la temperatura ambiente.

Para la ***convección forzada,*** definimos las siguientes variables adimensionales

$$v^* = \frac{v}{V} = \text{velocidad adimensional} \tag{10.6-4}$$

$$p^* = \frac{p - p_0}{\rho V^2} = \text{presión adimensional} \tag{10.6-5}$$

$$t^* = \frac{tV}{D} = \text{tiempo adimensional} \tag{10.6-6}$$

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \text{temperatura adimensional} \tag{10.6-7}$$

$$x^*, y^*, z^* = \frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D} = \text{coordenadas adimensionales} \tag{10.6-8}$$

7 Véase., por ejemplo, el problema 10.Q.

En estas expresiones V, D y $(T_1 - T_0)$, representan una velocidad, longitud y diferencia de temperaturas características del sistema. Si escribimos nuestras tres ecuaciones de variación para convección forzada en función de estas variables adimensionales, se obtiene

(continuidad) $$(\nabla^* \cdot v^*) = 0 \tag{10.6-9}$$

(movimiento) $$\frac{Dv^*}{Dt^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^{*2} v^* - \nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Fr}} \frac{g}{g} \tag{10.6-10}$$

(energía) $$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{\mathrm{Re\ Pr}} \nabla^{*2} T^* + \frac{\mathrm{Br}}{\mathrm{Re\ Pr}} \Phi_v^* \tag{10.6-11}$$

siendo Φ_v^* la función de disipación expresada en función de v^*, x^*, y^* y z^*. Obsérvese que en estas tres ecuaciones intervienen cuatro grupos adimensionales: Re = $[DV\rho/\mu]$, Fr = $[V^2/gD]$, el número de Prandtl, Pr = $[\hat{C}_p\mu/k]$, y el número [1] de Brinkman $[\mu V^2/k(T_1 - T_0)]$.

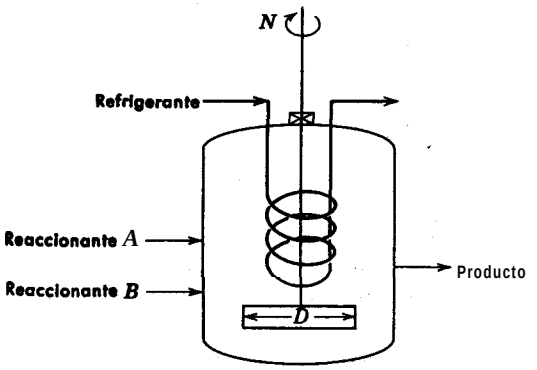


Fig. 10.6-1. Mezclador continuo.

Ejemplo 10.6-1. Transmisión de calor por convección forzada en un tanque agitado

Dos corrientes fluidas se mezclan de forma continua en proporciones fijas en un reactor agitado, totalmente lleno, tal como se indica en la Fig. 10.6-1. En estas condiciones, debe retirarse calor a través del serpentín de refrigeración a una velocidad Q, proporcional a la velocidad de flujo de la corriente de salida. Estimar el efecto del diámetro del tanque sobre las velocidades de flujo de masa permisibles, si las temperaturas de la solución y de la superficie de refrigeración, T_1 y T_0 respectivamente, y el número de Reynolds $(D^2N\rho/\mu)$ se mantienen constantes. Supóngase semejanza geométrica y propiedades del

[1] En muchos textos la relación $(\mathrm{Br/Pr}) = V^2/\hat{C}_p(T_1 - T_0)$ se presenta como un grupo adimensional único denominado número de Eckert, Ec. Claro está, que la elección de grupos adimensionales es arbitraria. El número de Eckert está intimamente relacionado con el número de Mach. (Véase problema 10.L.)

fluido constantes. Supóngase finalmente, que el efecto de las velocidades de flujo de la corriente sobre las características del flujo es despreciable. Despréciense las perdidas de calor en las paredes del tanque.

Solución. La velocidad de eliminación de calor que se precisa en la superficie del serpentín es

$$Q = -k\int_A \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\text{superficie}} dA \qquad (10.6-12)$$

en la que A es el área total de superficie de refrigeración y n es la distancia medida hacia afuera desde la superficie de refrigeración en dirección normal a ella. Escribiendo la Ec. 10.6-12 en función de las variables adimensionales $A^* = A/D^2$, $n^* = n/D$, y $T^* = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, se tiene

$$Q = -k(T_1 - T_0)D\int_{A^*} \left.\frac{\partial T^*}{\partial n^*}\right|_{\text{superficie}} dA^* \qquad (10.6\text{-}13)$$

El termino $(\partial T^*/\partial n^*)|_{\text{superficie}}$ puede expresarse en función de Re, Pr y las condiciones límite, con lo que Q, y por lo tanto la velocidad de masa permisible, es proporcional al diámetro.

Para *convección libre*, no se dispone **de una adecuada velocidad de referencia,** y por **esta razón, vamos a utilizar en vez de** V **la relación** $\mu/\rho D$ **definiendo nuestras variables adimensionales de la forma siguiente:**

$$v^{**} = \frac{vD\rho}{\mu} = \text{velocidad adimensional} \qquad (10.6-14)$$

$$t^{**} = \frac{t\mu}{\rho D^2} = \text{tiempo adimensional} \qquad (10.6-15)$$

La temperatura y las distancias adimensionales se definen de la misma forma que para la convección forzada. Expresando las ecuaciones de variación en función de estas variables, se obtiene

(continuidad)
$$(\nabla^* \cdot v^{**}) = 0 \qquad (10.6\text{-}16)$$

(movimiento)
$$\frac{Dv^{**}}{Dt^{**}} = \nabla^{*2}v^{**} - T^* \,\mathrm{Gr}\,\frac{g}{g} \qquad (10.6-17)$$

(energía)
$$\frac{DT^*}{Dt^{**}} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\nabla^{*2}T^* \qquad (10.6-18)$$

Como se ve, para la convección libre sólo intervienen en las ecuaciones de variación los dos grupos adimensiones, Pr y el número de Grashof, $\mathrm{Gr} = [g\rho^2\beta(T_1 - \mathrm{Tu})D^3/\mu^2]$**.** Obsérvese que hemos omitido en la ecuación de energía el término de disipación viscosa, que evidentemente es muy poco importante para convección libre.

Ejemplo 10.6-2. Temperatura de la superficie de una espiral de calentamiento eléctrico

Se proyecta una espiral de calentamiento eléctrico para mantener un gran tanque de líquido a una temperatura superior a su punto de congelación. Se desea predecir la temperatura que alcanzará la superficie de la espiral, en función de la velocidad de calefacción Q y de la temperatura de la superficie del tanque T_0. Esta predicción ha de realizarse a base de experiencias en un aparato de menor tamaño, geométricamente semejante, lleno del mismo líquido.

Describir brevemente un procedimiento experimental adecuado para realizar la predicción deseada. La variación de las propiedades físicas con la temperatura, a excepción de ρ, puede despreciarse, y se puede suponer que toda la superficie de la espiral de calefaccción está a la misma temperatura T_1.

Solución. La velocidad total de entrada de energía a través de la superficie de la espiral viene dada por

$$Q = -k\int_A \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_s dA \tag{10.6-19}$$

en la que A es el área de la superficie de la espiral, el subíndice s se refiere al fluido que está inmediatamente próximo a la superficie de la espiral y r es la distancia medida hacia fuera desde dicha superficie y en dirección normal a ella. Expresando la Ec. 10.6-19 en función de variables adimensionales, se tiene

$$\frac{Q}{k(T_1 - T_0)D} = -\int_{A^*} \left.\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right|_{s^*} dA^* \tag{10.6-20}$$

$$= \psi\left[\left(\frac{\hat{C}_p\mu}{k}\right), \left(\frac{\rho^2\beta(T_1 - T_0)gD^3}{\mu^2}\right)\right] \tag{10.6-21}$$

siendo

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \tag{10.6-22}$$

$$r^* = \frac{r}{D} \tag{10.6-23}$$

$$A^* = \frac{A}{D^2} \tag{10.6-24}$$

ψ = una función de Gr y Pr que ha de determinarse (10.6-25)

Puesto que los dos sistemas han de ser geométricamente semejantes, el limite superior de integración de la Ec. 10.6-20, A/D^2, será el mismo para ambos y no es preciso incluirlo en la función ψ. De igual forma, si escribimos las condiciones límite para la temperatura, velocidad y presión en las superficies de la espiral y del tanque, se obtienen solamente relaciones de tamaño que son idénticas para los dos sistemas. Por tanto, se omite esta etapa.

Observemos ahora que la magnitud deseada $(T_1 - T_0)$ aparece en los dos miembros de la Ec. 10.6-21. Para evitar este inconveniente, multiplicamos ambos miembros por el número de Grashof, con lo que se obtiene

$$\left(\frac{D^2Q\rho^2\beta g}{k\mu^2}\right) = \mathrm{Gr} \cdot \psi(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}) \qquad (10.6\text{-}26)$$

En principio, puede hallarse Gr de la Ec. 10.6-26 y obtener una expresión explícita para $(T_1 - T_0)$. Como la variación de las propiedades físicas con la temperatura se ha supuesto despreciable, podemos considerar el número de Prandtl constante para un determinado fluido, y escribir

$$(T_1 - T_0) = \left(\frac{\mu^2}{\rho^2\beta g D^3}\right) \cdot \phi\left(\frac{D^2Q\rho^2\beta g}{k\mu^2}\right) \qquad (10.6\text{-}27)$$

siendo ϕ una función de $(D^2Q\rho^2\beta g/k\mu^2)$ que ha de determinarse experimentalmente. Por tanto, se puede construir una representación gráfica de la Ec. 10.6-27 a partir de medidas experimentales de $T_1, T_0, D,$ y las propiedades físicas del fluido y utilizar esta gráfica para predecir el comportamiento del sistema grande.

Como en este caso la variación de las propiedades físicas del fluido con la temperatura es despreciable, podemos ir todavia más lejos. Si mantenemos la relación de Q en los dos sistemas inversamente proporcional al cuadrado de las relaciones de los diámetros, la relación correspondiente de $(T_1 - T_0)$ será inversamente proporcional al cubo de las relaciones de los diámetros.

Ya hemos visto en el Capítulo 9 que algunos de los grupos adimensionales utilizados en los ejemplos anteriores aparecen cuando se ponen en forma adimensional las ecuaciones diferenciales que describen sistemas específicos. De todo lo expuesto aquí se deduce que estos mismos grupos adimensionales se originan en función de las ecuaciones generales entre derivadas parciales para los procesos no isotérmicos. Este tratamiento se aplicará en capítulos posteriores, en los que se *dan* correlaciones para el coeficiente de transmisión de calor.

A veces resulta útil considerar los grupos adimensionales como relaciones entre distintas fuerzas o efectos que intervienen en el sistema:2

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V^2/D}{\mu V/D^2} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{\rho V^2/D}{PB} = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas de gravedad}}$$

$$\frac{\mathrm{Gr}\rho\beta g(T_0 - T_1)}{\mathrm{Re}^2} = \frac{\rho V^2/D}{\text{fuerzas de flotación}} = \frac{\text{fuerzas de flotación}}{\text{fuerzas de inercia}}$$

2 Los términos de inercia de la ecuación de movimiento son $\rho[v \cdot \nabla v]$ y los términos viscosos son $\mu \nabla^2 v$. Para obtener valores «típicos« de estos términos, se substituyen las distintas variables siguiendo las «normas» características utilizadas en la obtención de variables adimensionales. Según ésto, $\rho[v \cdot \nabla v] \rightarrow \rho(V^2/D)$ y $\mu\nabla^2 v \rightarrow \mu(V/D^2)$.

$$\text{Pr Re} = \frac{\rho \hat{C}_p V(T_0 - T_1)/D}{k(T_0 - T_1)/D^2} = \frac{\text{transporte de calor por convección}}{\text{transporte de calor por conducción}}$$

$$\text{Br} = \frac{\mu(V/D)^2}{k(T_0 - T_1)/D^2} = \frac{\text{producción de calor por disipación viscosa}}{\text{transporte de calor por conducción}}$$

Según esto, un bajo valor del número de Reynolds indica que las fuerzas viscosas son grandes en comparación de las fuerzas de inercia. Si el número de Brinkman es bajo, quiere decir que el calor producido por disipación viscosa puede transmitirse por conducción calorífica. Cuando Gr/Re^2 es grande, las fuerzas de flotación son importantes en la determinación de las características del flujo.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Definir energía, energía potencial, energía cinética y energía interna.

2. ¿Por que en la deducción de la Ec. 10.1-9 la velocidad de producción de trabajo viene dada por el producto de la presión (o esfuerzo viscoso), por el área y la velocidad?

3. ¿Cómo están relacionadas la «ecuación de energía» (Ec. 10.1−9), la «ecuación de energía mecánica» (Ec. 10.1-12) y la «ecuación de energía calorífica» (Ec. 10.1−13)? ¿Son generales las Ecs. 10.1-12 y 13?

4. ¿Es siempre totalmente convertible la energía calorífica en energla mecánica?

5. ¿Cuál es la diferencia entre las Ecs. 10.1-24 y 25? Establecer, las suposiciones que intervienen en la obtención de cada una de ellas a partir de la Ec. 10.1-20.

6. Establézcase la diferencia entre transmisión de calor por convección libre y forzada. ¿Es siempre posible esta distinción?

7. ¿Qué suposiciones son necesarias para obtener la Ec. 10.3-3 a partir de la Ec. 10.3−2? Explíquese cómo se utiliza una serie de Taylor para la obtención de la Ec. 10.3-3.

8. ¿Es aplicable la ecuación de movimiento del Capítulo 3 a sistemas no isotérmicos?

9. ¿Cuándo, si es que ocurre alguna vez, puede resolverse la ecuación de movimiento para un sistema no isotérmico sin poseer un conocimiento detallado del comportamiento térmico del sistema? Indíquense ejemplos.

10. ¿ Cuándo, si es que ocurre alguna vez, puede resolverse completa y exactamente la ecuación de energía sin un conocimiento detallado del comportamiento de flujo del sistema? Indíquense ejemplos.

ll. ¿En qué forma la variación de μ con la temperatura podría modificar el perfil de velocidad del ejemplo 10.5− 1 respecto del utilizado para calcular los perfiles de temperatura? ¿Cómo se modificaría el perfll de temperatura? ¿Cómo se podrían calcular los verdaderos perfiles de velocidad y temperatura?

12. Si el cono de un cohete estuviese construido de un material poroso, y se hiciese circular lentamente un líquido volátil a través de los poros durante la reentrada en la atmósfera, ¿cómo se modificaría la temperatura de la superficie del cono y por qué?

13. ¿Cuál es el significado físico de R_0 en el ejemplo 10.5−3?

14. ¿No se tiene en cuenta realmente la variación de ρ con la temperatura en el ejemplo 10.5−4? Explíquese.

15. En el ejemplo 10.5-5 se ha visto que la velocidad debe de disminuir a medida que se avanza a favor de la corriente a través de una onda de choque. Explíquese esto mediante la ecuación de energía mecánica.

16. ¿El desarrollo del ejemplo 10.5−5, está restringido para un fluido wn perfil plano de velocidad, para el flujo en una conducción de sección constante o para flujo laminar?

17. ¿La restricción para fluidos wn un Pr de 3/4 del ejemplo 10.5−5, constituye una limitación importante? ¿Podrían aplicarse a líquidos los resultados de dicho ejemplo?

18. ¿Cómo pueden utilizarse los resultados del ejemplo 10.5−6 en el diseño de un compresor o una turbina de gas?

19. ¿Cómo se sabe la forma en que han de elegirse las variables adimensionales utilizadas en § 10.61

20. ¿Qué sucedería si se tomase V como $\mu/\rho D$ para convección *forzada?*

21. ¿Podrían necesitarse en algún caso *más* relaciones adimensionales que las obtenidas en § 10.6 para convección forzada?

22. ¿Cómo se definen $\hat{C}_p$ y $\hat{C}_v$? ¿Cuáles son sus unidades? ¿Es siempre $\hat{C}_p - \hat{C}_v$ igual' a R? ¿Variará $\hat{C}_p/\hat{C}_v$ para un gas ideal con la temperatura o la presión?

23. Comprobar las unidades de la Ec. 10.1-9.

24. Describir el término $\bar{\rho}\bar{\beta}g(T - \bar{T})$ de la Ec. 10.3−3 en función del principio de Arquímedes.

25. Demostrar cómo en la Tabla 10.4-1 se puede obtener la forma $\partial/\partial t$ de cualquiera de las ecuaciones de *energía a* partir de la forma D/Dt.

26. Demostrar que la Ec. 10.5-14 satisface las condiciones límite y la ecuación diferencial.

PROBLEMAS

10.A_1 Temperatura de un cojinete de fricción

Calcular la temperatura máxima en el cojinete de fricción del problema 3.A_1, suponiendo que la conductividad calorífica del lubrificante es 4 $\times$ 10^{-4} cal seg^{-1} $cm^{-1}(°C)^{-1}$, la temperatura del metal 200° C y la velocidad de rotación 4000 rpm.

Respuesta: 225° *C*

10.B_1 Variación de viscosidad y gradientes de velocidad en una película no isotérmica

Por una pared vertical cae agua formando una película de 0,1 mm de espesor. La temperatura del agua en la superficie libre del líquido es 100° C y en la superficie de la pared 80° C.

a. Demostrar que la máxima desviación relativa entre las viscosidades predichas por las Ecs. 10.5-19 y 10.5−19*a* oc& cuando $T = \sqrt{T_0 T_\delta}$.

b. Calcular la máxima desviación relativa para las wndiciones indicadas.

Respuesta: 0,63 por ciento

10.C_1 Enfriamiento per transpiración

a. Calcular la distribución de temperatura entre las dos envolturas del ejemplo 10.5-3 para velocidades radiales de flujo de masa cero y de 10^{-5} g seg^{-1}, en las condiciones diguientes:

R = 500 micrones	T_R = 300" c	k = 6,13 x 10^{-5} cal cm-t seg^{-1} ° C^{-1}
κR = 100 micrones	T_κ = 100° c	$\hat{C}_p$ = 0,25 cal g^{-1} ° C-l

b. Comparar las velocidades de conducción de calor para la superficie correspondiente a κR en presencia y en ausencia de convección.

Respuesta: ϵ = *0,124*

10.D_1 Convección libre desde una superficie vertical

Un pequeño panel de calefacción wnsta eaenciahnente de una superficie rectangular plana vertical de 30 cm de alto y 50 cm de ancho. Estimar la velocidad total de pérdida de calor desde

una cara de este panel por *convección libre, si* la superficie esta a 65,5° C y el aire ambiente está a 21,1° C y 1 atm.

Utilizar las expresiones de Lorenz y de Schmidt y Beckmann, comparando los resultados de los dos cálculos.

Respuesta: 8,1 cal seg^{-1} por la expresión de Lorenz
7,6 cal seg^{-1} por la expresión de Schmidt y Beckmann

10.E_1 Variaciones de velocidad, temperatura y presión, en una onda de choque

Una corriente de aire a 1 atm y 21,1° C que llega con un número de Mach 2, fluye a través de una onda de choque estacionaria.

a. Calcular la velocidad inicial del aire.

b. Calcular la velocidad, temperatura y presión de la corriente después de atravesar la onda de choque.

c. Calcular el perfil de velocidad en la onda de choque.

d. Calcular las variaciones de energía interna y cinética a través de la onda de choque.

Supóngase que γ es constante e igual a 1,4 y que $\hat{C}_p$ = 0,24 Kcal Kg^{-1} $°C^{-1}$

Respuestas: a. 685 m seg^{-1}
b. 257 m seg^{-1}, 220° C, 4,48 atm.
d. $\Delta\hat{U}$ = + 34,1 kcal kg^{-1}
$\Delta\hat{K}$ = − 48,3 kcîl kg^{-1}

10.F_1 Compresión adiabática sin fricción de un gas ideal

Calcular la temperatura que se alcanza al comprimir aire inicialmente a 38" C y 1 atm, hasta 1/10 de su volumen inicial. Se supone que la compresión es adiabática sin fricción y que $\hat{C}_p/\hat{C}_v$ puede tomarse como constante e igual a 1.40. La temperatura que resulta es la que corresponde aproximadamente al instante anterior a la ignición en un motor de automóvil que opera con una relación de compresión 10/1.

Respuesta: 5 10" C

10.G_2 Utilización de la ecuación de energía para el planteamiento de problemas

Comprobar las siguientes ecuaciones del Capitulo 9, utilizando las formas apropiadas de la ecuación de energía de $10.2: *(a) 9.2-6, (b) 9.3-6, (c) 9.6-2, (d) 9.7-3.*

10.H_2 Calentamiento viscoso en el flujo a través de una rendija

Deducir una expresión para la distribución de temperatura $T(x)$ en un fluido viscoso que circule con flujo laminar por el espacio comprendido entre dos grandes láminas planas paralelas, tal como se indica en la Fig 2.E. Ambas laminas se mantienen a temperatura constante T_0. Tengase en cuenta el calor generado por disipación viscosa. Despréciese la variación de k y μ con la temperatura.

Respuesta: $T - T_0 = \frac{1}{3}\frac{\mu v_{máx}^2}{k}\left[1 - \frac{x^2}{B^2}\right]$

10.1, Distribución de velocidad en una película no isotérmica

Demostrar que la Ec. 10.5−20 satisface 'los siguientes requerimientos:

a. para x = δ, $v_z = 0$
b. para $x = 0$, $\partial v_z/\partial x = 0$.
c. $\lim_{\mu_\delta \to \mu_0} \{v_z\} = (\rho g \delta^2/2\mu_0)[1 - (x/\delta)^2]$.

10.J_2 Enfriamiento por transpiración ea un sistema de superficies planas

Dos grandes láminas planas porosas horizontales están separadas por una distancia relativamente pequeña L. La lamina superior situada en $y = L$ está a $T = T_L$, y la inferior situada en $y = 0$ se mantiene a una temperatura más baja T_0. Con el fin de reducir la cantidad de calor que ha de eliminarse de la lámina inferior, se hace ascender entre las laminas un gas ideal con velocidad constante y temperatura T_0. Deducir una expresión para la distribución de temperatura y para la cantidad de calor q_0 que debe de retirarse de la lamina fría por unidad de área, en función de las propiedades del fluido y de la velocidad de flujo del gas.

Respuesta:
$$\frac{T - T_L}{T_0 - T_L} = \frac{e^{y\phi/L} - e^{\phi}}{1 - e^{\phi}}; \qquad \phi = \frac{L\rho C_p v_z}{k}$$
$$q_0 = \frac{k(T_L - T_0)}{L}\left(\frac{\phi}{e^{\phi} - 1}\right)$$

10.K_2 Uso de la transpiración para reducir pérdidas de calor

Se desea reducir la velocidad de evaporación de oxígeno líquido contenido en pequeños recipientes, aprovechando la transpiración. Para ello, el liquido se almacena en un recipiente esférico rodeado por una envoltura también esférica de un material aislante poroso, tal como se indica en la Fig. 10.K. Se deja un pequeño espacio entre el recipiente y el aislamiento, tapando la abertura de este último. Durante la operación, el oxigeno que se evapora abandona el recipiente, circula a través del espacio gaseoso y por último fluye uniformemente hacia fuera a través de los poros del aislamiento.

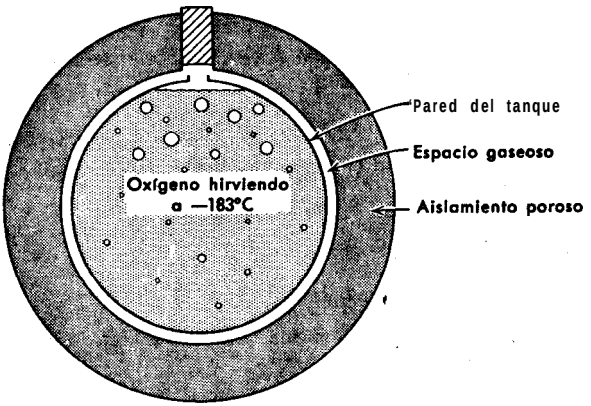


Fig. **10.K.** Aplicación de la transpiración para reducir las perdidas por evaporación.

Calcular la reducción relativa de las pérdidas por evaporación en un tanque de 30 cm de diámetro recubierto con un aislamiento de 15 cm de espesor, con y sin transpiración, en las siguientes condiciones :

Temperatura del oxígeno líquido	-183" C
Temperatura de la superficie exterior del aislamiento	-1 °C
Conductividad calorífica efectiva del aislamiento	0,03 kcal hr^{-1} m^{-1} ° C^{-1}
Calor especifico medio del oxígeno que fluye a través del aislamiento	0,22 kcal Kg^{-1} ° C^{-1}
Calor de vaporización del oxígeno	50,9 kcal Kg^{-1}

Despréciese la resistencia térmica del oxígeno líquido, de las paredes del recipiente y del espacio gaseoso y no se tengan en cuenta las pérdidas de calor a través del tapón. Supóngase que las partículas del aislamiento estén en equilibrio térmico con el gas que las rodea.

Respuestas: 20,6 kcal hr^{-1} sin transpiración
15.2 kcal hr^{-1} con transpiración

10.L_2 Proceso sin fricción en un gas ideal

a. Demostrar que la ecuación del balance de energía para el flujo estacionario de un gas ideal sin disipación viscosa

$$\rho\hat{C}_v\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)T=k\nabla^2T-p(\nabla\cdot v) \qquad (10.L\text{–}1)$$

puede escribirse así

$$\rho C_v\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)T=k\nabla^2T+\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)p \qquad (10.L\text{–}2)$$

b. Escribir en forma adimensional la ecuación obtenida en (*a*), utilizando una longitud carao terística D, una velocidad característica V y una temperatura característica T_0. Tómese $v^* = v/V$, $T^* = (T - T_0)/T_0$ y $p^* = p/\rho V^2$. Demostrar que la ecuación de la temperatura reducida, ademas de estas variables adimensionales, contiene los grupos adimensionales: $\mathrm{Re} = DV\rho/\mu$, $Pr = \hat{C}_p\mu/k$, y $\mathrm{Ec} = V^2/\hat{C}_pT_0$ (que *es* el *número de Eckert*).

c. La velocidad del sonido está relacionada con el comportamiento *p-T-V* del medio a través del cual se transmite, en la forma siguiente

$$v_s = \sqrt{\gamma(\partial p/\partial\rho)_T} \qquad (10.L\text{–}3)$$

en la que $\gamma = C_p/C_v$. Demostrar que para un gas ideal

$$v_s = \sqrt{\gamma RT/M} \qquad (10.L\text{–}4)$$

y que (como $\tilde{C}_p - \tilde{C}_v = R$ para un gas ideal)

$$v_s = \sqrt{\hat{C}_pT(\gamma - 1)} \qquad (10.L\text{–}5)$$

d. Demostrar que el numero de Eckert puede también escribirse así

$$\mathrm{Ec} = (\gamma - 1)\frac{V^2}{v_{s0}^2} = (\gamma - 1)\mathrm{Ma}^2 \qquad (10.L\text{–}6)$$

en la que v_{s0} es la velocidad del sonido en un gas ideal a la temperatura T_0 y Ma es el *número de Mach*, que es la relación de una cierta velocidad característica del sistema con respecto a la velocidad del sonido. Si el numero de Mach es pequeño comparado con la unidad, el flujo puede considerarse como incompresible.

10.M_2 Análisis dimensional de la transmisión de calor por convección forzada en un tanque agitado

Un fluido de p, μ, $\hat{C}_p$, y k constantes se calienta mediante una camisa de vapor en un tanque agitado totalmente lleno. Se desea utilizar el tanque para predecir la velocidad de aumento de temperatura en un tanque geométricamente semejante de dimensiones lineales dobles, que opera con una determinada velocidad del agitador. Se utiliza en los dos casos el mismo fluido y la temperatura de la superficie de la camisa T_1 y la temperatura inicial de la masa del fluido T_0 son tam-

bién iguales en ambos casos. ¿Qué relación de velocidades del agitador deberán utilizarse y cuál será la relación de las velocidades de incremento de temperatura?

Respuesta: La velocidad angular del agitador pequeño deberá de ser cuatro veces la del mayor. Si se utiliza esta relación, el tiempo necesario para que una porción del tanque grande alcance una temperatura determinada sera cuatro veces mayor que en el pequeño.

10.N_2 Equivalencia de las distintas formas de la ecuación de energía

a. Demostrar que la Ec. *H* de la Tabla 10.4— puede obtenerse a partir de la Fc. G.
b. Demostrar que la Ec. *T* de la Tabla 10.4—, puede obtenerse a partir de la Fc. J.

10.O_3 Flujo tangencial en tubos concéntricos de un fluido de elevada viscosidad

Demostrar que la Ec. 10.5 — 14 se transforma en la Ec. 9.4-11 cuando κ se aproxima a la unidad.

10.P_3 Análisis dimensional para la transmisión del calor por convección libre y convección forzada combinadas

Se desea estimar la velocidad de perdida de calor en la instalación meteorológica que se indica en la Fig. 10.P, mediante experimentación en un pequeño modelo geométricamente semejante de 1/5 de dimensiones lineales Se. conocen la temperatura de la superficie de la instalación real, así como la temperatura, velocidad y dirección probables del viento. En estas condiciones, pro-

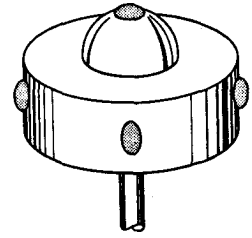


Fig. 10.P. Instalación meteorológica.

bablemente son importantes tanto la convección libre como la forzada y por tanto parece 16gico que la distribución de velocidad reducida depender& de los números de Reynolds y Grashof. Se desea utilizar aire en la experimentación del modelo y mantener la semejanza entre éste y el aparato a toda escala variando la presión y la velocidad del aire. La variación de las propiedades del fluido con la temperatura puede despreciarse.

a. ¿Qué presión y velocidad relativa del aire deberán utilizarse en la experimentación del modelo para conservar la semejanza dinamica?
b. ¿Cuál sera la densidad relativa de flujo calorífico en el modelo?
c. ¿Por que no resultaría practico conservar la semejanza dinámica variando AT?

Respuestas: a. Para igualdad de temperaturas en los dos sistemas, la presión en el estudio del modelo tendría que ser 11,2 veces la presión existente en la instalación que se propone. La velocidad a utilizar en la experimentación del modelo debería ser por consiguiente, 0,446 veces la velocidad del viento.
b. La densidad de flujo superficial en el modelo sera cinco veces mayor que en el aparato a toda escala.

10.Q_3 Velocidad de propagación de ondas sonoras

Las ondas sonoras pueden considerarse como ondas de compresión armónica de muy pequeña amplitud que recorren un fluido compresible. La velocidad de propagación de dichas ondas puede estimarse suponiendo que τ y q son cero, y que la velocidad del fluido v_z es pequeña.[1]

a. Demostrar que despreciando τ y q la Ec. *J* de la Tabla 10.4-1 puede escribirse de la siguiente forma para obtener la relación p-T en una onda sonora.

$$\frac{dp}{dT} = \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \hat{V}} \right)_p \tag{10.Q-1}$$

Utilizar esta expresión para demostrar que

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \left[\frac{\rho \hat{C}_v (\partial \ln T / \partial \ln \hat{V})_p}{\rho \hat{C}_v (\partial \ln T / \partial \ln \hat{V})_p - (\partial p / \partial T)_\rho} \right]$$

$$= \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \tag{10.Q-2}$$

Demostrar que para el caso concreto de un gas ideal,

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\hat{C}_v}{\hat{C}_v - R} \right) \frac{p_0}{\rho_0} \tag{10.Q-3}$$

siendo p_0 y ρ_0 la presión y densidad medias del fluido.

b. Linealizar la ecuación de movimiento despreciando los términos viscoso y gravitacional, así como todos los términos en que interviene la segunda potencia de la velocidad, con el fin de obtener

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p \tag{10.Q-4}$$

Justifíquese esta simplificación. Demostrar que esta ecuación puede escribirse así:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -v_s^2 \nabla \rho \tag{10.Q-5}$$

siendo

$$v_s^2 = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \tag{10.Q-6}$$

c. Linealizar la ecuación de continuidad despreciando el termino $(v \cdot \nabla \rho)$ y justificar esta simplificación. Diferenciar con respecto al tiempo la ecuación linealiida y combinar su resultado con el de *(b)* para obtener

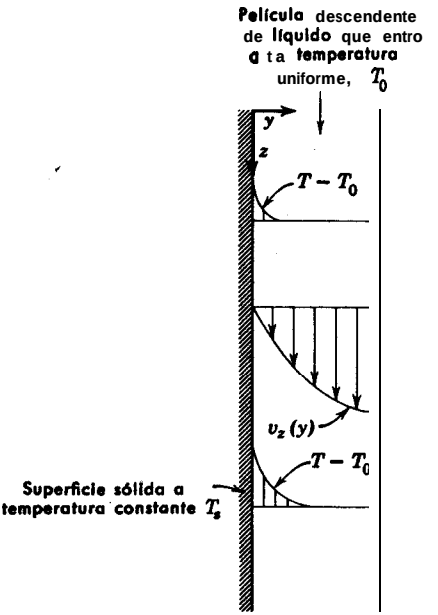
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho \tag{10.Q-7}$$

---

[1] Estas suposiciones dlo son apropiadas para perturbaciones infinitesimales de baja frecuencia. Las perturbaciones grandes, tales como ondas de choque, se propagan con velocidades mucho mas eleva-las; véase por ejemplo, J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954). p. 728.

d. Demostrar que una solución de esta ecuación es $\rho = \rho_0[1 + \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - v_s t)\right)]$.

Esta solución representa una onda armónica de longitud de onda λ y amplitud $\rho_0\phi_0$ que se mueve en la dirección z con una velocidad v,. Por consiguiente, v_s es la velocidad del sonido y es independiente de la amplitud y la longitud de onda, con tal de que la amplitud sea suficientemente pequeña para satisfacer las anteriores suposiciones.



Pig. 10.R. Transmisión de calor a una película líquida descendente.

10.R$_3$ Transmisión de calor desde una pared a una película descendente: tiempos de contacto cortos[2]

Una película de un líquido frío que desciende por una pared sólida vertical o inclinada, tal como se indica en la Fig. 10.R, ejerce un considerable efecto de refrigeración sobre la superficie del sólido. Estimar la velocidad de transmisión de calor desde la pared al fluido para tiempos de contanto tan cortos que la temperatura del fluido sólo varía apreciablemente en la región inmediata a la pared.

a. Demostrar que $v_z = v_{máx}[2y/\delta - (y/\delta)^2]$, siendo $v_{máx} = \delta^2\rho g/2\mu$ y que por lo tanto en las inmediaciones de la pared

$$v_z \doteq \frac{\rho g \delta}{\mu} y \qquad \text{(10.R-1)}$$

2 Véase R. L. PIGFORD, C. *E. P. Symposium Series,* núm-.. 17, **51, 79-92** (1955).

b. Demostrar que la ecuación de energla se reduce a

$$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{10.R-2}$$

(¿ Qué suposiciones simplificantes se necesitan para obtener este resultado?) Combinar los resultados anteriores para obtener la ecuación diferencial aproximada

$$y \frac{\partial T}{\partial z} = \beta \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \tag{10.R-3}$$

en la que $\beta = \mu k / \rho^2 \hat{C}_p g \delta$.

c. Demostrar que para cortos tiempos de contacto pueden tomarse las siguientes condiciones límite

C.L. 1:	$T = T_0$	para $z = 0$ e $y > 0$	(lO.R-4)
C.L. 2:	$T = T_0$	para $y = \infty$ y z finito	(10.R—5)
C.L. 3:	$T = T_s$	para y = 0 y $z > 0$	(10.R—6)

d. Escribir de nuevo la ecuación diferencial y las condiciones limite anteriores en función de las variables reducidas

$$\Theta = \frac{(T - T_0)}{(T_s - T_0)} \tag{10.R-7}$$

$$\eta = y / \sqrt[3]{9\beta z} \tag{lO.R-8}$$

Integrar una vez para obtener $d\Theta/d\eta = Ce^{-\eta^3}$, siendo C una constante de integración. Integrar de nuevo utilizando las condiciones limite, con el fin de obtener

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} \int_\eta^\infty e^{-\eta^3} d\eta \tag{10.R-9}$$

e. Demostrar que la densidad *media* de flujo de calor transmitido al fluido es

$$(q_y)_{\text{med}}|_{y=0} = \tfrac{1}{3} k (T_s - T_0) \frac{(\beta/9L)^{1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \tag{10.R-10}$$

10.S$_4$ Deducción de la ecuación de energía por aplicación del teorema de la divergencia

Considerar un elemento volumétrico estacionario G de superficie y volumen fmitos V_G y S_G. Plantear un balance de energía de la forma de la Ec. 10.1 — 1 para todo el elemento de voiumen. Puesto que las condiciones en el elemento no pueden considerarse uniformes, será necesario efectuar la integral extendida a V_G de la velocidad de ganancia de energía y trabajo producido por unidad de volumen contra las fuerzas de volumen y la integral extendida a S_G de la velocidad de convección de energía y el trabajo producido contra las fuerzas de superficie. Convertir ahora todas las integrales de superficie en integrales de volumen, utilizando 'el teorema de la divergencia y demostrar que la expresión que resulta puede transformarse en la Ec. 10.1-9.

10.T$_4$ La ecuación de variación para la entropía de un fluido puro

a. Considerar un determinado elemento de volumen Δx Ay Az y escribir un «balance de entropía» para este sistema. Sean σ_x, σ_y y σ_z los componentes de un «vector densidad de flujo de entropía» s, que se mide con respecto a la velocidad del fluido v. Finalmente, desígnese por g la

«velocidad de producción de entropía» por unidad de volumen. Demostrar que cuando el volumen $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ se hace tender a cero, se obtiene finalmente

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{s}) + g \tag{10.T-1}$$

siendo $\hat{S}$ la entropía por unidad de masa.

b. Si se admite que las magnitudes termodinámicas pueden definirse localmente en un caso de no equilibrio, $\hat{U}$ puede relacionarse con $\hat{S}$ y $\hat{V}$ de acuerdo con la ecuación termodinámica $d\hat{U} = T\,d\hat{S} - p\,d\hat{V}$. Combinar esta expresión con la Ec. 10.1-13 para llegar a

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \boldsymbol{q}) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{v}) \tag{10.T-2}$$

c. La densidad de flujo local de entropía es igual a la densidad de flujo local de energía dividida por la temperatura local, es decir, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}/T$. Una vez admitida esta relación entre $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{q}$ se pueden comparar las Ecs. 10.T-1 y 2 con el fin de obtener la siguiente expresión para la velocidad de producción de entropía por unidad de volumen:

$$g = -\frac{1}{T^2}(\boldsymbol{q} \cdot \nabla T) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{v}) \tag{10.T-3}$$

El primer termino del segundo miembro representa la velocidad de producción de entropía relacionada con el transporte de energía y el segundo termino es la velocidad de producción de entropía correspondiente al transporte de cantidad de movimiento. La Ec. 10.T-3 es el punto de partida para el estudio termodinámico de los procesos irreversibles en un fluido puro.[3]

d. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse al introducir en la Ec. 10.T-3 la ley de Newton de la viscosidad y la ley de Fourier de la conducción del calor?

---

[3] J.G. KIRKWOOD y B. L. CRAWFORD Jr., *J. Phys. Chem.*, 56, 1048-1051 (1952); R. B. BIRD, C. F. CURTISS y J. O. HIRSCHFELDER, *Chem. Engr. Prog. Symp. Series. núm.* 16, 51, 69-85 (1955).

CAPÍTULO 11

DISTRIBUCIONES DE TEMPERATURA CON MAS DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

En el Capítulo 9 se ha visto cómo pueden resolverse diversos problemas de flujo de calor mediante balances envolventes de energía. En el Capítulo 10 se ha desarrollado la ecuación de energía para sistemas de flujo, que, en principio, describe los procesos de transferencia de calor para casos más complejos. En § 10.5, al ilustrar sobre la utilidad de la ecuación de energía, se han presentado una serie de ejemplos, para la mayor parte de los cuales no es preciso el conocimiento de las ecuaciones entre derivadas parciales. En este capítulo se tratan varias clases de problemas de transmisión de calor en los que interviene más de una variable independiente: conducción del calor en sólidos en estado no estacionario, conducción del calor en estado estacionario con flujo viscoso, conducción bidimensional del calor en estado estacionario en sólidos, y flujo de calor en capas límite laminares. Estas cuestiones son en cierto modo semejantes a las que se han tratado en el Capítulo 4, tanto en los procesos físicos como en las técnicas matemáticas.

§ ll .1 CONDUCCIÓN NO ESTACIONARIA DEL CALOR EN SÓLIDOS

Para el caso de sólidos, la ecuación de energía, Ec. 10.1 — 19, después de introducir la ley de Fourier de conducción del calor, se transforma en

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = (V \cdot k\nabla T) \tag{11.1-1}$$

Si la conductividad calorífica es independiente de la temperatura o la posición, la Ec. 11.1-1 se hace

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \tag{11.1-2}$$

en la que $a = k/\rho \hat{C}_p$ es la difusividad térmica del sólido.

La Ec. 11. 1-2 es una de las ecuaciones más estudiadas de física teórica. El tratado de Carslaw y Jaeger[1] está totalmente dedicado a los métodos de resolución de

[1] H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), segunda edición.

esta ecuación; este libro debiera ser familiar a todos los ingenieros y hombres que se dedican a la ciencia aplicada debido a la amplitud de las soluciones tabuladas de la Ec. 11.1-2 para un numero enorme de condiciones iniciales y límite. Muchos problemas que frecuentemente se presentan en conducción del calor pueden resolverse simplemente buscando la solución en este libro de Carslaw y Jaeger.

En esta sección se comienza por dar dos de las soluciones más sencillas de la Ec. 11.1-2 para estado no estacionario, con el fin de iniciar el tema. Dichas soluciones ilustran los métodos de combinación de variables y de separación de variables, que se han utilizado también en § 4.1. Después se presenta un ejemplo de problema resuelto mediante la transformación de Laplace que es una técnica de gran importancia para la solución de problemas de estado no estacionario. El lector que desee ejemplos más completos, los encontrará sin duda en el libro de Carslaw y Jaeger.

Ejemplo 11.1-1. Calentamiento de una lámina semiinfinita[2]

Un cuerpo sólido que ocupa el espacio comprendidc entre y = 0 e $y = \infty$ está inicialmente a la temperatura T_0. En el instante $t = 0$, la superficie situada en y = 0 eleva bruscamente su temperatura a T_1 manteniendo dicha temperatura para $t > 0$. Hallar los perfiles de temperatura en función del tiempo $T(y, t)$.

Solución. Para este problema, la Ec. 11.1-2 resulta

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \tag{11.1-3}$$

en la que se ha introducido una temperatura adimensional $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$. Para esta temperatura adimensional, las condiciones inicial y límite adquieren esta forma sencilla:

C.I.:	para $t < 0$	$\Theta = 0$ para cualquier valor de y	(11.1-4)
C.L. 1:	para $y = 0$	$\Theta = 1$ » » » » $t > 0$	(11.1-5)
C.L. 2:	para $y = \infty$	$\Theta = 0$ » » » » $t > 0$	(11.1-6)

Este problema es matemáticamente análogo al planteado en las Ecs. 4.1 — 1 a 4; por tanto, puede tomarse directamente. la solución de la Ec. 4.1 — 13 cambiando convenientemente la notación

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\alpha t}} e^{-\eta^2}\, d\eta \tag{11.1-7}$$

0

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \tag{11.1-8}$$

---

[2] Véase K. T. YANG, *J. Appl. Mechanics*, 25, 146-147 (1958), donde se presenta una solución con conductividad calorífica variable.

La solución gráfica de la Fig. 4.1-2 para $n = 1$, describe los perfiles de temperatura, siendo la ordenada $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$ y la abscisa $y/\sqrt{4\alpha t}$.

Como la función de error adquiere un valor de **0,99** cuando el argumento vale alrededor de 2, el «espesor de **penetración térmica**» δ_T es

$$\delta_T = 4\sqrt{\alpha t} \tag{11.1-9}$$

Es decir, que para distancias de $y > \delta_T$, la temperatura ha variado menos del 1 por ciento de la diferencia $(T_1 - T_0)$. Si se precisa calcular la temperatura en una lamina de espesor finito, la solución de la **Ec.** 11.1-8 **constituirá** una buena **aproximación** siempre que δ_T sea pequeño con respecto al espesor de la **lámina.** Cuando δ_T es del orden de magnitud del espesor de la lamina hay que **utilizar** la **solución** del ejemplo 11.1-2.

La densidad de flujo de calor en la pared puede calcularse a partir de la **Ec.** ll. 1 - 8 :

$$q_y|_{y=0} = -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y\ 0} = \frac{k}{\sqrt{\pi\alpha t}}(T_1 - T_0) \tag{11.1-10}$$

Por tanto, el espesor de **penetración varía** con $t^{1/2}$ y la densidad de flujo de calor en la pared con $t^{-1/2}$.

Ejemplo 11.1-2. Calentamiento de una lámina finita

Una lamina que ocupa el espacio comprendido entre $y = -b$ e $y = +b$ esta inicialmente a la temperatura T_0. En el instante $t = 0$ las **superficies** situadas en $y = \pm b$ **se** ponen bruscamente a T_1 *y se* mantienen a esta temperatura Hallar $T(y, t)$.

Solución. Introducimos para este problema los siguientes números adimensionales:

$$\Theta = \frac{T_z - T}{T_1 - T_0} = \text{temperatura adimensional (distinta de } \theta \text{ del ejemplo 11.1-1)} \tag{11.1-11}$$

$$\eta = \frac{Y}{b} = \text{longitud adimensional} \tag{11.1-12}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{b^2} = \text{tiempo adimensional} \tag{11.1-13}$$

La experiencia indica que es conveniente introducir estos números **adimensionales,** pues. to que las ecuaciones **diferenciales** y las condiciones **límite** toman una forma más sencilla:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2} \tag{11.1-14}$$

C.I.: para $\tau = 0$ $\quad \Theta = 1$ **(11.1-15)**

C.L. 1 y 2: para $\eta = \pm 1$ $\quad \Theta = 0$ (11.1-16)

Aquí se presenta la **solución clásica** por el método de separación de variables. Adelantamos ya que se puede encontrar una solución de la forma del siguiente producto

$$\Theta(\eta, \tau) = f(\eta)g(\tau) \tag{11.1-17}$$

Substituyendo esta función de ensayo en la Ec. 11.1-14 y dividiendo por fg, se obtiene

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f}\frac{d^2f}{d\eta^2} \tag{11.1-18}$$

El primer miembro es una función exclusiva de τ, al igual que el segundo lo es sólo de η. Esto es cierto únicamente si ambos miembros son iguales a una constante, que vamos a llamar $-c^2$. El problema se reduce por tanto a la resolución de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias :

$$\frac{dg}{d\tau} = -c^2 g \tag{11.1-19}$$

$$\frac{d^2f}{d\eta^2} = -c^2 f \tag{11.1-20}$$

que se pueden integrar para obtener

$$g = A \exp(-c^2\tau) \tag{11.1-21}$$

$$f = B \operatorname{sen} c\eta + C \cos c\eta \tag{11.1-22}$$

siendo A, B y C constantes.

Se observa, que, debido a la simetría del problema Θ, y por tanto f, tienen que ser funciones simétricas de η. Por consiguiente, B tiene que ser igual a cero. Utilizando una cualquiera de las dos condiciones límite se obtiene

$$C \cos c = 0 \tag{11.1-23}$$

Resulta evidente que C no puede ser igual a cero ya que esto conduciría' a una solución físicamente inadmisible. Por consiguiente es forzoso que

$$c = (n + \tfrac{1}{2})\pi \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \infty \tag{11.1-24}$$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones para C y c llegamos a la conclusión de que

$$\Theta_n = A_n C_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\tau} \cos(n + \tfrac{1}{2})\pi\eta \tag{11.1-25}$$

es una solución admisible. Los subíndices n sirven para indicar que 4 y C pueden ser diferentes para cada valor de n. La solución más general de esta forma se obtiene sumando las soluciones de la forma de la Ec. 11.1-25 para todos los valores enteros de n desde $n = -\infty$ hasta $n = +\infty$:

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\tau} \cos(n + \tfrac{1}{2})\pi\eta \tag{11.1-26}$$

en la que $D_n = A_n C_n + A_{-(n+1)} C_{-(n+1)}$.

Los valores de D_n se determinan ahora utilizando la condición inicial, que establece que

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(n + \tfrac{1}{2})\pi\eta \tag{11.1-27}$$

Multiplicando por $\cos\,(m + \frac{1}{2})\pi\eta\ d\eta$ e integrando desde $\eta = -1$ hasta $\eta = +1$ se obtiene

$$\int_{-1}^{+1} \cos\,(m + \tfrac{1}{2})\pi\eta\ d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_{-1}^{+1} \cos\,(m + \tfrac{1}{2})\pi\eta \cos\,(n + \tfrac{1}{2})\pi\eta\ d\eta \qquad (11.1\text{-}28)$$

Al efectuar las integraciones indicadas, se encuentra que todas las integrales del sumatorio del segundo miembro son iguales a cero, a excepción del único término en el que n = *m*. De acuerdo con esto, se llega a

$$\frac{\operatorname{sen}(m + \frac{1}{2})\pi\eta}{(m + \frac{1}{2})\pi}\Bigg|_{\eta=-1}^{\eta=+1} = D_m\left(\frac{\frac{1}{2}(m + \frac{1}{2})\pi\eta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(m + \frac{1}{2})2\pi\eta}{(m + \frac{1}{2})\pi}\right)\Bigg|_{\eta=-1}^{\eta=+1} \qquad (11.1\text{-}29)$$

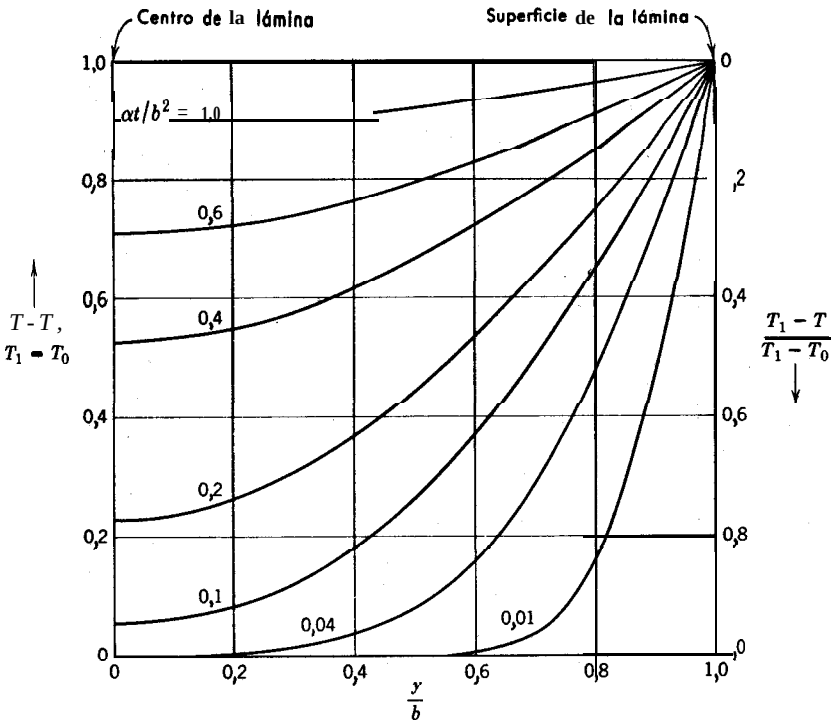


Fig. 11.1-1. Perfiles de temperatura para la conducción no estacionaria del calor en una lámina de espesor finito. [H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), p. 101.1

Introduciendo los límites y despejando D_m se obtiene

$$D_m = \frac{2(-1)^m}{(m + \frac{1}{2})\pi} \qquad (11.1\text{-}30)$$

Substituyendo esta expresión en la Ec. 11.1-26 y expresándola en función de las variables originales se obtiene

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi} e^{-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \alpha t/b^2} \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{\pi y}{b} \qquad (11.1\text{-}31)$$

Las soluciones de muchos problemas de conducción del calor en régimen no estacionario tienen la forma de una serie finita como la obtenida aquí. Dicha serie converge rápidamente para valores grandes del tiempo adimensional $\alpha t/b^2$. Para tiempos muy cortos la convergencia es muy lenta, y en el límite cuando $\alpha t/b^2 \to 0$, puede demostrarse (utilizando la transformación de Laplace) que la solución de la Ec. ll. 1-3 1 tiende a la de la Ec. ll. 1 — 8. Como para algunos cálculos prácticos la Ec. 11.1-31 resulta engorrosa, es más fácil utilizar una representación gráfica como la de la Fig. 1 1.1 — 1. (Véase problema 1 l.C.)

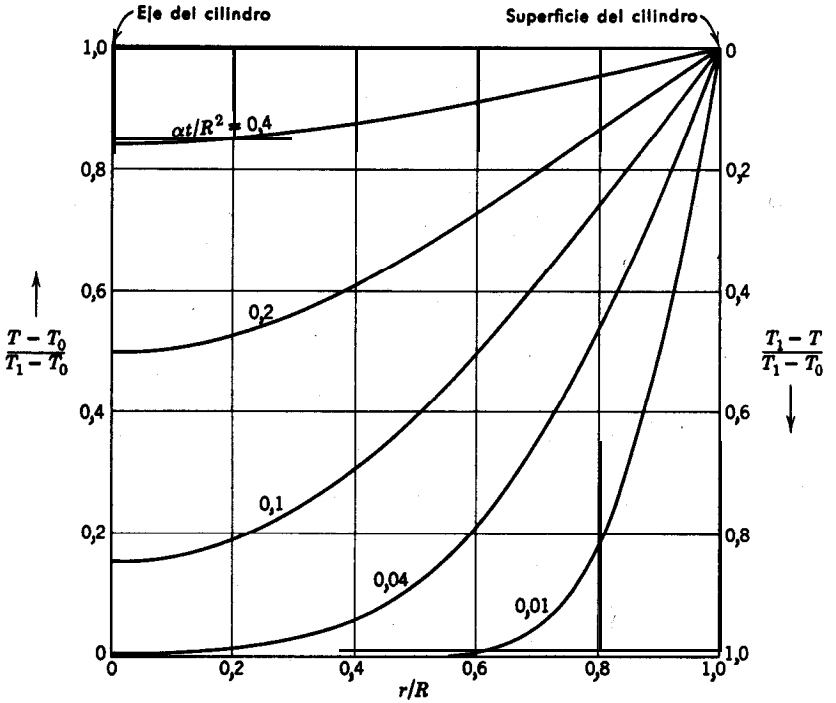


Fig. 11.1-2. Perfiles de temperatura para la conducción del calor en régimen no estacionario en un cilindro. T_0 es la temperatura inicial del cilindro y T_1 es la temperatura de la superficie para $t > 0$. [H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), p. 200.1

En las Figs. 11.1-2 y 3 se presentan los resultados análogos a los de la Fig. ll. l-l para cilindros y esferas infinitos. Estos gráficos pueden utilizarse para hallar las soluciones de problemas análogos de conducción del calor en paralelepípedos rectangulares y cilindros finitos. (Véase problema ll .L).

Ejemplo 11.1-3. Enfriamiento de una esfera que está en contacto con un fluido fuertemente agitado

Una esfera homogénea de un material solido, que esta inicialmente a la temperatura T_1, se sumerge bruscamente en un volumen V_f de un fluido fuertemente agitado, de tem-

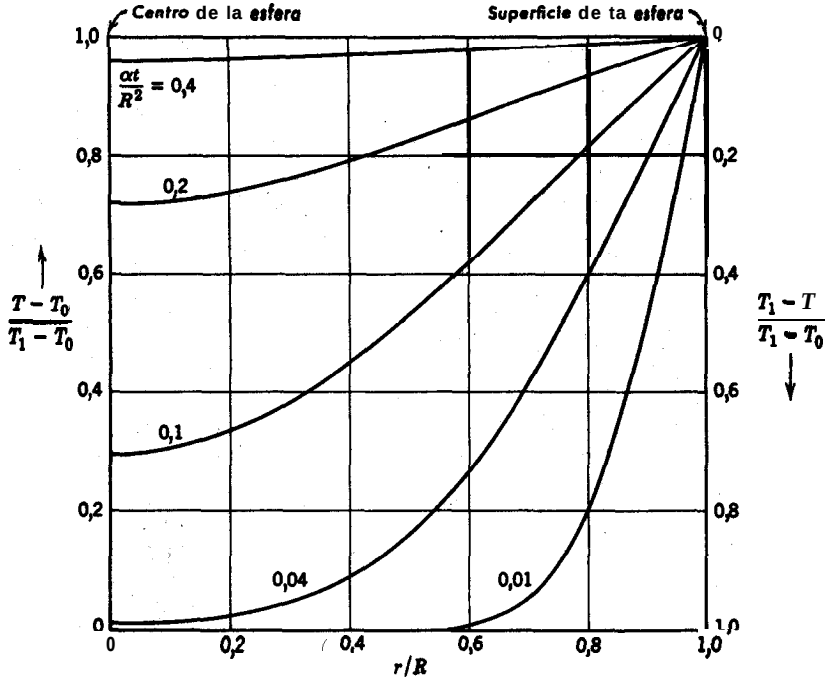


Fig. 11.1-3. Distribución de temperatura en una esfera, resultante de la conducción del calor en estado no estacionario. T_0 es la temperatura inicial de la esfera y T_1 *es la* temperatura de *la* superficie para $t > 0$. [H. S. Carslaw y J. *C.* Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), p. 234.1

peratura T_0, que esta contenido en un tanque aislado térmicamente. Se desea hallar la difusividad térmica del sólido $\alpha_s = k_s/\rho_s C_{ps}$ observando la variación de la temperatura T_f del *fluido* con el tiempo. Se utilizan las siguientes variables adimensionales:

$$\Theta_s = \frac{T_1 - T_s}{T_1 - T_0} = \text{temperatura adimensional del solido (una función de } \xi \text{ y } \tau) \tag{11.1-32}$$

$$\Theta_f = \frac{T_1 - T_f}{T_1 - T_0} = \text{temperatura adimensional del fluido (una función exclusiva de } \tau\text{, lo que supone «agitación perfecta»)} \tag{11.1-33}$$

$$\xi = \frac{r}{R} = \text{coordenada radial adimensional} \qquad (11.1\text{-}34)$$

$$\tau = \frac{\alpha_s t}{R^2} = \text{tiempo adimensional} \qquad (11.1\text{-}35)$$

Solución. El lector puede comprobar que el planteamiento del problema en función de las variables adimensionales es

Sólido	Fluido
$\frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial \Theta_s}{\partial \xi}\right)$ (11.1–36)	$\frac{d\Theta_f}{d\tau} = -\frac{3}{B}\frac{\partial \Theta_s}{\partial \xi}\Big\vert_{\xi\ 1}$ (11.1–40)
Para $\tau = 0$ Θ_s - 0 (11.1-37) Para $\xi = 1$ $\Theta_s = \Theta_f$ (11.1-38) Para $\xi = 0$ $\Theta_s =$ finito (11.1-39)	Para $\tau = 0$ $\Theta_f = 1$ (11.1-41)

siendo B el número adimensional $V_f\rho_f\hat{C}_{pf}/V_s\rho_s\hat{C}_{ps}$, y representando por V el volumen del sólido y del fluido. A continuación se indica la transformación"de Laplace[3,4] de las anteriores ecuaciones y sus condiciones límite:

Sólido	Fluido
$p\bar{\Theta}_s = \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\bar{\Theta}_s}{d\xi}\right)$ (11.1–42)	$p\bar{\Theta}_f - 1 = -\frac{3}{B}\frac{d\bar{\Theta}_s}{d\xi}\Big\vert_{\xi=1}$ (11.145)
Para $\xi = 1$ $\bar{\Theta}_s = \bar{\Theta}_f$ (11.1–43) Para $\xi = 0$ $\bar{\Theta}_s =$ finito (11.1-44)	

La solución de la Ec. 11. 1-42 es

$$\bar{\Theta}_s = \frac{C}{\xi}\operatorname{senh}\sqrt{p}\xi + \frac{D}{\xi}\cosh\sqrt{p}\xi \qquad (11.1\text{–}46)$$

---

3 CARSLAW y JAEGER, op. *cit.*, capitulo XII; nosotros utilizamos la definición

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = \bar{f}(p) = \int_0^\infty f(\tau)\exp(-p\tau)\,d\tau$$

4 R. V. CHURCHIL, *Modern Operational Mathematics in Engineering*, McGraw-Hill, Nueva York (1944).

Pero de acuerdo con la Ec. 11.1-44, $D = 0$. Substituyendo este resultado en la Ec. 11.1−45 se obtiene

$$\bar{\Theta}_f = \frac{1}{p} + 3\frac{C}{BP}(\text{senh } \sqrt{p} - \sqrt{p}\cosh \sqrt{p}) \tag{11.147}$$

Introduciendo estos dos últimos resultados en la condición límite transformada de la Ec. 11.1-43 con el fin de determinar C, se obtiene finalmente

$$\bar{\Theta}_f = \frac{1}{p} + 3\left\{\frac{1 - (1/\sqrt{p})\tanh \sqrt{p}}{(3 - Bp)\sqrt{p}\tanh \sqrt{p} - 3p}\right\} \tag{11.1–48}$$

Tomamos el transformador inverso de Laplace

$$\Theta_f = 1 + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{p}}\tanh \sqrt{p}}{(3 - Bp)\frac{1}{\sqrt{p}}\tanh \sqrt{p} - 3p}\right\} \tag{11.1–49}$$

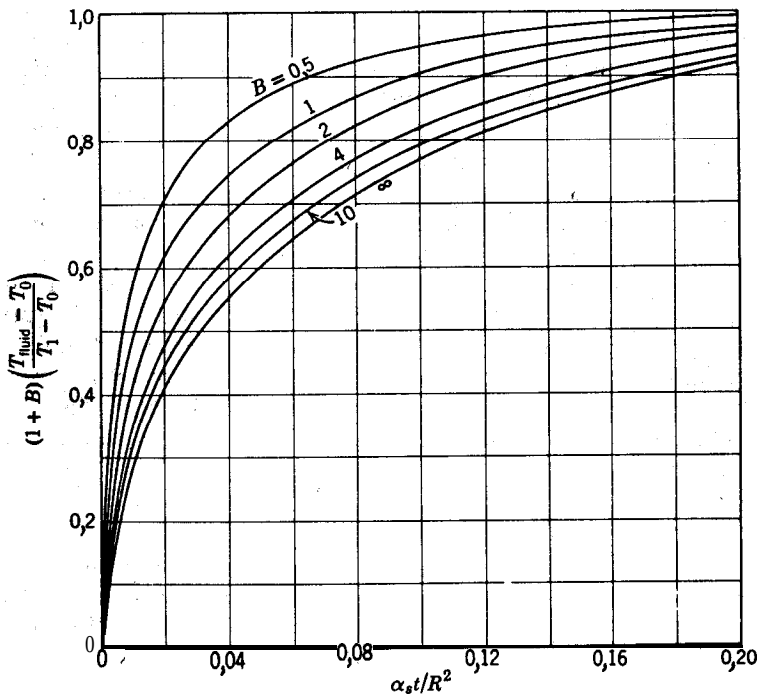


Fig. **11.1-4.** Variación de la temperatura del fluido con el tiempo cuando una esfera de radio R, que está a la temperatura T_1, se introduce en un fluido perfectamente agitado y cuya temperatura es T_0. [CARSLAW Y JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), pág. 206.]

El denominador del último término tiene una raíz doble para $p = 0$ y una serie de raíces $\sqrt{p_k} = ib_k$, siendo $k = 1, 2, 3, \ldots \infty$ e $i = \sqrt{-1}$; b_k son las raíces no nulas de tang

$b = 3b/(3 + Bb^2)$. Para completar la inversión puede utilizarse el teorema de Heaviside.[5] El resultado es[6]

$$\Theta_f = \frac{B}{1+B} + 6B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-b_k^2 \tau}}{B^2 b_k^2 + 9(1+B)} \qquad (11.1\text{-}50)$$

El único término que contiene α_s en esta expresión es el tiempo adimensional $\tau = \alpha_s t/R^2$. En la Fig. 11.1-4 se representa gráficamente la Ec. ll .1 -50. Obdrvese que la técnica del transformador de Laplace ha permitido obtener la historia de la temperatura del fluido sin hallar los perfiles de temperatura en el sólido.

§ 11.2 CONDUCCIÓN DEL CALOR EN ESTADO ESTACIONARIO PARA EL FLUJO LAMINAR DE UN FLUIDO VISCOSO

En los Capítulos 9 y 10 se ha hecho la distinción entre convección libre y forzada. Para hallar los perfiles de temperatura en la convección forzada con flujo laminar, suponiendo que puede despreciarse la variación de la viscosidad con la temperatura, se utiliza el siguiente procedimiento: se resuelve primeramente la ecuación de movimiento para hallar la distribución de velocidad, que se substituye posteriormente en la ecuación de energía con el fin de hallar una ecuación diferencial parcial de segundo orden para la distribución de temperatura.

No se han resuelto analíticamente muchos problemas de flujo de calor por convección forzada. Mencionaremos por lo menos el clásico *problema de Graetz-Nusselt*, que describe los perfiles de temperatura para Cl flujo en un tubo, cuando la temperatura de la pared en un plano del tubo cambia bruscamente desde un valor determinado a otro también fijo (es decir, que el perfil de temperatura de la pared es una función escalonada). Este problema se trata en numerosos libros de texto y artículos de revista, razón por la que no se estudia aquí. [1, 2, 3, 4] El problema se ha' ampliado tambitn para el flujo no-newtoniano.[5,6] Otro problema de interés lo constituye el flujo en un tubo con efectos de calentamiento viscoso, que a veces se denomina *problema de Brinkman*.[7,8,9]

---

5 R. V. Churchil, *op. cit.*, pp. 44-50.

6 Carslaw y Jaeger, *op. cit.*, pp. 240-241.

1 M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1949), vol. I, pp. 451464.

2 U. GRIGULL, *Wärmeübertragung*, Springer, Berlin (1955), tercera edición, pp. 179-185.

3 K. YAMAGATA, *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Kyushu Imperial University, vol. III, núm. 6, Fukuoka, Japón (1940).

4 M. TRIBUS y J. KLEIN, capítulo de *Heat Transfer-A Symposium*, Eng. Res. Inst., Universidad de Michigan (1953), pp. 211-235.

5 B. C. LYCHE y R. B. BIRD, *Chem. Eng. Sci., 6,* 35-41 (1956).

6 J. SCHENK y J. VAN LAAR, *Appl. Sci. Research, A7, 449-462* (1958).

7 H. C. BRINKMAN, *Appl. Sci. Research,* A2, 120-124 (1951).

8 R. B. BIRD, *SPE Journal*, ll, 35-40 (1955), ampliación del problema de Brinkman para flujo no-newtoniano.

9 H. L. TOOR, *bd Eng. Chem.*, 48, 922-926 (1956), ampliación del problema de Brinkman para incluir los efectos caloríficos relacionados con la compresibilidad.

En esta sección se discute nuevamente el problema tratado en § 9.8, cual es la determinación de los perfiles de temperatura para el flujo laminar en un tubo circular con densidad de Aujo de calor constante en la pared. Aquí se obtiene la ecuación diferencial parcial correspondiente a la Ec. 9.8-19. Después se halla una solución asintótica que es válida para grandes distancias medidas a partir del comienzo de la zona calentada. En esta sección se obtiene la solución completa a la ecuación entre derivadas parciales, así como también una solución asintótica para distancias cortas. O sea, que aquí se discute el sistema de la Fig. 9.8-2 desde tres puntos de vista :

a. Solución de la ecuación entre derivadas parciales por el método de separación de variables (ejemplo ll .2— 1).

b. Solución asintótica para distancias cortas a lo largo del tubo por el método de combinación de variables (ejemplo 11.2-2).

c. Solución asintótica para grandes distancias a lo largo del tubo (§ 9.8).

Ejemplo 11.2— 1. Flujo laminar en un tubo con densidad de flujo de calor constante en la pared

Resolver la Ec. 9.8 -19 con las condiciones limite correspondientes a las Ecs. 9.8-20, 21 y 22.

Solución. La solución completa para el perfil de temperatura sera de la forma

$$\Theta(\xi, \zeta) = \Theta_\infty(\xi, \zeta) - \Theta_d(\xi; \zeta) \tag{11.2-1}$$

en la que $\Theta_\infty(\xi, \zeta)$ es la solución asintótica correspondiente a la Ec. 9.8 — 3 1 y Θ_d es una función que estará exponencialmente amortiguada con C. La función Θ_d ha de satisfacer a la Ec. 9.8 — 19 y cumplir las condiciones límite :

C.L. 1: para $\xi = 0$ $\quad \dfrac{\partial \Theta_d}{\partial \xi} = 0$ (11.2-2)

C.L. 2: para $\xi = 0$ $\quad \dfrac{\partial \Theta_d}{\partial \xi} = 0$ (11.2-3)

C.L. 3: para $\zeta = 0$ $\quad \Theta_d = \Theta_\infty(\xi, 0)$ (11.2-4)

Adelantamos que la función $\Theta_d(\xi, \zeta)$ sera de la forma

$$\Theta_d(\xi, \zeta) = \Xi(\xi) Z(\zeta) \tag{11.2-5}$$

y por lo tanto separamos la Ec. 9.8-19 en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -c^2 Z \tag{1.1.2-6}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\Xi}{d\xi}\right) + c^2(1 - \xi^2)\Xi = 0 \tag{11.2-7}$$

siendo $-c^2$ la constante de separación. Como las condiciones límites de Ξ son $d\Xi/d\xi = 0$ para $\xi = 0, 1$, tenemos un problema de Sturm-Liouville. Sabemos que habrá un número infinito de valores c, y de funciones Ξ_i y que la solución final debe ser de la forma

$$\Theta = \Theta_\infty(\xi, \zeta) - \sum_{i=1}^{\infty} B_i \, e^{-c_i^2 \zeta} \, \Xi_i(\xi) \tag{11.2-8}$$

donde

$$B_i = \frac{\int_0^1 \Theta_\infty(\xi, 0)\Xi_i(\xi)(1 - \xi^2)\xi \, d\xi}{\int_0^1 [\Xi_i(\xi)]^2(1 - \xi^2)\xi \, d\xi} \tag{11.2-9}$$

De esta forma, el problema se reduce al de hallar las funciones Ξ_i resolviendo la Ec. 11.2 - 7 y obtener c, por aplicación de la condición límite para $\xi = 1$. Este procedimiento, que requiere un considerable trabajo numérico, se ha aplicado a este problema[10] hasta $i = 7$.

Ejemplo 11.2-2. Flujo laminar en un tubo con densidad de flujo de calor constante en la pared: Solución asintótica para distancias pequeñas

Obsérvese que la suma de la Ec. 11.2-8 converge rápidamente para valores grandes de z pero lentamente para valores pequeños. Deducir una expresión para $T(r, z)$ que sea útil para pequeños valores de z.

Solución. Cuando z es pequeño, la penetración de calor se reduce a una delgada envoltura en las proximidades de la pared, de forma que las tres aproximaciones siguientes conducen a resultados exactos en el límite cuando $z \to 0$:

a. Los efectos de curvatura pueden despreciarse y tratar el problema como si la pared fuese plana; llamaremos a la distancia desde la pared $s = R - r$.

b. Puede considerarse que el fluido está comprendido entre la superficie de transmisión de calor (plana), $s = 0$, y $s = \infty$.

c. El perfil de velocidad puede considerarse lineal, cuya pendiente es la pendiente verdadera en la pared: $v_z(s) = v_0 s/R$, siendo $v_0 = (p_0 - p_L)R^2/2\mu L$.

La ecuación de energía para este modelo simplificado es

$$v_0\left(\frac{s}{R}\right)\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \tag{11.2-10}$$

En la práctica resulta más fácil operar con la correspondiente ecuación de q_s, obtenida al dividir la Ec. 11.2 - 10 por s y diferenciar luego con respecto a s:

$$v_0\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial q_s}{\partial z} = \alpha \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial q_s}{\partial s}\right) \tag{11.2-11}$$

Es más conveniente operar en función de variables adimensionales:

$$\psi = \frac{q_s}{q_1}; \qquad \eta = \frac{s}{R}; \qquad \lambda = \frac{z\alpha}{v_0 R^2} \tag{11.2-12}$$

10 R. SIEGEL, E. M. SPARROW, y T. M. HALLMAN, *Appl. Sci. Research*, A1, *386-392* (1958).

de forma que la Ec. 11.2-11 resulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \tag{11.2-13}$$

con las condiciones límite

C.L. 1: para $\lambda = 0$ $\psi = 0$ (11.2-14)

C.L. 2: para $\eta = 0$ $\psi = 1$ (11.2-15)

C.L. 3: para $\eta = \infty$ $\psi = 0$ **(11.2-16)**

Este problema puede resolverse por el método de combinación de variables (véase ejemplo 4.1 – 1 y 11.1 – 1) utilizando la nueva variable independiente:

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt[3]{9\lambda}} \tag{11.2-17}$$

Por tanto, la ecuación de densidad de flujo de calor es

$$\chi\psi'' + (3\chi^3 - 1)\psi' = 0 \tag{11.2-18}$$

en la que los acentos indican diferenciación con respecto a χ. Las condiciones límite son las siguientes: para $\chi = 0$, $\psi = 1$ y para $\chi = \infty$, $\psi = 0$. La solución es

$$\psi = \frac{\int_\chi^\infty \chi e^{-\chi^3}\, d\chi}{\int_0^\infty \chi e^{-\chi^3}\, d\chi} = \frac{3}{\Gamma(\frac{2}{3})}\int_\chi^\infty \chi e^{-\chi^3}\, d\chi \tag{11.2-19}$$

El perfil de temperatura puede obtenerse por integración:

$$\int_T^{T_0} dT = -\frac{1}{k}\int_s^\infty q_s\, ds \tag{11.2-20}$$

o bien, en números adimensionales

$$\Theta = \frac{T - T_0}{q_1 R/k} = \sqrt[3]{9\lambda}\int_\chi^\infty \psi\, d\chi \tag{11.2-21}$$

Introduciendo en este resultado la anterior expresión de ψ se obtiene

$$\Theta = \sqrt[3]{9\lambda}\left[\frac{e^{-\chi^3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} - \chi\left\{1 - \frac{\Gamma(\frac{2}{3}, \chi^3)}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right\}\right] \tag{11.2-22}$$

En esta expresión, $\Gamma(\frac{2}{3})$ es una «función gamma (completa)» y $\Gamma(\frac{2}{3}, \chi^3)$ es una «función gamma incompleta». Se han obtenido resultados semejantes para el problema con tempe-

ratura de pared constante[11,12] y para el problema análogo de transferencia de materia;" también se ha discutido la aplicación a flujo no-newtoniano. (Véase problema 9.R.)

Con el fin de comparar los resultados de este ejemplo con los del ejemplo 11.2-1 indicamos que $\eta = 1 - \xi$, $\lambda = \zeta/2$ y las temperaturas adimensionales Θ son idénticas.

§ 11.3 FLUJO POTENCIAL BIDIMENSIONAL ESTACIONARIO DE CALOR EN SÓLIDOS

En § 4.3 se ha indicado que existe una clase de problemas de flujo estacionario no viscoso que pueden resolverse por los métodos de los mapas de conformación. Hay problemas para los que tanto la funcibn de potencial como la función de corriente están descritas por la ecuación bidimensional de Laplace. Es fácil ver, a partir de la Ec. 11.1-2, que la conducción bidimensional del calor en estado estacionario en solidos de conductividad calorífica constante, también está descrita por la ecuación bidimensional de Laplace.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{11.3-1}$$

Utilizamos ahora el hecho de que *cualquier* función analítica $w(z) = S(x, y) + iT(x, y)$ proporciona dos funciones escalares S y T, que son soluciones de la Ec. 11.3 — 1; las curvas de S = constante pueden interpretarse como lineas de flujo de calor, y las curvas de T = constante son las correspondientes isotermas para algún problema de flujo de calor. Estas dos series de curvas son ortogonales (es decir, que se cortan en ángulo recto). Además, los componentes del vector densidad de flujo de calor en un punto, vienen dados por

$$ik\frac{dw}{dz} = q_x - iq_y \tag{11.3-2}$$

Dada una función analítica, es fácil hallar los problemas de flujo de calor que están descritos por ella, pero, en cambio, el proceso inverso de encontrar una función analítica adecuada para un determinado problema de flujo de calor es, en general, muy difícil. Existen algunos métodos para ello, pero se salen del objeto de este libro.[1,2]

Intercambiando lineas de S constante y líneas de T constante se obtienen dos redes de flujo de calor para ca& función w(z). Por otra parte, operando con la función inversa z(w) se obtienen dos redes adicionales, de igual forma que en el caso de flujo ideal de fluidos.

---

11 M. A. LÉVÊQUE, *Ann. mines*, 13, 201 (1928).

12 R. L. PIGFORD, *C. E. P. Symposium Series*, núm. 17, vol. 51, 79-92 (1955).

13 H. KRAMERS y P. J. KREYGER, *Chem. Eng. Sci., 6, 42-48* (1956).

1 H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959). segunda edición, capítulo XVI.

2 R. V. CHURCHILL, *Introduction to Complex Variables and Aplications*, McGraw-Hill, Nueva York (1948), capítulo IX.

Obsérvese que el flujo potencial de fluidos y el flujo potencial de calor son matemáticamente semejantes, estando en ambos casos las redes de flujo bidimensional descritas por funciones analíticas. Sin embargo, físicamente presentan algunas diferencias importantes. Las redes de flujo de fluidos descritas en §4.3 corresponden a un fluido no viscoso, y por tanto **no pueden** utilizarse para calcular el transporte de cantidad de movimiento (resistencia de **fricción**) en superficies solidas. Las redes de flujo de calor descritas en esta sección son para sólidos que tienen una conductividad calorífica finita, por lo tanto pueden utilizarse para calcular el transporte de calor en cualquier superficie. Por otra parte, los perfiles de velocidad de § 4.3 no cumplen la ecuación de **Laplace,** mientras que los perfiles de temperatura de esta sección sí. El lector deseoso de saber más acerca de procesos físicos análogos descritos por la **ecuación** de **Laplace,** hallará una síntesis interesante en la monografía de **Sneddon.**[3]

Ejemplo 11.3— 1. Distribución de temperatura en una pared

Consideremos una pared de espesor b que se extiende desde 0 a ∞ en la **dirección** y y desde $-\infty$ a $+\infty$ en la dirección z. (**Véase** Fig. **11 .3** — 1.) Las superficies situadas en $x = \pm b/2$ se mantienen a la temperatura T_0, mientras que la **superficie** y = 0 de la base esta a T_1. Demostrar que la parte imaginaria de la **función,**[4]

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{(\operatorname{sen} \pi z/b) - 1}{(\operatorname{sen} \pi z/b) + 1} \right) \tag{11.33}$$

da la distribución de temperatura en estado estacionario $\Theta(x, y) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$

Solución. La parte imaginaria de $w(x)$ en la **Ec. 11 .3** -3 es

$$\Theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos \pi x/b}{\operatorname{senh} \pi y/b} \right) \tag{11.3-4}$$

en la que el intervalo del arco tangente va de 0 a $\pi/2$. Cuando $x = \pm b/2$, la **Ec.** 11.3 -4 **da $\Theta = 0$; y cuando $y = 0$** dicha **ecuación** 'conduce a $\Theta = (2/\pi)$ arctan $\infty = 1$. Mediante la **Ec. 11.3-4** se obtiene fácilmente la densidad de flujo de calor a través de la base de la pared:

$$q_y|_{y=0} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(\frac{2k}{b} \right) (T_1 - T_0) \left(\sec \frac{\pi x}{b} \right) \tag{1'1.3-5}$$

---

3 1. *N.* **SNEDDON,** ***Elements of Partial Differential Equations,*** **McGraw-Hill, Nueva York (1957), capitulo 4.**

4 R. V. CHURCHILL, op. *cit.,* pp. 149-152; aquí se demuestra como se llega a la **Ec. 11 .3** -3 **con ayuda de una tabla de mapas de conformación.**

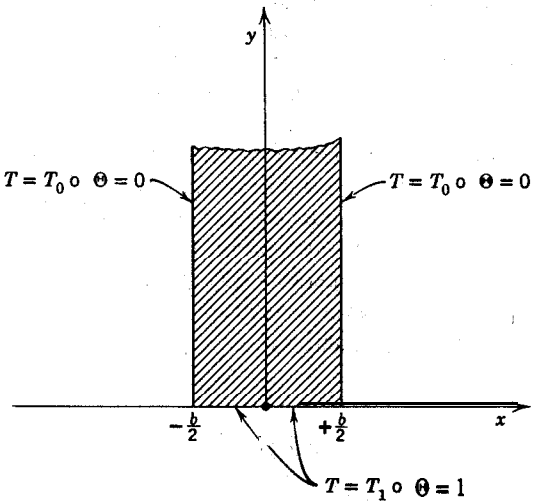


Fig. 11.3-1. Distribución bidimensional de temperatura en estado estacionario en una pared.

§ 11.4 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE [1,2,3]

Si los perfiles de temperatura en un sistema son planos, excepto en las proximidades de una superficie, puede considerarse que el transporte de energía tiene lugar en una «capa limite». Así, en el problema del ejemplo 11.1-1, para tiempos cortos, el calor penetra una pequeña distancia en el interior del sólido. Este problema púede abordarse suponiendo un espesor térmico de capa límite δ_T, que es función del tiempo, y admitiendo que los perfiles de temperatura en el interior de esta capa límite son semejantes a lo largo del tiempo. Los detalles de este procedimiento se han dado ya en el ejemplo 4.4-1.

En esta sección se presenta una solución de capa límite para la transmisión de calor en estado estacionario a un fluido de propiedades constantes, que circula a lo largo de una pared plana calentada. Por tanto, este ejemplo es una ampliación del problema isotérmico que se ha presentado en el ejemplo 4.4-2.

Ejemplo 11.4—1. Transmisión de calor por convección forzada en el flujo laminar a lo largo de una lámina plana calentada

Obtener los perfiles de temperatura en las proximidades de una lámina plana sumergida en un fluido viscoso, tal como se indica en la Fig. 11.4-1. La superficie mojada dela lamina calentada se mantiene a la temperatura T_0 y la temperatura del fluido que llega es T_∞.

---

[1] H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), pp. 263-279.
[2] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1938), vol. II, pp. 610-616, 623-645.
[3] E. R. G. ECKERT y R. M. DRAKE, Jr., *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, NuevaYork (1959). segunda edición, pp. 131-153, 167-178.

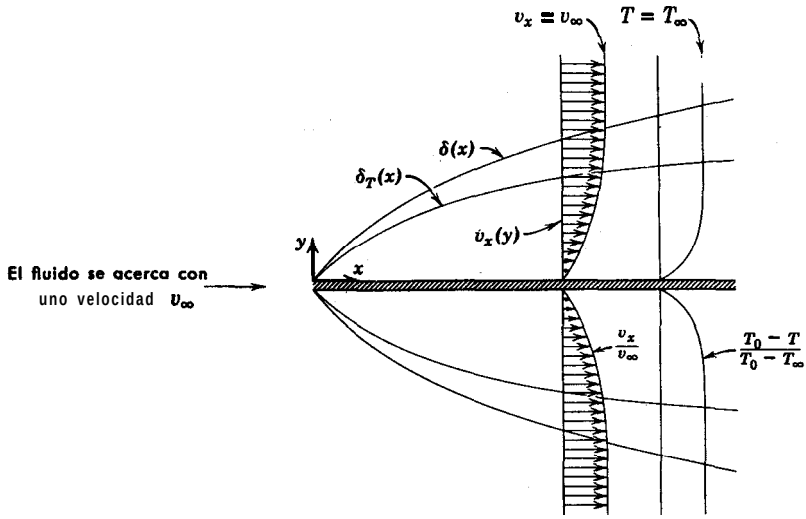


Fig. 11.4-1. Desarrollo de la capa límite para el flujo a lo largo de una lamina planacalentada, mostrando la capa térmica límite para $\Delta < 1$. La superficie de la lámina está a la temperatura T_0.

Solución. Las ecuaciones de capa limite para el flujo de un fluido de ρ, μ, k, y $\hat{C}_p$ constantes, a lo largo de una lámina plana, son,

(continuidad)
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{11.4-1}$$

(movimiento)
$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{11.4-2}$$

(energía)
$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{11.4-3}$$

Las dos primeras ecuaciones se han discutido en el ejemplo 4.4-2. La tercera se ha escrito sin el término de la disipación viscosa. Una solución de capa límite para estas ecuaciones se obtiene suponiendo perfiles semejantes de velocidad y de temperatura:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \phi(\eta) \qquad \text{siendo } \eta = \frac{y}{\delta(x)} \tag{11.4-4,5}$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = \Theta(\eta_T) \text{ siendo } \eta_T = \frac{Y}{\delta_T(x)} \tag{11.4-6,7}$$

siendo $\delta(x)$ *el espesor de velocidad de capa límite y* $\delta_T(x)$ el *espesor térmico de capa límite.* Fuera de sus respectivas capas límite, ϕ y Θ valen la unidad, mientras que en la pared tan-

to ϕ como Θ son cero. Se admite también que δ y δ_T guardan entre sí una relación constante (o sea, que es independiente de x):

$$\delta_T = \delta\Delta \tag{11.4-8}$$

en la que Δ, la constante de proporcionalidad, depende solamente de las propiedades del medio fluido. Es evidente que hay dos posibilidades: $A < 1$ y $A \geqslant 1$. Consideraremos sólo el primer caso, dejando el otro como ejercicio.

Combinando la ecuación de continuidad con la de energía se obtiene

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy\right)\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{11.4-9}$$

Introduciendo los perfiles semejantes definidos más arriba, queda

$$-v_\infty \phi \Theta' \eta_T \frac{\delta_T'}{\delta_T} + v_\infty \left(\int_0^\eta \phi' \eta \delta'\, d\eta\right)\Theta' \frac{1}{\delta_T} = \alpha \Theta'' \frac{1}{\delta_T^2} \tag{11.4-10}$$

siendo 6' = $d\delta/dx$, $\delta_T' = d\delta_T/dx$, $\phi' = d\phi/d\eta$, y $\Theta' = d\Theta/d\eta_T$. Se efectúan ahora las siguientes operaciones: se multiplica la Ec. 11.4−10 por δ_T^2; se toma $\eta = \eta_T$ A y $\delta_T = \delta\Delta$; se integra sobre la capa térmica límite (que está situada dentro de la capa límite de cantidad de movimiento si $A < 1$). De esta forma se obtiene

$$(E - D)\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\alpha}{v_\infty} F \tag{11.4-11}$$

en la que

$$D = \Delta^2 \int_0^1 \phi(\eta_T \Delta)\Theta' \eta_T\, d\eta_T \tag{11.4-12}$$

$$E = \Delta \int_0^1 \left(\int_0^{\eta_T \Delta} \phi' \eta\, d\eta\right)\Theta'\, d\eta_T \tag{11.4-13}$$

$$F = \int_0^1 \Theta''\, d\eta_T \tag{11.4-14}$$

La Ec. 4.4-19 establece

$$(B - A)\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{v_\infty} C \tag{11.4-15}$$

Combinando las Ecs. 11.4-11 y 15 se obtiene implícitamente A como una función de Pr = ν/α:

$$\left(\frac{E - D}{F}\right) = \left(\frac{B - A}{C}\right)\frac{1}{\mathrm{Pr}} \tag{11.4-16}$$

Una vez que se conoce A, se puede hallar $\delta_T(x)$ a partir de las Ecs. 11.4-8 y 4.4-23 y de esta forma conocer el perfil de temperatura mediante la Ec. 11.4-6. Con el fin de ilustrar el método supondremos los siguientes perfiles:[4]

[4] H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), pp. 270-271.

$$\phi = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \tag{11.4-17}$$

$$\Theta = 2\eta_T - 2\eta_T^3 + \eta_T^4 \tag{11.4-18}$$

Para estos perfiles, se evalúan ***A, B*** y C (Ecs. 4.4-20, 21 y 22) y ***D, E*** y ***F*** (Ecs. 11.4-12, 13 y 14), con lo que, a partir de la Ec. 4.4-23, se obtiene

$$\delta = \sqrt{\frac{1260\ \nu x}{37\ v_\infty}} \tag{11.4-19}$$

y a partir de la Ec. 11.4-16

$$\frac{1}{15}\Delta^3 - \frac{3}{280}\Delta^5 + \frac{1}{360}\Delta^6 = \frac{37}{630}\frac{1}{\mathrm{Pr}} \qquad (\Delta < 1) \tag{11.4-20}$$

De esta ecuación algébrica de sexto grado se despeja ***A*** en función de Pr. El resultado que así se obtiene se ajusta con una desviación del 5 por ciento mediante la relación[1]

$$A \cong 3\ \mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}} \qquad (\Delta < 1) \tag{11.4-21}$$

El perfil de temperatura viene dado en forma explícita por

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta\Delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta\Delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta\Delta}\right)^4 \tag{11.4-22}$$

en la que los valores de δ y A están dados por las Ecs. 11.4-19 y 11.4-21, respectivamente. Esta relación es válida para la región de flujo laminar que se extiende en la dirección de flujo, desde el borde de ataque hasta una posición x_{crit}, siendo $x_{crit}v_\infty\rho/\mu \geqslant 10^5$.

La Ec. 11.4-9 puede integrarse para obtener

$$\frac{1}{\rho \hat{C}_p} q_y\Big|_{y=0} = \frac{d}{dx}\left[\delta_3 v_\infty (T_0 - T_\infty)\right] \tag{11.4-23}$$

siendo

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty}\right) dy \tag{11.4-24}$$

el ***espesor de energía,*** definido de forma análoga. al ***espesor de desplazamiento*** δ_1, ***y*** al ***espesor de cantidad de movimiento*** δ_2, de las Ecs. 4.4-30 y 31.

De igual forma que para el transporte de cantidad de movimiento, existen para el transporte de energía dos tipos de soluciones de capa límite: las «soluciones exactas»,[5] que se obtienen por resolución analítica o numérica de las Ecs. 11.4— 1, 2 y 3, y las «soluciones aproximadas» obtenidas mediante la Ec. 11.4-23 suponiendo una forma para los perfiles de la Ec. 11.4-24 (que es lo que se ha hecho en el ejemplo 11.4— 1).

Los métodos que hemos descrito han sido objeto de una considerable' investigación. Aunque solamente se ha ilustrado el método aproximado para flujo la-

[5] Véase § *19.3.*

minar, indicaremos que se han desarrollado también mttodos de cálculo análogos para flujo turbulento.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cómo se modificaría la Ec. 11.1-2 si existiese un manantial de calor en el interior del sólido? Indicar ejemplos de instalaciones eléctricas, y nucleares en las que tiene lugar la conducción en estado no estacionario con manantiales de calor.

2. Discútase la utilización del libro de Carslaw y Jaeger, *Heat Conduction in Solids*, com) medio de resolución de problemas de transmisión de calor. Indicar algunos ejemplos concretos.

3. Comprobar el resultado de la Ec. 11.1-10.

4. ¿ Que sucedería en el ejemplo ll. 1-2 si se hubiese elegido Θ como $(T - T_1)/(T_0 - T_1)$? ¿ Podría haberse utilizado $\partial\Theta/\partial\eta = 0$ para $\eta = 0$ como una de las condiciones límite? ¿ Podría haberse tomado $+ c^2$ como constante de separación? ¿De dónde proviene la expresión de D_n?

5. ¿ Qué tipos de problemas de conducción de calor p eden resolverse mediante la transformación de Laplace? ¿Y qué tipos no pueden resolverse?

6. Comparar el problema de Graetz-Nusselt con los que se han tratado en los ejemplos ll. 2-1 y 2.

7. ¿ Cuándo la densidad de flujo de calor cumple la misma ecuación que la temperatura (véanse Ecs. 11.2-10 y ll)?

8. Sugerir algunos problemas de conducción de calor que estén descritos por las funciones analíticas utilizadas en los ejemplos 4.3-1 y 2.

9. Justificar la Ec. ll .3-2 utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann y teniendo en cuenta que $dw/dz = (\partial S/\partial x) + i(\partial T/\partial x) = (\partial T/\partial y) - i(\partial S/\partial y)$.

10. Indicar mediante un diagrama cuidadosamente rotulado, el significado de los dos casos $A < 1$ y $A \geqslant 1$ del ejemplo ll .4— 1. ¿ Qué diferencia existe entre estos dos casos, por lo que respecta al tratamiento matemático?

ll. ¿ Cuál es la serie de ecuaciones análogas a las Ecs. ll .4— 1, 2 y 3 para la descripción de la transmisión de calor por convección *libre* a lo largo de una lámina plana vertical?

12. ¿Qué clase de condiciones iniciales y limite se necesitan para describir la conducción no estacionaria de calor en sistemas sólidos laminados?

13. Discutir y comparar varios métodos especiales para la resolución de la conducción no estacionaria de calor en sólidos, tales como analogías eléctricas, ecuaciones de diferencia, métodos de relajación y métodos variacionales.

PROBLEMAS

11.A_1 Conducción del calor en estado no estacionario en una esfera de hierro

Una esfera de hierro de 2,5 cm de diámetro tiene las siguientes propiedades físicas: $\rho = 6{,}98$ g cm^{-3}, $k = 44{,}7$ kcal hr^{-1} m^{-1} ° C-t, $\hat{C}_p = 0{,}12$ kcal kg^{-1} ° C-t. La temperatura de la esfera es 21" c.

a. ¿Cuál es el valor numérico de la difusividad térmica de la esfera?

b. Si la esfera se sumerge bruscamente en una gran masa de fluido cuya temperatura es 132" C, ¿qué tiempo se necesita para que el centro de la esfera alcance una temperatura de 53,3° C?

c. Una esfera del mismo tamaño que ésta a la misma temperatura inicial, pero de distinto material, necesita un tiempo doble para que su centro alcance la temperatura de 53,3 ° C. ¿Cuál es su difusividad térmica?

d. El gráfico utilizado en la resolución de los apartados (c) y (*d*) se ha obtenido resolviendo una ecuación entre derivadas parciales. ¿Cuál es esta ecuación diferencial?

Respuesta: a. 0,0534 m^2 hr^{-1}
b. 1,1 seg.
c. 0,0267 m^{2}hr^{-1}

11.B_1 Comparación de las dos soluciones de la lámina para tiempos cortos

¿Qué error se comete al utilizar la Ec. 11.1-8 (basada en una lámina semiinfinita) en vez de la Ec. 11.1-31 (basada en una lámina de espesor finito), cuando $\alpha t/b^2$ = O,Ol, para una posición que es el 0,9 de la distancia que va desde el plano medio de la lámina hasta la superficie de la misma? Utilizar para la comparación las soluciones representadas gráficamente.

Respuesta: 4 por ciento

11.C_1 Unión con un adhesivo termoplástico[1]

Se desea unir entre sí dos laminas de un material sólido, cuyo espesor de cada una de ellas es b = 0,77 cm. Para ello se. utiliza una delgada capa de un material termoplástico que funde y da lugar a una buena unión a 160" C. Las dos laminas se colocan en una prensa, tal como se indica

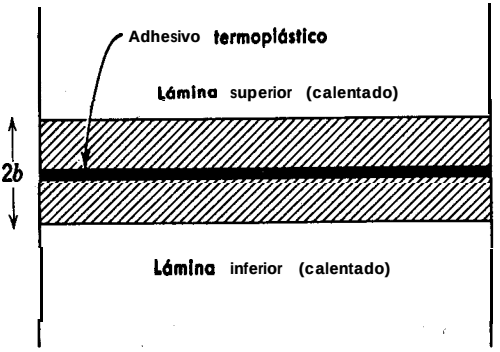


Fig. ll.C. Dos láminas de un material solido con una delgada capa de adhesivo.

en la Fig. ll .C, y las dos platinas de la prensa se mantienen a una temperatura constante de 220° C. ¿ Que tiempo habrán de permanecer las láminas en la prensa si su temperatura inicial es de 20° C? La difusividad térmica de las laminas es $4{,}2 \times 10^{-3}$ cm^2 seg^{-1}. *Respuesta: 85* seg.

11.D_1 Templado de un lingote de acero

Un lingote cilíndrico de acero de 30,5 cm de diámetro y 90 cm de longitud, que inicialmente está a la temperatura de 538° C, se templa en aceite. Supóngase que la superficie del lingote esta a 93.5" C durante toda la operación de templado. Las propiedades del acero, que pueden tomarse como independientes de la temperatura, son las siguientes

$$k = 37.2 \text{ kcal hr}^{-1} \text{ m-t } ^\circ\text{C}^{-1}$$
$$\rho = 7{,}7 \text{ g cm-3}$$
$$C_p = 0{,}12 \text{ cal g-r } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Estimar la temperatura del punto mas caliente del lingote después de cinco minutos de templado. Despréciense los efectos finales, es decir, háganse los cálculos para un cilindro del diámetro indicado pero de longitud irdinita. *Respuesta:* 231" C.

11.E_2 Temperatura en una lámina con producción de calor

La lamina de conductividad calorífica k del ejemplo 11.1-2 está inicialmente a la temperatura T_0. Para el tiempo $t > 0$ hay una producción volumétrica uniforme de calor S_0 en el interior de la lamina.

---

[1] Este problema está basado en el ejemplo 10 de J. M. McKELVEY, *Heat Transfer and Thermodynamics*, capítulo *2* de *Processing of Thermoplastic Materials* (E. C. Bernhardt, Ed.), Reinhold, Nueva York (1959). p. 93.

a. Hallar una expresión de la temperatura adimensional $k(T - T_0)/S_0 b^2$ en función de $\eta = y/b$ y $\tau = \alpha t/b^2$ buscando la solución en ***Heat Conduction in Solids*** de Carslaw y Jaeger [Oxford University Press (1959), segunda edición].

b. ¿Cuál es la temperatura máxima que se alcanza en el centro de la lamina?

c. ¿Que tiempo ha de transcurrir para que se alcance el 90 por ciento del incremento de temperatura? ***Respuesta:*** *c.* $t \doteq b^2/\alpha$

11.F_2 Calentamiento de una lámina semiinfinita: densidad de flujo constante en la pared

Un sólido que ocupa el espacio comprendido entre y = 0 e y = ∞ está inicialmente a la temperatura T_0. En el instante $t = 0$ se inicia y mantiene una densidad de flujo de calor q_0 a través de la superficie y = 0. Hallar los perfiles en función del tiempo $T(y, t)$.

Observación: Escribir primeramente la Ec. ll .l -2 para la conducción del calor en la dirección y; diferenciarla después con respecto a y y obtener una ecuación para q_y, que puede resolverse exactamente igual que la Ec. ll .l -3 del ejemplo 1 1.1 — 1.

Respuesta: $$T - T_0 = \frac{q_0}{k}\sqrt{4\alpha t}\ \text{ierfc}\ \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}}$$

siendo

$$\text{ierfc}\ x = \int_x^\infty \text{erfc}\ x\, dx$$

$$= \int_x^\infty (1 - \text{erf}\ x)\, dx$$

La integral de, la función complementaria de error, ierfc x, está tabulada en el libro de Carslaw y Jaeger *(op. cit.)*

11.G_2 Análisis dimensional de la ecuación de conducción del calor

Un cuerpo sólido homogéneo de forma arbitraria está inicialmente todo él a la temperatura Te. En el instante $t = 0$ se sumerge en un medio líquido de temperatura T_1. Tómese L como una dimensión característica del solido. Demostrar que el análisis dimensional predice que

$$\Theta = \Theta(\xi, \eta, \zeta, \tau, \text{y relacione; geométricas}) \qquad (11.G\text{–}1)$$

siendo $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, $\zeta = z/L$, y $\tau = \alpha t/L^2$. Relacionar este resultado con los gráficos de §11.1.

11.H_2 Tabla de tiempos para el asado de pavos

a. Una tabla típica de tiempos para el asado de pavos a 176°C es la siguiente?

Masa de pavo (kg)	Tiempo necesario por unidad de masa (min/kg)
3- 5	40-50
5- 8	36-40
9-12	30-36

Es interesante comparar esta receta de cocina obtenida empíricamente con los resultados del problema 11 .G. Si dos pavos geométricamente semejantes y cuya temperatura inicial es Te, se asan

[2] ***Woman's Home Companion Cook Book,*** Garden City Publishing Co., 1946.

a una determinada temperatura de superficie T_1 para la misma distribución de temperatura adimensional $\Theta(\xi, \eta, \zeta)$, el tiempo adimensional $\tau = \alpha t/L^2$ será el mismo para ambos pavos. Demostrar que esto implica que

$$(\text{tiempo de asado}) \times (\text{masa de pavo})^{-2/3} = \text{constante} \qquad \textbf{(11.H-1)}$$

y comparar numéricamente esta ecuación con la tabla.

b. ¿Qué suposiciones se han hecho en el apartado (u)?

11.I_2 Temperatura media en una lámina

Obtener, a partir del resultado correspondiente a la Ec. 11.1-31, la temperatura media en la lámina en función del tiempo.

Respuesta: $$(T_1 - T_{\text{med}})/(T_1 - T_0) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \exp\left(-(n+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2 \alpha t}{b^2}\right)$$

11.J_3 Transmisión de calor por convección forzada desde una lámina plana (capa térmica límite exterior a la capa límite de cantidad de movimiento)

Hallar el resultado análogo al de la Ec. 11.4-20 para A > 1.

Respuesta: $$\frac{3}{20}\Delta^2 - \frac{3}{20}\Delta + \frac{1}{15} - \frac{3}{280}\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{360}\frac{1}{\Delta^3} = \frac{37}{630}\frac{1}{\text{Pr}}$$

11.K_3 Solucionea de producto para la conducción no estacionaria del calor en sólidos[3]

a. En el ejemplo 11.1-2 se ha resuelto la ecuación de conducción del calor en estado no estacionario en una lamina de espesor 26. Demostrar que la solución de la Ec. ll .l-2, para el problema análogo en el caso de un bloque rectangular de dimensiones finitas, puede expresarse. como el producto de soluciones tales como las de la Ec. 11.1-31:

$$\frac{T_1 - T(x, y, z)}{T_1 - T_0} = 8\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+p}}{(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(p+\frac{1}{2})\pi^3}$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{(m+\frac{1}{2})^2}{a^2} + \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{b^2} + \frac{(p+\frac{1}{2})^2}{c^2}\right)\pi^2\alpha t\right]$$
$$\times \cos(m+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{a} \cos(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi y}{b} \cos(p+\tfrac{1}{2})\frac{\pi z}{c}$$

b. Obtener un resultado análogo para cilindros de longitud finita; rehacer luego el problema 11.D sin admitir que el cilindro es infinito.

11.L_3 Calentamiento periódico de la corteza terrestre

La temperatura de la superficie de la Tierra varía periódicamente debido a las fluctuaciones diurnas de la radiación que recibe. Considerar la superficie de la Tierra como si fuese plana y hallar una expresión para $(T - T_{\text{med}})/(T_{\text{máx}} - T_{\text{med}})$ en función de z(la distancia de penetración

---

[3] Véase, por ejemplo, H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), segunda edición.

en la corteza terrestre), t (el tiempo medido desde que $T = T_{máx}$ para $z = 0$), y ω (la frecuencia de las variaciones diurnas, supuestas sinusoidales).

Nota: Comiéncese por postular una solución de la forma $(T - T_{med})/(T_{máx} - T_{med}) = f(z)$. exp $i\omega t$, siendo $i = \sqrt{-1}$, y tómese después la parte real de la solución final.

Respuesta:
$$\frac{T - T_{med}}{T_{máx} - T_{med}} = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}z\right)\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}z\right)$$

11.M$_3$ Calentamiento de una lámina semiinfinita de conductividad calorífica variable

Repetir el ejemplo 11.1-1 para el caso de que la conductividad calorífica varíe con la temperatura según la expresión

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \beta\left(\frac{T - T_0}{T_1 - T_0}\right) \qquad \text{(11.M-1)}$$

siendo k_0 la conductividad calorífica a T_0 y β una constante. Utilícese un método de capa límite para obtener el perfil de temperatura.

11.N$_4$ Conducción no estacionaria del calor en cilindros y esferas

Deducir las ecuaciones utilizadas en la construcción de los gráficos de las Fig. 11.1-2 y 3. Comprobar los resultados buscando las soluciones,en el libro de Carslaw y Jaeger.

11.O$_4$ Resolución de problemas de conducción del calor en sólidos mediante un método variacional

a. Demostrar que la ecuación de conducción del calor en estado estacionario, con un manantial de calor dependiente de la posición $S(x, y, z)$ y conductividad calorífica k constante, es equivalente al problema variacional en el que la integral

$$I = \int_V\int\int [(VT.\ VT) - (2/k)ST]\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(11.0-1)}$$

es un extremo. V es el volumen en el que tiene lugar la conducción del calor y se supone que la temperatura de la superficie de V es conocida.

b. Resolver el problema 9.J (con k constante) utilizando el anterior método variacional. Elegir como perfil de temperatura a ensayar

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = -a\left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}\right) + (1 + a)\left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}\right)^2 \qquad \text{(11.0-2)}$$

siendo a un parámetro no determinado. ¿Por qué es razonable esta elección? Evaluar Z a partir de la Fc. 11.0-1, igualar después dI/da a cero y hallar a. De esta manera se obtiene el valor de a para el cual una función de la forma de la Ec. 11.0-2 se asemeja del mejor modo posible a la solución exacta.

c. Comparar el valor de la densidad de flujo de calor en la superficie externa, que se obtiene por el método del apartado (b), con el que se obtiene mediante la solución exacta, para diversos valores de (r_1/r_0)

d. Rehacer el problema del ejemplo 11.3-1 utilizando un método variacional.

Respuesta: *h.* $a = -2r_1/(r_0 + r_1)$

c.
$$\frac{q_1 r_1}{k(T_1 - T_0)} = -\frac{2(r_1/r_0)}{\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1}$$

CAPÍTULO 12

DISTRIBUCIONES DE TEMPERATURA EN FLUJO TURBULENTO

En los capítulos precedentes se ha estudiado la obtención de distribuciones de temperatura en sólidos y fluidos con movimiento laminar. En éste se intenta resumir lo poco que se conoce acerca del cálculo de perfiles de temperatura en flujo turbulento.

El tratamiento que se da aquí es análogo al del Capítulo 5. Se comienza por la ecuación del balance de energía de tiempo ajustado. Esta operación da lugar a la densidad de flujo turbulento de energía $\bar{q}^{(t)}$, una magnitud que no puede predecirse ***a priori.*** Todo lo más que podemos hacer actualmente es indicar varias expresiones empíricas de la densidad de flujo turbulento de energía que se han utilizado en la literatura técnica. Con el fin de ilustrar la utilización de estas expresiones, vamos a presentar un breve análisis del transporte turbulento de calor en un tubo.

Al final del capítulo se dedican unas líneas a las correlaciones dobles de temperatura en la turbulencia isotrópica homogénea. Este tratamiento es análogo al que se ha dado en relación con la deducción de la ecuación de Von Kármán-Howarth.

§ 12.1 FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA Y TEMPERATURA DE TIEMPO AJUSTADO

Antes de presentar la descripción analítica del transporte turbulento de calor, vamos a considerar brevemente el aspecto físico del transporte de calor en un tubo de flujo. De igual forma que en **§ 5.1,** es conveniente utilizar un modelo en el que el tubo esta subdividido en tres regiones vagamente definidas: el núcleo turbulento, la zona de transición y la película laminar próxima a la pared.

En el núcleo turbulento la energía calorífica se transporta muy rápidamente de un lugar a otro debido a la vigorosa actividad de los remolinos. Este mecanismo del rápido paso de energía calorífica da lugar a que la temperatura de tiempo ajustado varíe poco en todo el núcleo turbulento. Por otra parte, la actividad de remolino junto a la pared es despreciable, y es conveniente considerar una región laminar en la que la energía se transporta exclusivamente por conducción del calor, que es un proceso lento en comparación con el transporte de remolino. Por tanto, es de esperar que se produzca una gran caída de temperatura a través de la delgada película

laminar. En la zona de transición se prevé una situación intermedia entre la del núcleo turbulento y la de la subcapa laminar, siendo importantes en esta región tanto el transporte de energía por conducción como por remolinos. En la Fig. 12.1— 1 se representa un típico perfil de temperatura.

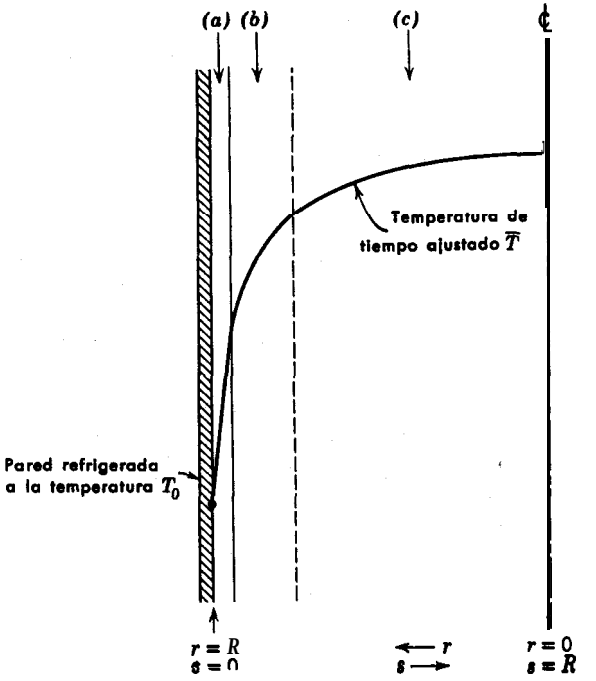


Fig. 12.I—I. Fluido caliente circulando por una tubería de paredes frías con la Re $\gg$ 2,1 x 10^3. En el esquema se indica cómo varía la temperatura en (a) la película laminar, (*b*) la zona de transición y (c) el núcleo turbulento.

Aunque el modelo descrito es idealizado, resulta, sin embargo, útil para el desarrollo de la teoría de la transferencia turbulenta de calor. Goldstein[1] hace una descripción bastante completa de la utilización de este modelo en el estudio de las analogías entre transporte de calor y cantidad de movimiento.

Hasta aquí se ha considerado la distribución de temperatura de tiempo ajustado, que corresponde al perfil de temperatura que se mediría al recorrer transversalmente la corriente de fluido con un termometro de mercurio. La utilización de un instrumento de medida mas fino indica que en un determinado punto de una corriente

[1] *S.* GOLDSTEIN, *Madern Developments in Fluid Dynamics,* Oxford University Press (1938) vol. II, pp. 649-660.

turbulenta, la temperatura T es una función que oscila grandemente con el tiempo alrededor del valor de la temperatura de tiempo ajustado $\bar{T}$. De acuerdo con esto se puede escribir

$$T = \bar{T} + T' \tag{12.14}$$

siendo T' la fluctuación de temperatura; ocasionalmente, esta fluctuación puede ascender todo lo más del 5 al 10 por ciento de la diferencia total de temperatura de una parte a otra del sistema. Teniendo en cuenta la definición de T', es evidente que $\overline{T'} = 0$. Pero en cambio las magnitudes $\overline{v_x'T'}$, $\overline{v_y'T'}$, $\overline{v_z'T'}$ no serán cero a causa de la «correlación» existente entre las fluctuaciones de velocidad y temperatura en un punto cualquiera.

§ 12,2 AJUSTE DE TIEMPO DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA[1,2]

En § 5.2 se ha visto como puede efectuarse el «ajuste de tiempo» de las ecuaciones de continuidad y movimiento para un fluido incompresible. En la operación de ajuste de tiempo aparecen términos adicionales en la ecuación de movimiento — los esfuerzos de Reynolds — que describen el transporte de remolino de cantidad de movimiento. En esta sección se añade a los resultados anteriores la ecuación de energía de tiempo ajustado, que contiene términos adicionales para describir el transporte de remolino de energía. El tratamiento se reduce a un fluido de ρ, $\hat{C}_p$, μ y k constantes.

Comenzamos con la ecuación de energía expresada en la forma

$$\rho\hat{C}_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\hat{C}_p v_x T + \frac{\partial}{\partial y}\rho\hat{C}_p v_y T + \frac{\partial}{\partial z}\rho\hat{C}_p v_z T\right) + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \mu\left[2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \cdots\right] \tag{12.2-1}$$

en la que solamente se han expresado unos cuantos términos de la función Φ_v de disipación viscosa.

Substituyendo, en la Ec. 12.2— 1, T por $\bar{T} + T'$, v_x por $\bar{v}_x + v_x'$, etc., se obtiene la ecuación promediada de tiempo

---

1 S. GOLDSTEIN, *Modern Developmenrs in Fluid Dynamics,* Oxford University Press (1938), vol. II, pp. 646-648.

2 H. B. SQUIRE, *Heat Transfer,* capitulo 14 de *Modern Developments in Fluid Dynamics: High Speed Flow* (L. Howarth, Ed.), Oxford University Press (1953).

$$\rho\hat{C}_p\frac{\partial\bar{T}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\hat{C}_p\bar{v}_x\bar{T} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\hat{C}_p\bar{v}_y\bar{T} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\hat{C}_p\bar{v}_z\bar{T}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\hat{C}_p\overline{v_x'T'} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\hat{C}_p\overline{v_y'T'} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\hat{C}_p\overline{v_z'T'}\right)$$
$$+k\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial z^2}\right)$$
$$+\mu\left[2\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial x}\right) + \cdots\right]$$
$$+\mu\left[2\overline{\frac{\partial v_x'}{\partial x}\frac{\partial v_x'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v_x'}{\partial y}\frac{\partial v_x'}{\partial y}} + 2\overline{\frac{\partial v_x'}{\partial y}\frac{\partial v_y'}{\partial x}} + \cdots\right] \qquad (12.2\text{-}2)$$

Al comparar esta ecuación con la anterior, se observa que la ecuación de tiempo ajustado es igual que la original, excepto que ahora existen nuevos términos (subrayados con líneas de puntos) que están relacionados con los procesos turbulentos de remolino. Se llega así a la definición de la densidad de flujo turbulento de energía $\bar{q}^{(t)}$, cuyos componentes son

$$\bar{q}_x^{(t)} = \rho\hat{C}_p\overline{v_x'T'};\quad \bar{q}_y^{(t)} = \rho\hat{C}_p\overline{v_y'T'};\quad \bar{q}_z^{(t)} = \rho\hat{C}_p\overline{v_z'T'} \qquad (12.2\text{-}3)$$

y la función de disipación turbulenta de energía $\bar{\Phi}_v^{(t)}$,

$$\bar{\Phi}_v^{(t)} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_j'}{\partial x_i}}\right) \qquad (12.24)$$

Obsérvese la semejanza entre los componentes de $\bar{q}^{(t)}$ de la Ec. 12.2-3 y los de $\bar{\tau}^{(t)}$ de las Ecs. 5.2-5 y 6.

A modo de resumen, se expresan las tres ecuaciones de variación para el flujo turbulento de fluidos con p, $\hat{C}_p$, μ y k constantes:

ecuación de continuidad de tiempo ajustado
$$(\nabla\cdot\bar{v}) = 0 \qquad (12.2\text{-}5)$$

ecuación de movimiento de tiempo ajustado
$$\rho\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla\bar{p} - [\nabla\cdot\bar{\tau}^{(t)}] - [\nabla\cdot\bar{\tau}^{(t)}] + \rho g \qquad (12.2\text{-}6)$$

ecuación de energía de tiempo ajustado
$$\rho\hat{C}_p\frac{D\bar{T}}{Dt} = -(\nabla\cdot\bar{q}^{(t)}) - (\nabla\cdot\bar{q}^{(t)}) + \mu\bar{\Phi}_v^{(t)} + \mu\bar{\Phi}_v^{(t)} \qquad (12.2\text{-}7)$$

siendo $\bar{q}^{(t)} = -k\nabla\bar{T}$, y $\bar{\Phi}_v^{(t)}$ la función de disipación viscosa en la que $\bar{v}_i$ se ha

substituido por $\bar{v}_i$. Finalmente, es preciso tener en cuenta que en estas ecuaciones D/Dt se expresa en función de la velocidad de tiempo ajustado $\bar{v}$.

En la discusión de los problemas de flujo turbulento se acostumbra prescindir de los términos de disipación viscosa. Por tanto, para el planteamiento de problemas de transporte turbulento de calor se procede de igual forma que para el flujo laminar, sólo que se substituye q por $\bar{q}^{(t)}+\bar{q}^{(t)}$ y se utiliza siempre $\bar{v}$ y $\bar{T}$ de tiempo ajustado.

§ 12.3 EXPRESIONES SEMIEMPÍRICAS PARA LA DENSIDAD DE FLUJO TURBULENTO DE ENERGÍA

En la sección anterior se ha visto que el ajuste de tiempo de la ecuación de energía da lugar a una densidad de flujo turbulento de energía $\rho\bar{q}^{(t)}$. Para resolver la ecuación de energía y obtener los perfiles de temperatura de tiempo ajustado, hay que postular alguna relación entre $\bar{q}^{(t)}$ y T. En esta sección se resumen algunas de las expresiones empíricas que han sido más utilizadas.

La conductividad calorífica de remolino

Por analogía con la ley de Fourier de conducción del calor, se puede escribir.

$$\bar{q}_y^{(t)} = -k^{(t)}\frac{d\bar{T}}{dy} \tag{12.3-1}$$

siendo $k^{(t)}$ el llamado «coeficiente turbulento de conductividad calorífica» o «conductividad de remolino». Es preciso tener en cuenta que $k^{(t)}$ no es una propiedad física característica de un determinado fluido, sino que depende de la posición, dirección y naturaleza del flujo turbulento.

La viscosidad cinemática de remolino $\nu^{(t)} = \mu^{(t)}/\rho$ y la difusividad térmica de remolino $\alpha^{(t)} = k^{(t)}/\rho\hat{C}_p$ tienen las mismas dimensiones. Estas magnitudes pueden compararse para el transporte turbulento de energía y cantidad de movimiento. La relación $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)}$ es del orden de la unidad, variando los valores que se encuentran en la literatura desde 0,5 a l,O. Para el flujo de aire en conducciones[1] $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)}$ varía de 0,7 a 0,9, mientras que para el flujo de chorros* (es decir, para «turbulencia libre»), se acerca más a 0,5.

Expresiones de la longitud de mezcla de Prandtl y Taylor

De acuerdo con la teoría de Prandtl, la energía y la cantidad de movimiento se transmiten en flujo turbulento por los mismos mecanismos. Según esto, por analogía con la Ec. 5,3−2,

---

[1] J. B. OPFELL y B. H. SAGE, *Advances in Chemical Engineering,* vol. 1, Academic Press, Nueva York (1956), p. 259.

[2] H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, Mc Graw-Hill, Nueva York (1955), p. 504.

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{12.3-2}$$

en la que l es la longitud de mezcla de Prandtl. Obsérvese que esto equivale a decir que $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)} = 1$. La teoría del transporte de vorticidad de Taylor[3] difiere de la teoría de Prandtl en que la longitud de mezcla en la expresión de $\bar{\tau}^{(t)}$ es diferente de la de la expresión de $\bar{q}^{(t)}$. La teoría de Taylor predice que $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)} = 0{,}5$. Por esta razón, la teoría de Taylor es más adecuada para el flujo en chorros y estelas, mientras que es preferible la de Prandtl para el flujo en conducciones[4]. En este caso, Prandtl recomienda tomar $l = k_1 y$, siendo y la distancia a la pared.

Expresión basada en la hipótesis de semejanza de Von Kármán

Introduciendo en la Ec. 12.3-2 la expresión de Von Kármán para la longitud de mezcla, se obtiene

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p \kappa_2^2 \left| \frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2} \right| \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{12.3-3}$$

en la que κ_2 es la misma constante que aparece en la Ec. 5.3-3. Esto supone también que $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)} = 1$.

Fórmula empírica de Deissler para la región próxima a la pared

Para describir los procesos de transporte en la proximidad de superficies sólidas (donde las expresiones de Prandtl y Von Kármán no son válidas), Deissler sugirió la siguiente expresión empírica:

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p n^2 \bar{v}_x y (1 - \exp\{-n^2 \bar{v}_x y/\nu\}) \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{12.34}$$

En esta expresión, n es el mismo que se ha utilizado en la Ec. 5.3-4. Aquí se admite también que los mecanismos del transporte de energía y cantidad de movimiento son los mismos, de forma que $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)} = 1$. En el ejemplo que se presenta a continuación se discute el transporte turbulento de calor en función de las anteriores expresiones empíricas.

Ejemplo 12.3-1. Perfiles de temperatura para el flujo turbulento estacionario en tubos circulares lisos

Un fluido circula con flujo turbulento por una tubería circular lisa de diámetro $D = 2R$, a una temperatura uniforme T_1. (véase Fig. 12.3-1). A partir de z = 0 existe un disposi-

---

3 G. I. TAYLOR, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A135, 685-702 *(1932); Phil. Trans.* A215, 1 (1915).
4 H. SCHLICHTING, *op. cit.*, p. 391.

tivo de refrigeración que retira calor del tubo con una densidad de flujo de calor constante q_0. A una cierta distancia aguas abajo del comienzo de esta densidad de flujo calorífico de pared constante, los perfiles de temperatura radial se habrán estabilizado; es decir, $\bar{T}(r, z) - \bar{T}(0, z)$ es una función exclusiva de r, de forma que la constancia de la densidad dé flujo de pared implica que

$$\bar{T}(r, z) = Az + \psi(r) \tag{12.34}$$

en la que A es una constante. (Para el desarrollo análogo correspondiente al flujo laminar, véase § 9.8). Se desea deducir algunas expresiones aproximadas para los perfiles turbulentos de temperatura, utilizando los resultados del ejemplo 5.3 -1 y las expresiones de la densidad de flujo turbulento de calor de esta sección. Aquí se seguirá el desarrollo de Deissler,[5] que conduce a resultados especialmente útiles para Pr > 1. La discusión consta de dos partes: *(a)* transporte de calor en el núcleo turbulento, y *(b)* transporte de calor junto a la pared.

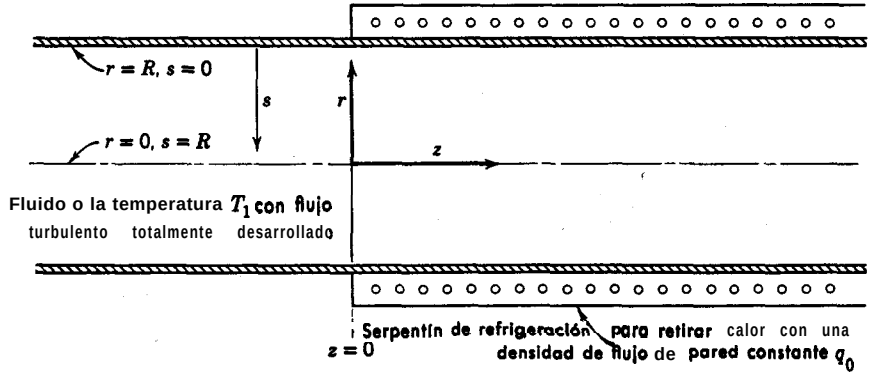


Fig. 12.3-1. Flujo turbulento en un tubo con densidad de flujo de calor constante en la pared.

Solución. Se parte de la Ec. 12.2-7, descartando los términos de disipación viscosa y el término no estacionario del primer miembro,

$$\rho \hat{C}_p(\bar{v} \cdot \nabla \bar{T}) = -(\nabla \cdot \bar{q}^{(l)}) - (\nabla \cdot \bar{q}^{(t)}) \tag{12.3-6}$$

o bien en coordenadas cilíndricas

$$\rho \hat{C}_p\left(\bar{v}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right) = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\bar{q}_r^{(l)} + \bar{q}_r^{(t)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{q}_\theta^{(l)} + \bar{q}_\theta^{(t)}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{q}_z^{(l)} + \bar{q}_z^{(t)})\right) \tag{12.3-7}$$

[5] R. G. DEISSLER, *NACA Report 1210 (1955).*

Los dos primeros términos del primer miembro desaparecen puesto que no existe flujo medio en las direcciones radial o tangencial. Debido a la simetría cilíndrica, el término $\partial/\partial\theta$ del segundo miembro es cero y también es cero el término $\partial/\partial z$ debido a la variación lineal de $\bar{T}$ con z. Queda por lo tanto

$$\rho\hat{C}_p\bar{v}_z A = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r(\bar{q}_r^{(l)} + \bar{q}_r^{(t)})\right] \tag{12.3-8}$$

Integrando desde el valor de r en la pared hasta un punto arbitrario cualquiera, se obtiene

$$\frac{1}{r}\int_r^R \rho\hat{C}_p\bar{v}_z A r\, dr = -q_0 + (\bar{q}_r^{(t)} + \bar{q}_r^{(l)}) \tag{12.3-9}$$

siendo q_0 la densidad de flujo de calor en la oared.

a. Para el *núcleo turbulento,* se toma $\bar{q}^{(l)} = 0$ en la Ec. 12.3-9. Despreciando ademas la integral del primer miembro, se obtiene

$$\bar{q}_r^{(t)} = q_0 \tag{12.3–10}$$

Obsérvese que la suposición de que en el núcleo turbulento $\bar{q}_r^{(t)}$ es constante para cualquier valor de *r,* es en cierto modo análoga a la de Prandtl con, respecto a la Ec. 5.3-8, según la cual $\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \tau_0$ para cualquier valor de r. Esta suposición sólo puede hacerse porque los gradientes de temperatura son poco importantes en las cercanías del centro del tubo.

Utilizando la expresión de la longitud de mezcla de Prandtl para $\bar{q}_r^{(t)}$, a partir de la Ec. 12.3-10 (con $s = R - r$), se obtiene

$$q_0 = +\rho\hat{C}_p\kappa_1^2 s^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{ds}\right)\frac{d\bar{T}}{ds} \tag{12.3-11}$$

Este resultado se compara con la expresión

$$\tau_0 = +\rho\kappa_1^2 s^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{ds}\right)^2 \tag{12.3-12}$$

obtenida a partir de las Ecs. 5.3 -5 y 5.3 -7 (esta última en la forma modificada $\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \tau_0$).

Dividiendo entre sí estas dos ecuaciones, se obtiene

$$\frac{q_0}{\tau_0} = \frac{\hat{C}_p\, d\bar{T}}{d\bar{v}_z} \tag{12.3-13}$$

que puede integrarse desde una superficie de referencia $s = s_1$ hasta otra cualquiera $s = s$:

$$\frac{\hat{C}_p(\bar{T} - \bar{T}_1)}{q_0} = \frac{\bar{v}_z - \bar{v}_{z,1}}{\tau_0} \tag{12.3-14}$$

En el desarrollo de Deissler,[5] se toma como superficie $s = s_1$ la de separación entre la zona

de transición y el núcleo turbulento.[6] La Ec. 12.3-14 establece que en el interior del núcleo turbulento los perfiles de velocidad y temperatura son semejantes, lo que está aproximadamente de acuerdo con la experiencia.

Es conveniente introducir variables adimensionales que contengan $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ y q_0:

$$v^+ = \frac{\bar{v}_z}{v_*} \qquad T^+ = \frac{\rho \hat{C}_p v_* (T - T_0)}{q_0} \qquad s^+ = \frac{s v_* \rho}{\mu} \qquad (12.3\text{–}15,16,17)$$

Según esto, la Ec. 12.3-14 se transforma en

$$T^+ - T_1^+ = v^+ - v_1^+ \qquad (s^+ > 26) \qquad (12.3\text{–}18)$$

La diferencia de velocidad $v^+ - v_1^+$ se ha expresado ya en el Ec. 5.3 — 11 como una función logarítmica de s^+. Por lo tanto, a partir de la Ec. 12.3-18 se deduce que el perfil de temperatura en el núcleo turbulento será también una función logarítmica:

$$T^+ - T_1^+ = \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{s^+}{s_1^+} \qquad (s^+ > 26) \qquad (12.3\text{–}19)$$

siendo $s_1^+ = 26$ el límite entre la zona de transición y el núcleo turbulento.

b. Para la *región próxima a la pared,* no se puede despreciar $\bar{q}_r^{(t)}$ en la Ec. 12.3-9. Sin embargo, se obtiene una aproximación muy buena para esta región tomando la integral del primer miembro igual a cero. Por tanto, tomamos como punto de partida

$$\bar{q}_r^{(t)} + \bar{q}_r^{(c)} = q_0 \qquad (12.3\text{-}20)$$

---

[6] Si se toma como superficie $s = s_1$ la superficie mojada del tubo (es decir, $s_1 = 0$), resulta que $v_{z,1} = 0$ y $\bar{T}_1 = T_0$, siendo T_0 la temperatura de la pared, que vana con z. Si se multiplican los dos miembros por $\rho \bar{v}_z$ y se utiliza el promedio de flujo en toda la ecuación se obtiene

$$\frac{\rho \hat{C}_p \langle \bar{v}_z \rangle \left[\frac{\langle \bar{v}_z \bar{T} \rangle}{\langle \bar{v}_z \rangle} - T_0 \right]}{q_0} = \frac{\rho \langle \bar{v}_z^2 \rangle}{\tau_0} \qquad (12.3\text{–}14a)$$

que es una forma de expresar la *analogía de Reynolds* entre el transporte de *calor* y cantidad de movimiento. La Ec. 12.3 — 14 *a* establece que la relación entre el transporte de energía con la corriente y el transporte de energía a través de la interfase sólido-fluido es igual a una relación análoga para el transporte de cantidad de movimiento. Si se sustituye $\langle \bar{v}_z^2 \rangle$ por $\langle \bar{v}_z \rangle^2$ (que para el caso de tubos conduce a un error no superior al 5 por ciento), y se define un coeficiente de transmisión de calor (véase capítulo 13) basado en la diferencia de temperatura «de mezcla adiabática» en la Ec. 12.3 — 14 *a, esta* ecuación es equivalente a

$$\frac{h}{\rho \hat{C}_p \langle \bar{v}_z \rangle} = \frac{f}{2} \quad o \quad \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re\,Pr}} = \frac{f}{2} \qquad (12.3\text{–}14b)$$

que conduce a muy buenos resultados para Pr = 1. Para Pr ≠ 1, la relación más sencilla según la forma de la Ec. 12.3-14 *b* es la Chilton-Colburn (Ec. 13.2-18).

Introduciendo en la Ec. 12.3 -20 la ley de Fourier para $\bar{q}_r^{(t)}$ y la expresibn de Deissler (Ec. 12.3 -4) para $\bar{q}_r^{(t)}$, se obtiene

$$q_0 = +k\frac{d\bar{T}}{ds} + \rho\hat{C}_p n^2 \bar{v}_z s(1 - \exp\{-n^2\bar{v}_z s/\nu\})\frac{d\bar{T}}{ds} \qquad (12.3\text{-}21)$$

Esta ecuación puede integrarse con respecto a s, y el resultado, en función de variables adimensionales, es

$$T^+ = \int_0^{s^+} \frac{ds^+}{(1/\mathrm{Pr}) + n^2 v^+ s^+(1 - \exp\{-n^2 v^+ s^+\})} \qquad (s^+ < 26) \qquad (12.3\text{-}22)$$

en la que v^+ viene dada por la Ec. 5.3 – 15.

En la Fig. 12.3-2 se representan los perfiles de, temperaturas obtenidos a partir de las Ec. 12.3-19 y 12.3-22. Como puede verse, T^+ 'depende del número de Prandtl y de la posición radial en el tubo. Basándose en esta gráfica, Deissler calculó las curvas que representan la variación del número de Nusselt con los números de Reynolds y Prandtl (lo que constituye una versión mejorada de la Ec. 12.3 – 14*b*). (Véase Capítulo 13). Deissler

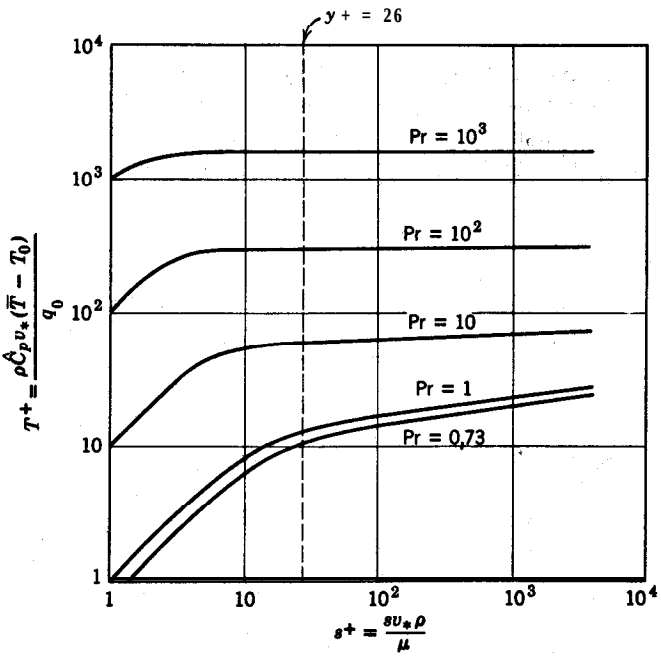


Fig. 12.3–2. Perfiles de temperatura, calculados teóricamente, para la transmisión de calor a fluidos que circulan por tubos circulares lisos en el intervalo de régimen turbulento; Pr = 0,73 es la curva correspondiente al aire [R. G. Deissler, *NACA Report* 1210 (1955), p. 4]. Obsérvese que la pendiente de estas curvas es siempre positiva y por tanto predicen que el perfil de temperatura en el centro del tubo es ligeramente puntiagudo. Resulta evidente que esta anomalía solamente es importante para números bajos de Prandtl.

generalizó también el tratamiento anterior para fluidos de propiedades físicas variables.[5] La investigación realizada sobre el cálculo de la variación radial y axial de la temperatura para el flujo turbulento en un tubo es muy escasa. Se han obtenido soluciones numéricas completas de la Ec. 12.3-6, tanto para temperatura uniforme de la pared[7] como para densidad de flujo uniforme de la pared,[8] utilizando expresiones empíricas para $\bar{q}_r^{(t)}$ y para la distribución de velocidad.

§ 12.4 LA DOBLE CORRELACIÓN DE TEMPERATURA Y SU PROPAGACIÓN: ECUACIÓN DE CORRSIN

En § 5.4 se ha dedicado bastante espacio al estudio de la caída de turbulencia homogénea isotrópica, lo que conduce a la ecuación de Von Kármán-Howarth que describe la forma en que se propaga la doble correlación de velocidad $v_i\, v_j''$ y a la ley del decaimiento de Taylor de la intensidad de la turbulencia. En esta sección se resumen brevemente los estudios más recientes sobre el decaimiento de las fluctuaciones isotrópicas de temperatura detrás de una rejilla calentada.[1,2]

Las tres funciones adimensionales de correlación que se consideran aquí, son:

$$V_i = \frac{\overline{T' v_i''}}{\sqrt{\overline{T'^2}}\sqrt{\overline{v_i'^2}}} = \text{el componente iésimo del vector de correlación temperatura-velocidad} \qquad (12.4\text{-}1)$$

$$W = \frac{\overline{T' T''}}{\overline{T'^2}} = \text{escalar de doble correlación de temperatura} \qquad (12.4\text{-}2)$$

$$Q_i = \frac{\overline{v_i' T' T''}}{\sqrt{\overline{v_i'^2}}\,\overline{T'^2}} = \text{componente iésimo del vector de triple correlación velocidad-temperatura} \qquad (12.4\text{-}3)$$

Como antes, se representa aquí con una sola comilla las fluctuaciones en el punto B', y con dos las fluctuaciones en el punto B''. (Véanse Figs. 5.4—1 y 2.) Estas correlaciones pueden expresarse en una forma más sencilla si se suponen condiciones de homogeneidad e isotropía:

a. Mediante los argumentos utilizados en § 5.4 para probar que $P_i = 0$, *se* puede demostrar que

$$V_i = 0 \qquad (\text{para } i = 1, 2, 3) \qquad (12.4\text{-}4)$$

---

7 H. L. BECKERS, *Appl. Sci. Research*, A6, 147-190 (1956).

8 E. M. SPARROW, T. M. HALLMAN y R. SIEGEL, *Appl. Sci. Research*, A7, 37-52 (1957); este artículo contiene una útil comparación de los resultados de distintos autores. Fuera de la región térmica de entrada, su solución conduce a velocidades de transmisión de calor que sólo difiere.1 en un pequeño tanto por ciento de las obtenidas por Deissler.[5]

1 S. CORRSIN, *J. Aeronaut. Sci.*, 18, 417-423 (1951).

2 R. R. MILLS, JR., A. L. KISTLER, V. O'BRIEN y S. CORRSIN, *NACA Tech. Note 4288*, agosto de 1958.

b. La correlación W puede expresarse como una función escalar de la distancia r entre B' y B'':

$$W = w(r, t) = 1 + w''(0, t)\frac{r^2}{2!} + \cdots \qquad (12.4\text{–}5)$$

Se sabe además que w es una función de orden par de r, tal como se ha indicado. En esta expresión la doble comilla representa la derivada segunda con respecto a r.

c. Teniendo en cuenta que Q_i debe transformarse como un vector, se puede demostrar que

$$Q_i = q(r, t)\frac{\xi_i}{r} = \left(q'''(0, t)\frac{r^3}{3!} + \cdots\right)\frac{\xi_i}{r} \qquad (12.4\text{-}6)$$

siendo $q(r, t)$ una función de orden impar de r que comienza por r^3, tal como se indica. La triple comilla representa la tercera derivada con respecto a r.

A partir de la ecuación de energía, expresada en función de fluctuaciones, se puede obtener una ecuación que relacione $w(r, t)$ y $q(r, t)$:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j' \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \alpha \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} \qquad (12.4\text{-}7)$$

Esta ecuación es válida en el punto B' para $\bar{v} = 0$ y turbulencia homogénea. Para el punto B'' tendremos

$$\frac{\partial T''}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j'' \frac{\partial T''}{\partial x_j} = \alpha \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 T''}{\partial x_j^2} \qquad (12.4\text{-}8)$$

Multiplicando la Ec. 12.4-7 por T'' y la Ec. 12.4-8 por T', efectuando el ajuste de tiempo y sumando las dos ecuaciones que resultan, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T'T''} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\overline{v_j''T'T''} - \overline{v_j'T'T''}\right) = 2\alpha \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} T'T'' \qquad (12.4\text{-}9)$$

Introduciendo los coeficientes de correlación, se llega finalmente a la siguiente relación entre $w(r, t)$ y $q(r, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{T'^2}w) - 2\overline{T'^2}\sqrt{\overline{v_i'^2}}\left(\frac{\partial q}{\partial r} + 2\frac{q}{r}\right) = 2\alpha\overline{T'^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad (12.4\text{–}10)$$

Ésta es la *ecuación de Corrsin* para la propagación de la doble correlación de temperatura,[1] que es la ecuación de transporte de calor analógica de la de Von Kármán-Howarth. Dicha ecuación se ha comprobado experimentalmente, mediante medida de las diversas correlaciones que intervienen en ella.2 Corrsin[1] obtuvo algunas

[3] S. CORRSIN, *J. Appl. Phys, 22, 469-473* (1951).

soluciones de la Ec. 12.4-10 para varios casos sencillos, y estudió también las fluctuaciones térmicas desde el punto de vista espectral.3 Experimentalmente se ha comprobado que $w(r, f)$ es, aproximadamente, igual a la función $f(r, t)$ del Capítulo 5.

Ejemplo 12.4-1. Ecuación de decaimiento para la doble correlación de temperatura[1]

Tomar en la ecuación de Corrsin $r = 0$ y obtener una ecuación para la variación de $\overline{T'^2}$ con el tiempo.

Solución. Debido a las propiedades de $w(r,t)$ y $q(r,t)$ de las Ecs. 12.4-5 y 6, al tomar r = 0 se obtiene

$$\frac{d}{dt}\overline{T'^2} = 6\alpha\overline{T'^2}w'(0, t) \tag{12.4-11}$$

Si se define una «microescala térmica» mediante

$$\lambda_T^2 = \frac{-1}{w'(0, t)} \tag{12.4-12}$$

resulta

$$\frac{d}{dt}\overline{T'^2} = -6\alpha\left(\frac{\overline{T'^2}}{\lambda_T^2}\right) \tag{12.4-13}$$

Esta ecuación, obtenida por Corrsin,[1] es análoga a la ley de decaimiento de Taylor de la Ec. 5.4-39.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Definir, mediante un gráfico, T, $\bar{T}$ y T'.

2. Explíquese por qué $\overline{v_x'} = 0$ y $\overline{T'} = 0$ y en cambio $\overline{v_x'T'}$ es distinto de cero.

3. Comparar la conductividad calorifica de remolino y la viscosidad de remolino, por lo que respecta a su definición, orden de magnitud y variación con las propiedades físicas y la naturaleza del flujo.

4. Comprobar la consistencia diisional de la Ec. 12.3-2.

5. Resumir las suposiciones que se han efectuado al deducir los perfiles de temperatura de la Fig. 12.3-2.

6. Discutir las posibles formas de justificar la suposición que se ha hecho inmediatamente antes de la Ec. 12.3-10, así como la suposición análoga efectuada en relación con la Ec. 5.3-8.

7. ¿Cuál es la analogía de Reynolds y qué significa?

8. ¿Cómo puede utilizarse la Fig. 12.3-2 para representar gráficamente $T(r)$ para el flujo en un tubo y hallar la densidad de flujo calorífico en la pared?

9. ¿Qué describe la ecuación de Corrsin?

10. ¿Hasta qué punto pueden calcularse *a priori* los perfiles turbulentos de temperatura?

PROBLEMAS

2.A$_1$ Perfil de temperatura para el flujo turbulento en un tubo

***a*. Utilizar la definición de v_* basándose en la Ec. 6.2-12 para demostrar que:**

$$s^+ = \frac{1}{2^{3/2}} \text{Re} \sqrt{f}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \tag{12.A-1}$$

$$T^+ = \frac{1}{2^{1/2}} \text{Re Pr} \sqrt{f}\left(\frac{k(\bar{T} - T_0)}{q_0 D}\right) \tag{12.A-2}$$

¿Dependerán estas relaciones de un determinado modelo de flujo turbulento?

b. Utilizar la Fig. 12.3-2 para representar gráficamente $k(\bar{T} - T_0)/q_0 D$ frente a r/R, para $\text{Pr} = 10^2$ y $\text{Re} = 10^6$.

12.B$_2$ Expresión asintótica de la temperatura de mezcla adiabática para números de Prandtl[1] muy elevados

Para valores muy elevados del número de Prandtl (por ejemplo, para fluidos de conductividad calorífica baja) la principal resistencia térmica para el flujo en un tubo es la de la subcapa laminar. Por tanto, la variación de temperatura tiene lugar en la inmediata proximidad de la pared, donde se sabe (§ 5.3) que $v^+ = s^+$. Tomar, de acuerdo con esto, $v^+ = s^+$ en la Ec. 12.3 - 22, y desarrollar luego la función exponencial, descartando todos los términos superiores al segundo. Efectuar la integración indicada y tomar $s^+ = \infty$. Demostrar que el resultado es

$$T^+(\infty) = \frac{\pi}{2\%} \text{Pr}^{3/4} \tag{12.B-1}$$

Esta expresión puede interpretarse1 como la temperatura adimensional de mezcla adiabática del fluido. Expliquese.

12.C$_3$ Deducción de los perfiles radiales de temperatura para flujo turbulento con densidad de flujo calorífico de pared constante[2]

a. Considerando el problema propuesto *en* el ejemplo 12.3-1, utilizar la Ec. 5.1-3 para el perfil de velocidad y demostrar que dicho perfil conduce a la siguiente expresión:

$$v + v^{(t)} = \left(\frac{v_*^2 R}{v_{\text{máx}}}\right)\left(\frac{r}{R}\right)\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \tag{12.C-1}$$

siendo $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$.

b. Supóngase que $v + v^{(t)} = a + \alpha^{(t)}$, y que además

$$\Theta = \left(\frac{T - T_{\text{pared}}}{q_0 R^2/k}\right) = A\zeta + \Psi(\xi) \tag{12.G2}$$

siendo q_0 la densidad de flujo calorífico de pared (dirigido hacia fuera), $\xi = r/R$, $\zeta = (z/R)(v_*/v_{\text{máx}})^2$ y A una constante. Demostrar que Ψ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 - \xi)^{1/7} A = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2(1 - \xi)^{8/7}\frac{d\Psi}{d\xi}\right) \tag{12.C-3}$$

---

1 R. G. DEISSLER, *NACA Report* 1210 (1955), p. 6.

2 Un problema algo semejante es discutido por M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1949), vol. 1, pp. 746 y ss.

c. Demostrar que la solución de la ecuación diferencial del apartado (b) es

$$\Psi = -\tfrac{3}{1}\tfrac{4}{2}\tfrac{3}{0}A(\beta + \tfrac{1}{4}\beta^{8} - \tfrac{5}{2}\tfrac{}{1}\beta^{9} + \tfrac{1}{5}\beta^{15} - \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{0}\beta^{16} + \cdots) \qquad (12.C\text{-}4)$$

en la que $\beta = (1 - \xi)^{1/7}$.

Para resolver este problema, así como también el problema del desarrollo de los perfiles de temperatura en la región de la longitud de entrada, se ha utilizado-1 la distribución más realista de velocidad de Deissler. Con este fin se han empleado máquinas calculadoras de alta velocidad.

---

3 E. M. **SPARROW**, T. M. **HALLMAN** y **R. SIEGEL**, *Appl. Sci. Research*, A7, 37-52 (1957).

CAPÍTULO 13

TRANSPORTE DE INTERFASE EN SISTEMAS NO ISOTÉRMICOS

Hasta aquí se ha visto como se pueden plantear balances de energía para distintos problemas sencillos, y como estos balances conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias o entre derivadas parciales, a partir de las cuales pueden hallarse los perfiles de temperatura. Se ha visto también que el balance de energía aplicado a un elemento diferencial arbitrario de fluido conduce a una ecuación entre derivadas parciales — la ecuación de energía - que puede utiliirse para plantear problemas más complejos. En el Capítulo 12 se ha visto que la ecuación de energía de tiempo ajustado, juntamente con expresiones empíricas para la densidad de flujo turbulento de calor $\vec{q}^{(t)}$, proporcionan una base adecuada para resumir y extrapolar las medidas del perfil de temperatura en sistemas turbulentos. Por consiguiente, el lector debe tener ya una idea bastante clara del significado de las ecuaciones de variación para sistemas de flujo no isotérmico, así como de su intervalo de aplicabilidad.

Es indudable que todos los problemas que se han estudiado pertenecen a sistemas de geometría más bien sencilla, y que además, en la mayoría de ellos se han hecho suposiciones, tales como que la viscosidad es independiente de la temperatura, o que la densidad del fluido es constante. Esto no quiere decir que las soluciones obtenidas hasta ahora no sean importantes, sino todo lo contrario. Muchas veces las soluciones se han utilizado luego en la practica, en unas condiciones en que las suposiciones que se han hecho son razonablemente validas. Muchas de estas soluciones son útiles para calcular el orden de magnitud. Por otra parte, el estudio de estos sistemas más sencillos constituye un eslabón para la discusión de problemas mas complejos.

En este capítulo se recurre a alguno de los problemas en los que es necesario o conveniente utilizar un análisis menos detallado. El método habitual que se utiliza en ingeniería para estos problemas consiste en formular balances de energfa sobre regiones mayores, tal como se estudia en el Capítulo 15. Como preparación a la discusión del balance macroscópico de energía, se presenta en este capítulo una serie de correlaciones representativas para predecir las velocidades de flujo de calor a través de las superficies de separación sólido-fluido; la contribución de la radiación a este flujo de calor se considera en el Capítulo 14.

El lector recordará que en el Capítulo 6 se han descrito problemas complejos de transferencia de cantidad de movimiento, combinando el conocimiento experimental con los resultados del análisis dimensional. Los resultados obtenidos se han presentado en forma de representaciones gráficas del factor de fricción, frente al numero de Reynolds, para diversas geometrías. En este capítulo se extiende este procedimiento a los problemas de transferencia de calor. Mediante el análisis dimensional de las ecuaciones de variación para flujo no isotérmico, y los datos experimentales de velocidades de transferencia de calor, se obtienen correlaciones adimensionales para las velocidades de transferencia de calor por convección libre y forzada. Estas correlaciones se expresan en función de una densidad de flujo calorífico adimensional,. que es el llamado numero de Nusselt para la transmisión de calor, y se designa por Nu.

Para sistemas no isotérmicos las correlaciones son en muchos aspectos más complicadas que las que se han hallado en el Capitulo 6. El número de grupos adimensionales es mayor, las posibles variaciones de las condiciones límite son más numerosas, y además hay que tener en cuenta en este caso la variación de las propiedades físicas con la temperatura. Por otra parte, en los sistemas no isotérmicos nos encontramos, además, con los fenómenos de convección libre, condensación y ebullición. Siempre que sea posible, haremos referencia a las materias análogas del Capítulo 6, indicando las modificaciones que hay que hacer para aplicar aquellas correlaciones a sistemas no isotérmicos.

La discusión que se hace en este capítulo se limita a unas pocas fórmulas de transmisión de calor, con el fin de introducir al lector en el tema, pero sin intentar dar un tratamiento enciclopédico. Selecciones más amplias de fórmulas pueden hallarse en los libros de transmisión de calor[1,2,3,4,5] y en la bibliografía reciente.

§13.1 DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE CALOR

Consideremos un sistema de flujo en el que el fluido circula por una conducción o alrededor de un abjeto solido. Supongamos que la superficie del sólido está más caliente que el fluido, de forma que el calor se transmite del solido al fluido. Es de esperar que la velocidad de flujo de calor a través de la interfase sólido-fluido dependerá del área de la interfase y de la diferencia de temperatura entre el sólido y el fluido. Según esto se puede escribir

$$Q = hA\,\Delta T \qquad (13.1\text{–}1)$$

1 H. GRÖBER, S. ERK y U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer, Berlín (1955), tercera edición.

2 M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York, vol. I (1949), vol. II (1957).

3 W. H. MCADAMS, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición.

4 E. R. G. ECKERT y R. M. DRAKE, *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, Nueva York (1959), segunda edición.

5 M. JAKOB y G. A. HAWKINS, *Elements of Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1957), tercera edición.

siendo Q el flujo de calor hacia el fluido (kcal hr^{-1}), A un área característica, ΔT una diferencia característica de temperatura, y el factor de proporcionalidad h se denomina ***coeficiente de transmisión de calor.*** Es evidente que puede utilizarse la misma definición cuando el fluido se enfría. La Ec. 13.1— 1 se denomina a veces «ley de enfriamiento de Newton»; sin embargo, esto no es correcto, ya que no es ninguna «ley», sino una ecuación de definición de h. Téngase en cuenta que ***h no*** está definido para un caso concreto mientras no se estipulen A e AT. Vamos a considerar ahora las definiciones usuales de h para dos tipos de geometría de flujo.

Como ejemplo de ***flujo*** en ***conducciones,*** consideramos el flujo de un fluido en un tubo circular de diámetro D (véase Fig. 13.1—1), *en* el que existe una porción de pared de longitud L que se calienta y cuya temperatura de la superficie interior T_0 *(z)* varía. Supongamos que la temperatura global[1] del fluido, T_b, aumenta de T_{b1} a T_{b2} en la región calentada. Existen, por consiguiente, tres definiciones convencionales de coeficientes de transmisión de calor para el fluido en la sección que se calienta:

$$Q = h_1(\pi DL)(T_{01} - T_{b1}) \tag{13.1-2}$$

$$Q = h_a(\pi DL)\left(\frac{(T_{01} - T_{b1}) + (T_{02} - T_{b2})}{2}\right) \tag{13.14}$$

$$Q = h_{ln}(\pi DL)\left[\frac{(T_{01} - T_{b1}) - (T_{02} - T_{b2})}{\ln [(T_{01} - T_{b1})/(T_{02} - T_{b2})]}\right] \tag{13.1-4}$$

Obsérvese que h_1 se basa en la diferencia de temperatura a la entrada $(T_0 - T_b)_1$, h_a en la media aritmética de la diferencia de temperaturas extremas $(T_0 - T_b)_a$, y h_{ln} en la correspondiente media logarítmica de la diferencia de temperaturas $(T_0 - T_b)_{ln}$. Para la mayor parte de los cálculos es preferible utilizar el coeficiente h_{ln} debido a que varía menos con L/D que los otros dos;2 sin embargo, no se utiliza en todos los casos. Al utilizar los resultados de transmisión de calor que se reseñan en la bibliografía, hay que tener muy en cuenta las definiciones de los coeficientes de transmisión de calor.

Si no se conoce inicialmente la distribución de temperatura en la pared, o si las propiedades del fluido varian considerablemente a lo largo del tubo, es difícil predecir los coeficientes de transmisión de calor definidos anteriormente. En estas condiciones, se acostumbra expresar la Ec. 13.1— 1 en forma diferencial:

$$dQ = h_{loc}(\pi D\, dz)(T_0 - T_b) \tag{13.1-5}$$

En esta ecuación, dQ es el calor comunicado al fluido en la distancia dz de tubería,

---

[1] Para la definición de temperatura global cuando ρ y $\hat{C}_p$ son constantes, véase Ec. 9.8-33.

[2] Es conveniente tener en cuenta, sin embargo, que si $\Delta T_2/\Delta T_1$ está comprendido entre 0,5 y 2,0, se puede tomar AT, en vez de ΔT_{ln} o h_a en vez de h_{ln}, con un error máximo del 4 por ciento. Este grado de exactitud es suficiente para la mayor parte de los cálculos de transmisión de calor.

$(T_0 - T_b)$ es la diferencia local de temperaturas, y h_{loc} es el *coeficiente local de transmisión de calor.*[3] Esta ecuación se utilii ampliamente en ingeniería.

Como ejemplo de *flujo alrededor de objetos sumergidos,* consideremos el flujo de un fluido alrededor de una esfera de radio R, cuya temperatura de la superficie se mantiene en toda ella a T_0. Supongamos que el fluido se aproxima a la esfera con

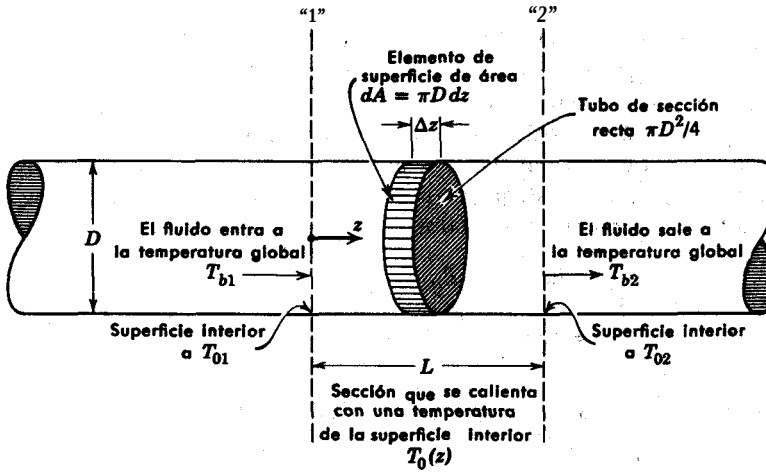


Fig. 13.1-1. Transmisión de calor en un tubo circular.

una temperatura uniforme T_∞, distinta de T_0. Según esto, se puede definir un coeficiente medio de transmisión de calor para toda la superficie de la esfera mediante la relación

$$Q = h_m(4\pi R^2)(T_0 - T_\infty) \qquad (13.1\text{–}6)$$

Obsérvese que el área característica elegida para la esfera en este caso es distinta de la de la Ec. 6.1-5.

También puede definirse, por analogía cori la Ec. 13.1-5, un coeficiente local para objetos sumergidos :

$$dQ = h_{loc}(dA)(T_0 - T_\infty) \qquad (13.1\text{–}7)$$

Este coeficiente es más informativo que h_m, ya que indica cómo se distribuye la densidad de flujo de calor sobre la superficie; sin embargo, la mayor parte de los experimentadores sólo dan datos de h_m, que es más fácil de medir.

---

[3] Téngase en cuenta que h_{loc} e $(\Delta T)_{loc}$ no están definidos mientras no se especifique la forma del elemento de brea. En la Ec. 13.1-5 se ha tomado $dA = \pi D\,dz$, lo que quiere decir que h_{loc} Y T_0 son los valores medios para área sombreada dA de la Fig. 13.1 – 1.

Es preciso recalcar que antes de definir h hay que establecer con claridad las definiciones de A e AT. Téngase presente también que h no es una constante característica del medio fluido; sino que, por el contrario, el coeficiente de transmisión de calor depende en una forma complicada de muchas variables, que comprenden las propiedades del fluido $(k, \mu, \rho, \hat{C}_p)$, la geometrla del sistema, la velocidad de flujo, la diferencia característica de temperaturas y la distribución de temperatura en la superficie. En lo que queda de este capítulo se estudia la predicción de la variación de h con estas 'magnitudes. En general, esto se lleva a cabo correlacionando los datos experimentales mediante análisis dimensional. Sin embargo, existen cálculos directos de h a partir de las ecuaciones de variación, para diversos sistemas sencillos de flujo laminar; para flujo turbulento se han obtenido valores útiles de h por cálculos semiteóricos. En la Tabla 13.1— 1 se presentan algunos valores de h.

TABLA 13.1-1"

ORDEN DE MAGNITUD DEL COEFICIENTE h DE TRANSMISIÓN DE CALOR

Caso	h(kcal m^{-2} hr^{-1} °C^{-1})	h(Btu ft^{-2} hr^{-1} °F^{-1})
Convección libre		
Gases	3-20	1-4
Líquidos	100—600	20-120
Ebullición de agua	1000—20000	200—4000
Conveccion forzada		
Gases	10-100	2-20
Fluidos viscosos	50—500	10—100
Agua	500—10000	loo-2ooo
Condensación de vapores	1000—100000	200—20000

[a] Tomados de H. Gröber, S. Erk y U. Grigull, *Wärmeübertragung*, Springer, Berlín (1955), tercera edición, p. 158. Cuando h esta en Btu ft^{-2} hr^{-1} °F^{-1}, multiplicar por 4,88 para obtener h en kcal m^{-2} hr^{-1} ° C^{-1}

En § 9.6 se ha visto que para el calculo de velocidades de transmisión de calor entre dos corrientes de fluidos separadas por una o más paredes sólidas, es conveniente utilizar un *coeficiente global de transmisión de calor*, U_0, que expresa el efecto conjunto de toda la serie de resistencias a través de las cuales fluye el calor. Aquí se da una definición más precisa de U_0, y se indica cómo se efectúan los cálculos en el caso concreto de intercambio de calor entre dos corrientes coaxiales cuyas temperaturas globales son T_h y T_c, separadas por un tubo cilíndrico de diámetro interno D_0 y externo D_1:

$$dQ = U_0(\pi D_0\, dz)(T_h - T_c) \tag{13.1-8}$$

$$\frac{1}{D_0 U_0} = \left(\frac{1}{D_0 h_0} + \frac{\ln D_1/D_0}{2k^{01}} + \frac{1}{D_1 h_1}\right)_{1oc} \tag{13.1-9}$$

Obsérvese que U_0 se ha definido como un coeficiente local, que es la definición inherente a la mayor parte de los procedimientos de diseño. (Véase ejemplo 15.4-2.)

Téngase en cuenta que las Ecs. 13.1-8 y 9 son solamente válidas para el. flujo de calor a través de resistencias caloríficas conectadas en serie. En determinadas condiciones, podrá existir una considerable densidad de flujo calorífico en *paralelo* por radiación en una o ambas superficies, y será preciso modificar estas ecuaciones. (Véase ejemplo 14.5— 1.)

Vamos a concluir esta sección analizando una serie hipotética de datos de transmisión de calor, con el fin. de ilustrar el significado físico de los coeficientes de transmisión de calor, así como un método de medida de los mismos.

Ejem. 13.1— 1. Cálculo de coeficientes de transmisión de calor a partir de datos experimentales

En la Fig. 13.1-2 se representa una serie de experiencias en estado estacionario efec-

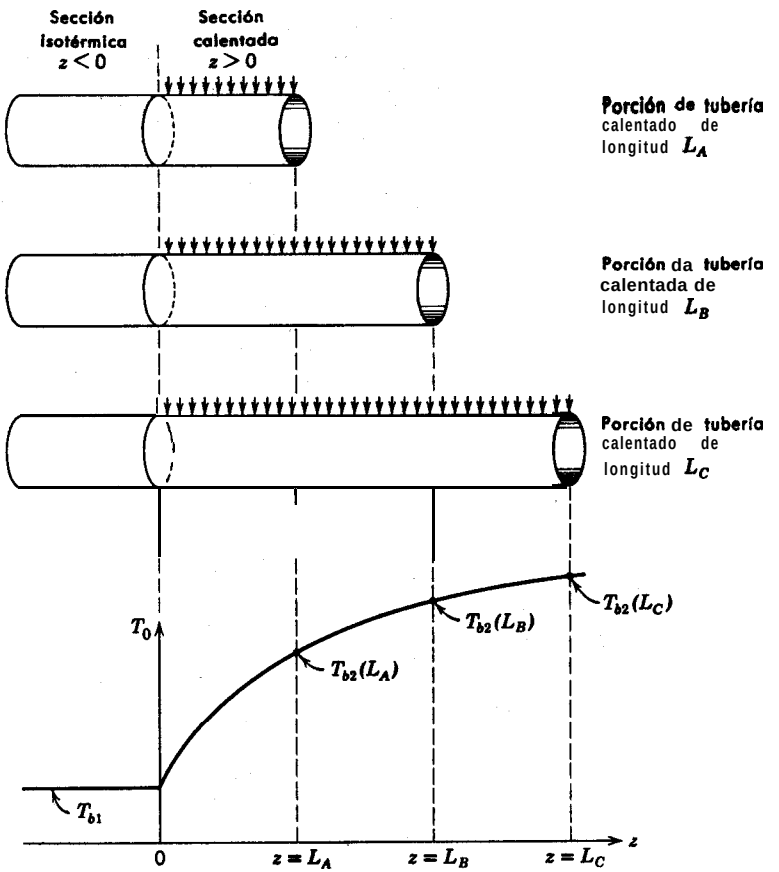


Fig. 13.1-2. Serie de experiencias para obtener coeficientes de transmisión de calor.

tuadas sobre el calentamiento de aire en tubos. En la primera experiencia fluye aire a $T_{b1} = 93{,}3^{\circ}\text{C}$ por un tubo de 1,25 cm de diámetro interno, en el que el perfil de velocidad laminar está totalmente desarrollado en la porción de tubería isotérmica correspondiente a $z < 0$. En z = 0 se eleva bruscamente la temperatura de la pared hasta el valor Te = $= 100^{\circ}\text{C}$ y se mantiene constante para la restante longitud de tubo L_A. Al llegar a $z = L_A$ entra en una cámara de mezcla en la que se mide su temperatura de mezcla adiabática T_{b2} (o «global»). Se efectúan experiencias con tubos de diferentes longitudes, L_B, L_C, *etc.*, y se obtienen los siguientes resultados:

Experiencia	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
L (cm)	3,75	7,50	15,0	30,0	60,0	120,0	240,0
T_{b2} (°C)	94,1	94,6	95,1	95,9	97,0	98,3	99,4

La velocidad de flujo del aire w es 1,35 kg hr^{-1} en todas las experiencias. Calcular h_1, h_a, h_{ln}, y el valor de h_{loc} a la salida, como funciones de la longitud reducida L/D.

Solución. Un balance de energía aplicado a la longitud calentada L en una experiencia cualquiera, para estado estacionario y $\hat{C}_p$ constante, conduce a

$$w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1}) = Q \tag{13.1-10}$$

Combinando esta expresión con la Ec. 13.1-2 se obtiene

$$w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1}) = h_1\pi DL(T_0 - T_{b1}) \tag{13.1-11}$$

de donde

$$h_1 = \frac{w\hat{C}_p}{\pi DL}\left(\frac{T_{b2} - T_{b1}}{T_0 - T_{b1}}\right) \tag{13.1-12}$$

Análogas substituciones de las Ecs. 13.1-3 y 4 en el balance de energía dan

$$h_a = \frac{w\hat{C}_p}{\pi DL}\frac{(T_{b2} - T_{b1})}{(T_0 - T_b)_a} \tag{13.1-13}$$

$$h_{ln} = \frac{w\hat{C}_p}{\pi DL}\frac{(T_{b2} - T_{b1})}{(T_0 - T_b)_{ln}} \tag{13.1-14}$$

Para evaluar h_{loc} se construye con los datos anteriores una curva continua $T_b(z)$ que representa la variación de la temperatura global con z en el tubo mas largo (240 cm). De esta forma, la Ec. 13.1-10 se transforma en

$$w\hat{C}_p(T_b(z) - T_{b1}) = Q(z) \tag{13.1-15}$$

Diferenciando esta expresión con respecto a z y combinando el resultado con la Ec. 13.1-5, se obtiene

$$w\hat{C}_p\frac{dT_b}{dz} = h_{loc}\pi D(T_0 - T_b) \tag{13.1-16}$$

o

$$h_{loc} = \frac{wC_p}{\pi D}\left(\frac{dT_b}{dz}\right)\left(\frac{1}{T_0 - T_b}\right) \tag{13.1-17}$$

que para T_0 constante se transforma en

$$h_{loc} = -\frac{wC_p}{\pi D}\frac{d\ln(T_0 - T_b)}{dz} \tag{13.1-18}$$

La derivada de la Ec. 13.1-18 se determina a partir de una representación gráfica de $\ln(T_0 - T_b)$ frente a z. Debido a la diferenciación, es difícil determinar h_{loc} con precisión.

En la Fig. 13.1-3 se presentan los resultados del calculo. Obsérvese que todos los coeficientes disminuyen al aumentar L/D, pero que h_{loc} y h_{ln} varían menos que los otros, y tienden hacia una asintota común al aumentar L/D. Para el flujo turbulento con temperatura constante de la pared se observa un comportamiento análogo, salvo que h_{loc} tiende mucho más rápidamente hacia la asintota. (Véase Fig. 13.2-1.)

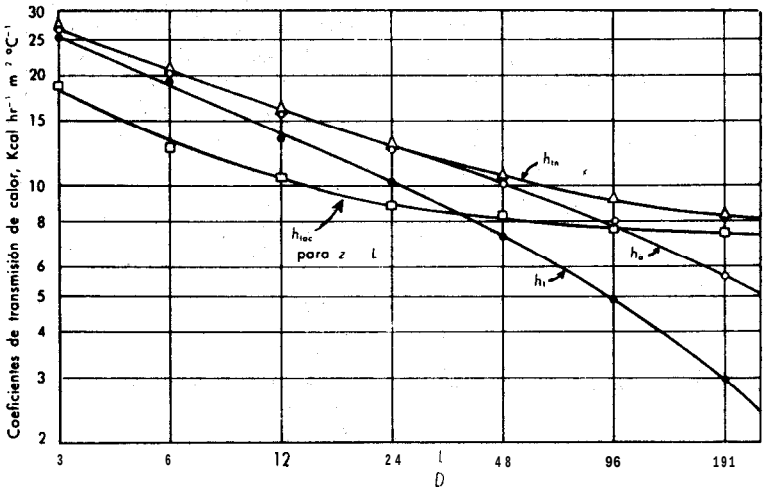


Fig. 13.1-3. Coeficientes de transmisión de calor calculados para el ejemplo 13.1-1.

§ 13.2 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA CONVECCIÓN FORZADA EN TUBOS

El calentamiento y enfriamiento de fluidos en el interior de tubos tiene una gran importancia practica. De aquí que exista una voluminosa literatura sobre el tema y se disponga de muchas ecuaciones de diseño de distinto grado de generalización. En esta sección nos proponemos simplemente introducir al lector en el tema e indicar algunos resultados bien conocidos.

En primer lugar, ampliaremos el análisis dimensional que se ha expuesto en § 10.6 con el fin de predecir la forma de las correlaciones del coeficiente de trans-

misión de calor h para la convección forzada. Consideremos el flujo estacionario de un fluido en un tubo, tal como se indica en la Fig. 13.1-1. Se supone que se conoce la distribución de velocidad en el plano «1» y que la temperatura T_0 de la superficie correspondiente a la parte que se calienta, desde z = 0 hasta z = L, es constante. Se admite también que las propiedades físicas ρ, μ, C_p y k son constantes. Por último, en esta sección se considera que, bajo ciertas condiciones, la variación de μ con la temperatura es despreciable.

Para un tubo de radio R y longitud L, el flujo total de calor que pasa al fluido por la pared del tubo es

$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right)\Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz \tag{13.2-1}$$

siendo válida esta expresión tanto para el flujo laminar como para el turbulento.[1] El signo + que interviene en esta expresión se debe a que se comunica calor al sistema en la dirección r negativa. Igualando las Ecs. 13.1-2 y 13.2-1 y despejando h_1, se obtiene

$$h_1 = \frac{1}{\pi DL(T_0 - T_{b1})} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \frac{\partial T}{\partial r} \right)\Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz \tag{13.2-2}$$

Se introducen ahora las variables adimensionales $r^* = r/D$, $z^* = z/D$, $T^* = (T - T_0)/(T_{b1} - T_0)$, y el *número de Nusselt* $\mathrm{Nu}_1 = h_1 D/k$ (también adimensional). Multiplicando la Ec. 13.2-2 por D/k e introduciendo los anteriores grupos adimensionales se obtiene

$$\mathrm{Nu}_1 = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)\Big|_{r^*=\frac{1}{2}} d\theta \, dz^* \tag{13.2-3}$$

Por lo tanto, el número de Nusselt Nu_1 es, en realidad, un gradiente adimensional de temperatura promediado sobre la superficie de transmisión de calor.

En principio, este gradiente adimensional de temperatura puede evaluarse diferenciando la expresión de T^* obtenida al resolver las Ecs. 10.6-9, 10 y 11, con las siguientes condiciones límite :

v^* = una determinada función de r^* y θ	para $z^* = 0$	(13.2-4)
$v^* = 0$	para $r^* = 1/2$	(13.2-5)
$p^* = 0$	para $z^* = 0$, $r^* = 0$	(13.2-6)
$T^* = 1$	para $z^* = 0$	(13.2-7)
$T^* = 0$	para $r^* = 1/2$	(13.2-8)

[1] En la deducción que sigue se sobreentiende que todas las temperaturas, presiones y velocidades, son de tiempo ajustado; para simplificar se omiten las rayas situadas sobre las letras.

A partir de los grupos adimensionales que aparecen en las ecuaciones diferenciales[2] (Ecs. 10.6-9, 10 y 11) y teniendo en cuenta que en las condiciones límite no intervienen nuevos grupos adimensionales, se puede concluir que la temperatura adimensional de tiempo ajustado (véase Ecs. 6.2-7 y 8) dependerá de:

$$T^* = T^*(r^*, \theta, z^*; \text{Re, Pr, Br}) \tag{13.2-9}$$

Substituyendo esta relación en la Ec. 13.2-3, se obtiene:

$$\text{Nu}_1 = \text{Nu}_1(\text{Re, Pr, Br}, L/D) \tag{13.2-10}$$

En la mayor parte de los casos prácticos los efectos de disipación viscosa son pequeños, de forma que el grupo de Brinkman puede despreciarse, con lo que la Ec. 13.2-10 se reduce a

$$\text{Nu}_1 = \text{Nu}_1(\text{Re, Pr}, L/D) \tag{13.2-11}$$

Por consiguiente, el análisis dimensional nos revela que para la convección forzada en tubos con temperatura de pared constante, el coeficiente de transmisión de calor h_1 puede correlacionarse[3] en función de un grupo adimensional Nu_1, que depende del numero de Reynolds, del numero de Prandti, y del factor geométrico L/D. De igual forma se puede demostrar (véase problema 13.K) que

$$\text{Nu}_a = \text{Nu}_a(\text{Re, Pr}, L/D) \tag{13.2-12}$$

$$\text{Nu}_{\ln} = \text{Nu}_{\ln}(\text{Re, Pr}, L/D) \tag{13.2-13}$$

$$\text{Nu}_{1oc} = \text{Nu}_{1oc}(\text{Re, Pr}, z/D) \tag{13.2-14}$$

en las que $\text{Nu}_a = h_a D/k$, $\text{Nu}_{\ln} = h_{\ln} D/k$, y $\text{Nu}_{1oc} = h_{1oc} D/k$.

Hasta aquí se ha supuesto que las propiedades físicas permanecen constantes en el intervalo de temperatura existente en el sistema. Para grandes diferencias de temperatura esta suposición conduce a errores considerables, siendo las variaciones de μ y ρ las más importantes. La variación de la viscosidad con la temperatura

---

2 El número de Froude no interviene en este caso, puesto que no existe superficie libre del líquido; es decir, que la tubería está totalmente llena.

3 Este resultado viene dado también por el teorema de π de Buckingham (véase la nota al pie de pagina en relación con la Ec. 6.2-9). Se desea obtener una relación de h en función de las propiedades físicas ρ, μ, $\hat{C}_p$, k, las magnitudes geométricas D, L y la velocidad de flujo $\langle v \rangle$. En este caso intervienen cuatro unidades fundamentales (masa m, longitud l, tiempo t, y temperatura T). Por lo tanto, el teorema de π predice correctamente que existirán cuatro grupos adimensionales relacionados entre sí, pero en cambio no es capaz de predecir las suposiciones que se han hecho en la elección de las variables.

puede tenerse en cuenta de forma aproximada[4] incluyendo el grupo μ_b/μ_0, siendo μ_b la viscosidad para un cierto valor medio T_b de la temperatura global del fluido, y μ_0 la viscosidad a la temperatura de la superficie del sólido. Por esta razón, algunas correlaciones de los números de Nusselt definidos más arriba son de la forma

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, L/D, \mu_b/\mu_0) \tag{13.2-15}$$

que han sido propuestas por Sieder y Tate.[5] Por otra parte, si la densidad ρ varía apreciablemente, puede tener lugar algo de convección libre. Este efecto se ha tenido en cuenta en las correlaciones, añadiendo el número de Grashof a la serie anterior de grupos adimensionales. Sin embargo, la discusión de este efecto cae fuera del objeto de este libro.[6]

Los resultados del análisis dimensional han sido de gran utilidad en los estudios empíricos de transmisión de calor. Por ejemplo, la Ec. 13.2—15 indica que, a pesar de que h depende de *ocho* magnitudes físicas $(D, (u), p, \mu_b, \mu_0, \hat{C}_p, k, L)$ esta dependencia puede expresarse poniendo Nu en función de solamente *cuatro* grupos adimensionales (Re, Pr, $L/D, \mu_b/\mu_0$). Esta reducción del número de variables objeto de estudio reduce grandemente el número de experiencias que es preciso realizar; por ejemplo, para estudiar todas las combinaciones de ocho variables independientes con diez valores para cada una de ellas habría que efectuar 10s experiencias, mientras que para cuatro variables independientes basta con 10^4 experiencias.

Correlaciones obtenidas mediante el análisis dimensional

Vamos a considerar ahora algunas de las correlaciones mejor conocidas que se han obtenido para la transmisión de calor en tubos. En la Fig. 13.2-1 se representa gráficamente la correlación de Sieder y Tate[5] para flujo desarrollado en tubos lisos

---

[4] Un grupo de este tipo puede obtenerse introduciendo en las ecuaciones de variación un coeficiente de variación de la viscosidad con la temperatura, que se obtiene al desarrollar μ mediante una serie de Taylor en función de T:

$$\mu = \mu_0 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{T=T_0} (T - T_0) + \cdots \tag{13.2-15a}$$

Aproximando el cociente diferencial mediante un cociente de diferencias se obtiene una viscosidad adimensional:

$$\mu \doteq \mu_0 + \left(\frac{\mu_b - \mu_0}{T_b - T_0}\right)(T - T_0) \quad o \quad \frac{\mu}{\mu_0} \doteq 1 + \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} - 1\right)\left(\frac{T - T_0}{T_b - T_0}\right) \tag{13.2-15b,c}$$

Naturalmente que el grupo μ_b/μ_0 aparece luego en las ecuaciones de variación.

[5] E. N. SIEDER y G. E. TATE, *Ind. Eng. Chem.*, *28*, 1429-1435 (1936).

[6] Un tratamiento detallado del flujo laminar en tubos cuando ρ y μ varían con la temperatura puede verse en R. L. PIGFORD, *C. E. P. Symposium Series núms.* 17, 51, 79-92 (1955).

con temperatura de la pared prácticamente constante. Esta correlación está en concordancia con la Ec. 13.2-15 y constituye una adecuada visión global de la transmisión de calor en un tubo de flujo. Téngase en cuenta que todas las propiedades físicas están evaluadas a $(T_{b1}+T_{b2})/2$, a excepción de μ_0 que lo está a $(T_{01}+T_{02})/2$ El número de Reynolds que se utiliza aquí, Re, = $DG/\mu_b = Dw/S\mu_b$, resulta muy conveniente puesto que experimentalmente[7] se ha encontrado que la transición a flujo turbulento comienza, generalmente, alrededor de Re, = 2100, a pesar de que μ varía considerablemente en la dirección radial. La magnitud $G = w/S = \langle \rho v \rangle$ se denomina «velocidad másica».

Para *flujo altamente turbulento,* las curvas'para *LID* > 10 convergen hacia una línea única. La ecuación de esta línea para Re, > 20 000 es

$$\frac{h_{\ln} D}{k_b} = 0{,}026 \left(\frac{DG}{\mu_b}\right)^{0,8} \left(\frac{C_p \mu}{k}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{0,14} \tag{13.2-16}$$

que reproduce los datos experimentales existentes con un error de $\pm$ 20 por ciento en el intervalo de Re, = 104 a 10^5, Pr, = 0,6 a 100 y $L/D > 10$.

Para *flujo laminar,* la ecuación de las líneas es

$$\frac{h_{\ln} D}{k_b} = 1{,}86(\mathrm{Re}_b \Pr\, D/L)^{1/3}(\mu_b/\mu_0)^{0,14} \tag{13.2-17}$$

que es una modificación empíricas de la solución teórica de Graetzs para transmisión de calor con flujo laminar totalmente desarrollado y temperatura constante de la pared. (Véase Ec. 13.2-23.) La Ec. 13.2-17 se cumple con un error máximo del orden del 20 por ciento para Re Pr $D/L > 10$; para velocidades de flujo menores los valores que se obtienen para $h_{\ln}$ son demasiado bajos.

La *región de transición,* que se extiende aproximadamente desde Re = 2100 a 10 000, no se conoce bien y generalmente se evita operar en ella en el diseño siempre que es posible. Las curvas de esta región están basadas en datos experimentales[5] pero merecen menos confianza que el resto de la gráfica.

Las características generales de las curvas de la Fig. 13.2—1 merecen un cuidadoso estudio. Obsérvese que para una región calentada con unos determinados valores de *L y D,* y unas ciertas propiedades físicas del fluido, la ordenada es proporcional al aumento de temperatura adimensional $(T_{b2} - T_{b1})/(T_0 - T_b)_{\ln}$ del fluido que circula. En estas condiciones, a medida que aumenta la velocidad de flujo, y, por consiguiente, el número de Reynolds, la temperatura del fluido a la salida disminuye primeramente (hasta que se alcanza un Re, del orden de 2100), después aumenta (hasta que se alcanza un Re, del orden de 8000), y, finalmente, disminuye de nuevo.

[7] A. P. COLBURN, *Trans. A.I.Ch.E., 29,* 174-210 (1933).

[8] L. GRAETZ, *Ann. d. Physik, 25, 337-357 (1855);* J. LÉVEQUE, *Ann. mines,* 13, 201, 305. 381 (1928). Estas soluciones han sido ampliamente discutidas por M. JAKOB, *Heat Transfer,* vol I, Wiley, Nueva York (1949), pp. 451-464.

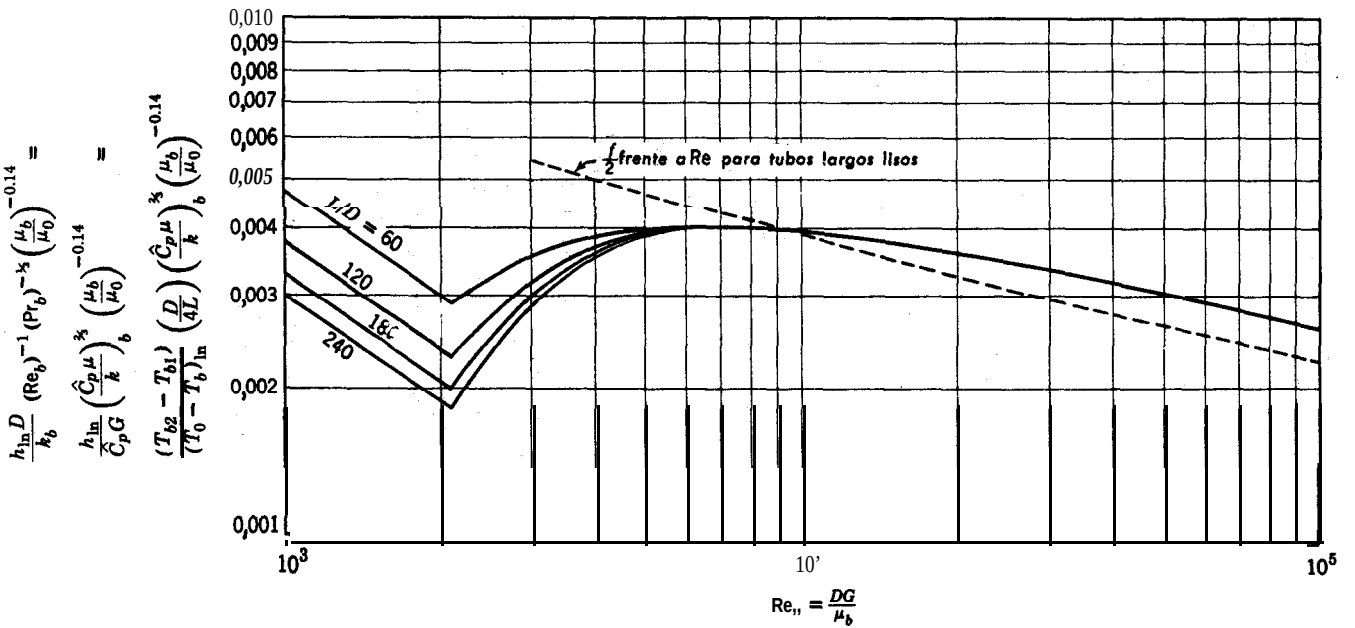


Fig. 13.2-1. Coeficientes de **transmisión de calor** para flujo totalmente desarrollado en tubos lisos. Las líneas correspondientes al flujo laminar no **deberán** de utilizarse para Re Pr $D/L < 10$, que corresponde a $(T_0 - T_b)_2 /(T_0 - T_b)_1 < 0{,}2$. (**Véase** Fig. 13.2-5.) Las curvas para flujo laminar **están** basadas en datos de Re Pr $D/L \gg 10$ y temperatura de pared **prácticamente** constante; en estas condiciones h_a y h_{ln} son **idénticos.** Recomendamos la utilización de h_{ln}, contrariamente a h_a, que ha sido recomendado por Sieder y Tate, puesto que esta **elección** es habitual en los **cálculos** de **diseño** de cambiadores de calor. [Tomada de E. N. Sieder y G. E. Tate, ***Ind. Eng. Chem.***, **28,** (1936) **1429-1435.**]

Obsérvese también que para el flujo laminar hay una notable influencia de L/D sobre h_{ln}, pero, en cambio, para el intervalo de L/D que se considera aquí, dicha influencia es insignificante para Re, > 8000.

La Fig. 13.2— 1 recuerda algo a la gráfica del factor de fricción de la Fig. 6.2-2, a pesar de que la situación física es totalmente diferente. Para el. intervalo de flujo altamente turbulento (Re, > 10 000) la ordenada de transmisión de calor concuerda aproximadamente con $f/2$ para tubos lisos largos. Este hecho fue señalado por Colburn,[7] quien propuso la siguiente analogía empírica para Re, > 10 000 en tubos largos lisos :

$$j_H = \frac{f}{2} \qquad \textbf{(13.2-18)}$$

en la que

$$j_H = \frac{h_{ln}}{C_p G}\left(\frac{C_p \mu}{k}\right)_f^{2/3} \qquad \textbf{(13.2-19)}$$

y $f/2$ se obtiene de la Fig. 6.2-2. El número de Reynolds se expresa en este caso por DG/μ_f. En esta correlación el subíndice f indica que las propiedades están evaluadas a la «temperatura de la película» $(T_b+T_0)/2$, siendo T_b y T_0 las medias de los valores extremos; el valor de C_p que figura en el denominador se evalua a $T_{,,}$. Si las propiedades físicas son constantes a lo largo de todo el tubo, la Fig. 13.2— 1 se transforma en una representación gráfica de j_H frente al número de Reynolds; como es natural, la analogía 13.2— 18 no es válida por debajo de Re = 10 030. La analogía desaparece completamente para flujo turbulento en tubos rugosos, puesto que la rugosidad afecta más a f que a j,.

Finalmente, haremos una consideración acerca de la aplicación de la Fig. 13.2— 1 a conductos de sección no circular. Para flujo altamente turbulento se puede utilizara el radio hidráulico medio definido en la Ec. 6.2-16. Para aplicar este empirismo basta con sustituir D por $4R_h$ en los números de Nusselt y Reynolds.

La correlación sencilla que se ha representado en la Fig. 13.2-1 es satisfactoria para la mayor parte de los problemas de diseño, si bien la representación de los flujos laminar y turbulento mediante un único conjunto de líneas constituye una supersimpliticación. Las correlaciones que se dan a continuación corresponden solamente a uno u otro tipo de flujo.10

Correlaciones obtenidas a partir de los perfiles de temperatura

Para *flujo altamente turbulento de un fluido de propiedades constantes* (Re > 10 000)

9 W. H. McAdams, *Heat Transmission,* McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, pp. 241-243.

10 En una primera lectura se puede omitir el tratamiento que sigue a continuación. El lector que desee conocer correlaciones más detalladas puede continuar; los demás pueden pasar directamente al ejemplo 13.2-1.

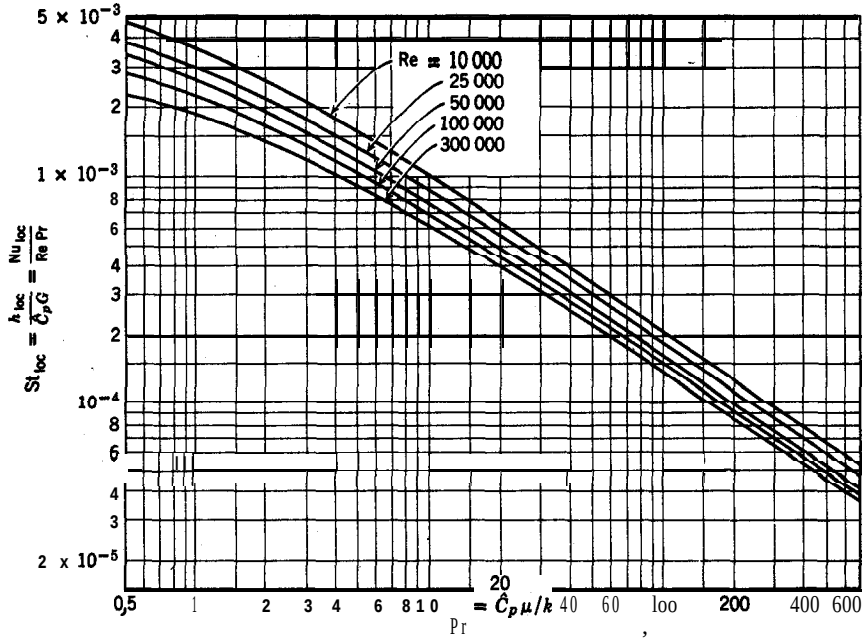


Fig. 13.2-2. Valores asintóticos del número de Stanton local predichos para flujo turbulento en tubos lisos con densidad de flujo calorífico constante. [R. G. **DEISSLER,** *NACA Report* 1210 **(1955).]**

y números de Prandtl superiores a **0,5,** es de gran interés la correlación de **Deissler**[11] (Fig. 13.2-2).

La ordenada $h/\hat{C}_p G = \mathrm{Nu}\,\mathrm{Re}^{-1}\,\mathrm{Pr}^{-1}$, se **denomina número** de Stanton, St. Esta gráfica está basada en los **perfiles** semiempíricos de velocidad y temperatura de las Figs. 5.3-1 y 12.3-2, y es válida para densidad de flujo calorífico de pared q_0, constante, y perfiles de temperatura y velocidad totalmente desarrollados. En este intervalo de los números de Reynolds y Prandtl, el perfil de temperatura se desarrolla muy rápidamente; así, tal como se observa en la Fig. 13.2-3, los números **asintóticos** de Nusselt concuerdan con bastante exactitud, excepto para **una** corta **«región** térmica de **entrada»que** en la mayor parte de los problemas puede **despreciarse.**12 Esta rápida respuesta **térmica** del fluido permite utilizar también la Figura 12.2-3 con buena exactitud para otras condiciones térmicas límite, **tales** como **tem-**

---

11 R. G. **DEISSLER,** *NACA Report* 1210 (1955); Deissler ha calculado **también** h_{loc} **y** f, teniendo en cuenta la variación de las propiedades **físicas.**

12 Otros **cálculos** semiempíricos de la transmisión turbulenta de calor en la región **térmica** de entrada han sido **realizados** por H. L. BECKERS, *Appl. Sci. Research,* **A6,** 147-190 (1956); C. A. **SLEICHER** y M. TRIBUS, 1956 *Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute Preprints,* Standford **University Press,** 'pp. 59-78; y R. G. **DEISSLER,** *NACA Report* 1210 (1955).

peratura de la superficie T_0 constante o que varía suavemente, y justifica la correspondiente aplicación de los coeficientes locales estimados a partir de la Fig. 13.2-1.

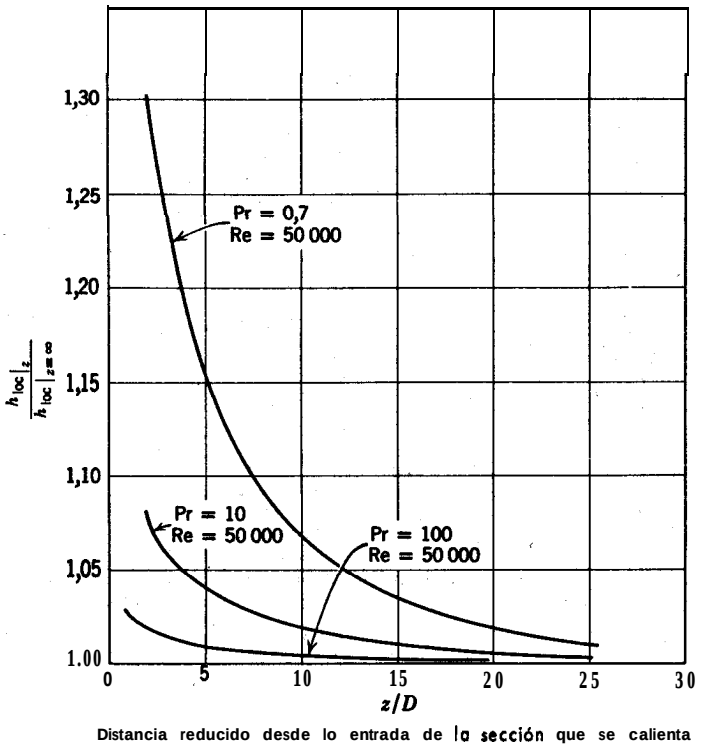


Fig. 13.2-3. Variación estimada de los coeficientes de transmisión de calor en la región térmica de entrada, para flujo desarrollodo y densidad de flujo calorífico constante. [E. M. SPARROW, T. M. HALLMAN y R. SIEGEL, *Appl. Sci. Research* A7, 37-52 (1957).]

La correlación de Deissler puede representarse exactamente para Pr $>$ 200 mediante la fórmula asintótica

$$\frac{h_{loc}}{\hat{C}_p G} = 0{,}0789 \frac{\sqrt{f}}{Pr^{3/4}} \tag{13.2-20}$$

Obsérvese que cuando las propiedades del fluido permanecen constantes, las correlaciones de Colburn y de Sieder y Tate para flujo turbulento, predicen que $h/\hat{C}_p G \doteq (f/2)Pr^{-3/4}$, en la que $h = h_{loc}$ o h_{ln}; esta diferencia de forma es probablemente demasiado grande para poderse explicar por la diferencia de condiciones límite (temperatura de pared constante frente a densidad de flujo de pared constante).

Los datos experimentales indican que la asintota de Deissler de la Ec. 13.2-20 es algo más digna de confianza que las Ecs. 13.2-16 ó 18.

El intervalo de Pr > 0,5 incluye prácticamente todas las substancias a excepción de los *metales fundidos.* Para Pr < 0,5, las predicciones semiteóricas de Martinelli,[13] para flujo turbulento con *densidad de flujo de calor* y propiedades del fluido constantes, pueden adaptarse convenientemente mediante la ecuación,[14]

$$\frac{h_{loc} D}{k} = 7 + 0{,}025(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})^{0.8} \qquad (13.2\text{–}21)$$

Mediante el correspondiente tratamiento semiteórico[15] para *temperatura de pared constante,* se obtiene

$$\frac{h_{loc} D}{k} = 5 + 0{,}025(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})^{0.8} \qquad (13.2\text{-}22)$$

En estas dos ecuaciones h_{loc} es el valor asintótico para valores elevados de z/D. Para bajos números de Prandtl la variación de h_{loc} con z/D y con la distribución de temperatura de pared puede ser considerable, como se puede apreciar en estas ecuaciones y en la Fig. 13.2-3. Los datos experimentales en esta región son poco concordantes y, generalmente, son más bajos de los que se obtienen mediante estas ecuaciones; esto puede ser debido en parte a que el metal fúndido no moje completamente la pared del tubo.

En la Fig. 13.2-4 se resumen las correlaciones de Deissler[11] y Martinelli.[13] El hecho de que las líneas de esta gráfica y de la Fig. 13.2-2 sean curvas no paralelas, indica claramente que para el flujo turbulento Nu y St no son simples funciones potenciales de Re o Pr, salvo para intervalos limitados.

Para el *flujo laminar de un fluido de propiedades constantes* existen amplias soluciones para los perfiles de temperatura y velocidad. En la Fig. 13.2-5 se representan los valores teóricos de Nu_{ln} para diversas condiciones límite. Obsérvese que para el flujo laminar la variación de Nu con L/D y con la distribución de la temperatura de superficie es considerable, lo que contrasta con la menor variación que se encuentra para el flujo turbulento. (Véase Fig. 13.2-1.) Todas las curvas se hacen asintóticas para flujo totalmente desarrollado cuando $L/D \to \infty$; la asintota para T_0 constante es $\mathrm{Nu}_{ln} = 3{,}657$, y para $T_0 - T_b$ constante es $\mathrm{Nu}_{ln} = 48/11 = 4{,}364$. La curva *A,* una extensión de los cálculoss de Graetz, es probablemente la solución más antigua que se conoce de un problema de convección forzada mediante las ecuaciones de variación.

Para pequeños valores de *L,* o elevadas velocidades de flujo, la solución de

---

13 R. C. MARTINELLI, *Trans. ASME, 69,* 947-959 (1947).

14 R. N. LYON, *Chem. Eng. Prog., 47, 75-79* (1951).

15 R. A. SEBAN y T. T. SHIMAZAKI, *Trans. ASME, 73, 803-809* (1951).

Graetz se transforma asintóticamente en una forma más sencilla obtenida por Lévêque.[8] La solución de Lévêque es

$$Nu_{ln} = 1{,}62(\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr}\ D/L)^{1/3}$$
$$= 1{,}75(wC_p/kL)^{1/3} \qquad (13.2\text{–}23)^{16}$$

Esta ecuación es la base de la ecuación semiempírica 13.2— 17. Obsérvese que el coeficiente de la Ec. 13.2-17, determinado empíricamente, no concuerda con la solución exacta para propiedades constantes: la discrepancia se ha atribuido a pequeños efectos de convección libre originados por las elevadas diferencias de temperatura utilizadas en las experiencias.

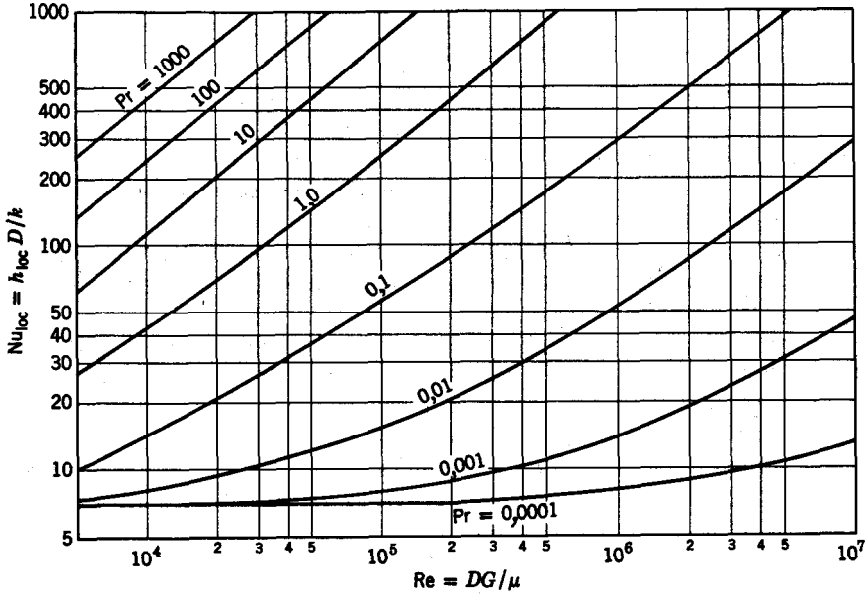


Fig. 13.24. Números de Nusselt para flujo turbulento totalmente desarrollado con densidad de flujo de pared constante. [Los resultados para Pr $\geq$ 1 están tomados de R. G. DEISSLER, *NACA Report* 1210 (1955); los demás están tomados de R. C. MARTINELLI, *Trans. ASME, 69, 947-959* (1947).]

Ejemplo 13.2-1. Diseño de un calentador tubular

Por un tubo largo de 5 cm de diámetro interno circula aire a 21° C con una velocidad de 32 kg hr^{-1}. Para elevar la temperatura del aire hasta 110° C se calienta una parte del tubo, siendo la temperatura de la pared interior 121° C. ¿Qué longitud L es preciso calentar ?

16 El cociente $wC_p/kL = (\pi/4)\mathrm{Re}\ \mathrm{Pr}\ D/L$ que interviene en esta ecuación se denomina número de Graetz, Gz. El coeficiente 1,75 de esta ecuación se cita a veces erróneamente como 2.0.

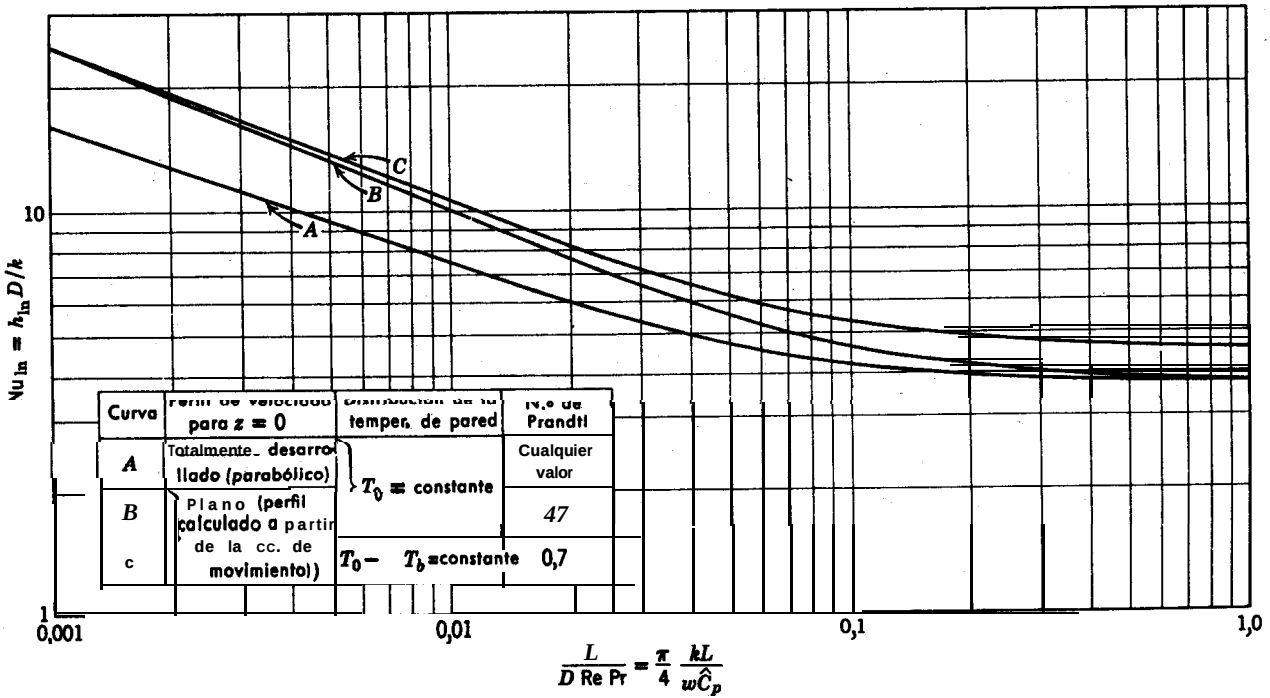


Fig. 13.24. Soluciones teóricas para la transmisión de calor en tubos con flujo laminar para un fluido de propiedades físicas constantes. [(Adaptada de W. M. KAYS y A. L. LONDON, *Compact Heat Exchangers*, McGraw-Hill, Nueva York (1958), p. 50).]

Solución,. Las propiedades físicas del aire son

	A T_b media de 65,5 °C	A T_0 de 121° C
μ, kg, m^{-1} hr^{-1}	0,0729	0,082
$\hat{C}_p$, kcal kg_m^{-1} $°C^{-1}$	0,241	- -
k, kcal hr^{-1} m^{-1} $°C^{-1}$	0,025 1	- -
$Pr = \frac{\hat{C}_p \mu}{k}$	0,700	- -

El número de Reynolds, evaluado a $\frac{1}{2}(T_{b1} + T_{b2}) = \frac{1}{2}(21 + 110) = 65{,}5°$ C, es

$$Re_b = \frac{Dw}{S\mu} = \frac{4w}{\pi D\mu} = \frac{(4)(32)}{(\pi)(0{,}005)(0{,}0729)} = 1{,}12 \times 10^4 \qquad (12.2\text{-}24)$$

De la Fig. 13.2-1 se obtiene

$$\frac{(T_{b2} - T_{b1})}{(T_0 - T_b)_{ln}} \frac{D}{4L} \left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\right)_b^{2/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{-0{,}14} = 0{,}0039 \qquad (13.2\text{-}25)$$

de donde

$$\frac{L}{D} = \frac{1}{4(0{,}0039)} \frac{(T_{b2} - T_{b1})}{(T_0 - T_b)_{ln}} \left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\right)_b^{2/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{-0{,}14}$$

$$= \frac{1}{4(0{,}0039)} \frac{(110 - 21)}{40{,}3} (0{,}700)^{2/3} \left(\frac{0{,}0729}{0{,}082}\right)^{-0{,}14}$$

$$= 113 \qquad (13.2\text{-}26)$$

Por consiguiente, la longitud necesaria de tubería es

$$L = 113\ D = (113)(0{,}05) = 5{,}6\ \text{m} \qquad (13.2\text{-}27)$$

Si Re, hubiese sido mucho menor, habría que estimar L/D antes de efectuar la lectura en la Fig. 13.2− 1, iniciando así un proceso de tanteo.

Obsérvese que en este problema no se ha calculado h. Sin embargo, en problemas más complicados, tales como el intercambio de calor entre fluidos separados por una pared, es preferible evaluar numéricamente h.

§ 13.3 COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA CONVECCIÓN FORZADA ALREDEDOR DE OBJETOS SUMERGIDOS

Otra cuestión industrialmente importante es la transmisión de calor a o desde un objeto en torno al cual circula un fluido. El objeto en cuestión puede ser relativamente sencillo, como una sola esfera o un solo cilindro, o también más complejo, tal como una «bancada de tubos» constituida por una serie de tubos cilíndricos entre los cuales circula una corriente líquida o gaseosa. Aquí se considerarán solamente algunas correlaciones para sistemas sencillos, seleccionadas con el fin de

introducir al lector en el tema, pero en las referencias citadas anteriormente se pueden encontrar muchas otras correlaciones.

En las correlaciones que siguen, el coeficiente de transmisión de calor h_m está definido para la superficie total del objeto sumergido, de acuerdo con la Ec. 13.1-6. Las correlaciones están dadas para una temperatura uniforme T_0 de. la superficie. El subíndice ∞ se refiere a las condiciones de la corriente que se aproxima al objeto, mientras que el subíndice f denota propiedades evaluadas a la denominada «temperatura de película» $T_f = (T_0 + T_\infty)/2$.

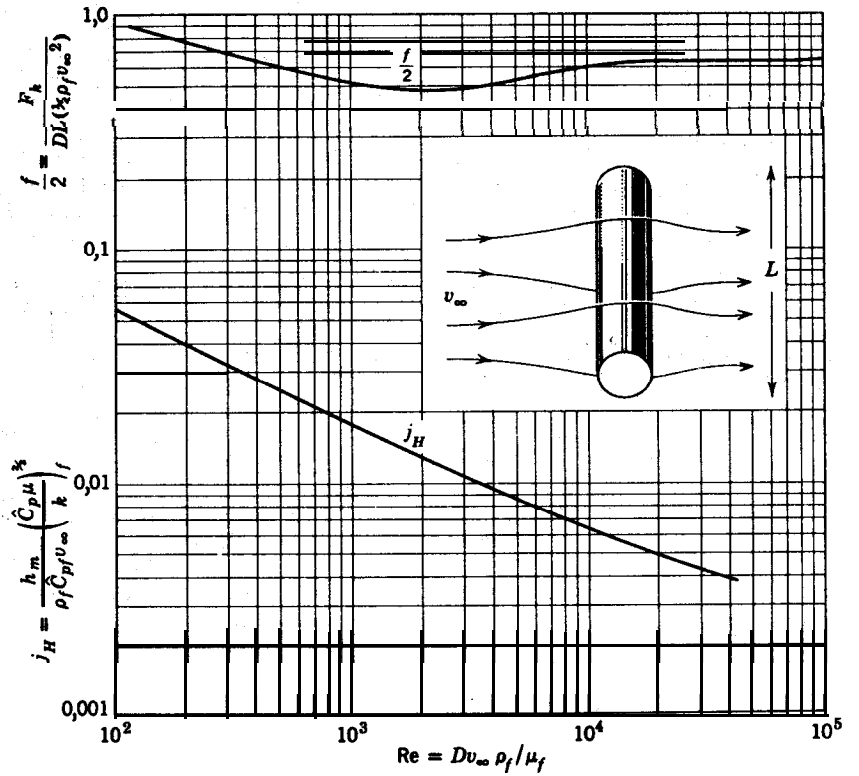


Fig. 13.3-1. Transferencia de calor y cantidad de movimiento entre un cilindro largo y una corriente transversal. [j_H está tomado de T. K. Sherwood y R. L. Pigford. *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), segunda edición, p. 70; $f/2$ está tomado de H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, Pergamon, Nueva York (1955), p. 16.1

En la Fig. 13.3-1 se representa $j_H = Nu\ Re\text{-}l\ Pr^{-1/3}$ frente a Re para un *cilindro* largo cuyo eje es perpendicular a una corriente ilimitada que se aproxima con una velocidad v,. Las propiedades físicas del fluido se evalúan a T_f, siguiendo las indi-

caciones de Douglas y Churchill[1] en un estudio experimental sobre el flujo de gases a través de cilindros con grandes diferencias de temperatura. En la Fig. 13.3-1 se representa también una gráfica de $f/2$ frente a Re, con el fin de poner de manifiesto que para este sistema $j_D < f/2$, como es el caso frecuente en los sistemas de flujo con líneas de corriente curvas; la discrepancia se debe fundamentalmente a la resistencia de forma (véase § 6.3), que no tiene equivalente en transmisión de calor. Estos resultados son útiles en relación con la anemometría del alambre caliente (véase problema 13.5) y la transmisión de calor a bancadas de tubos paralelos.

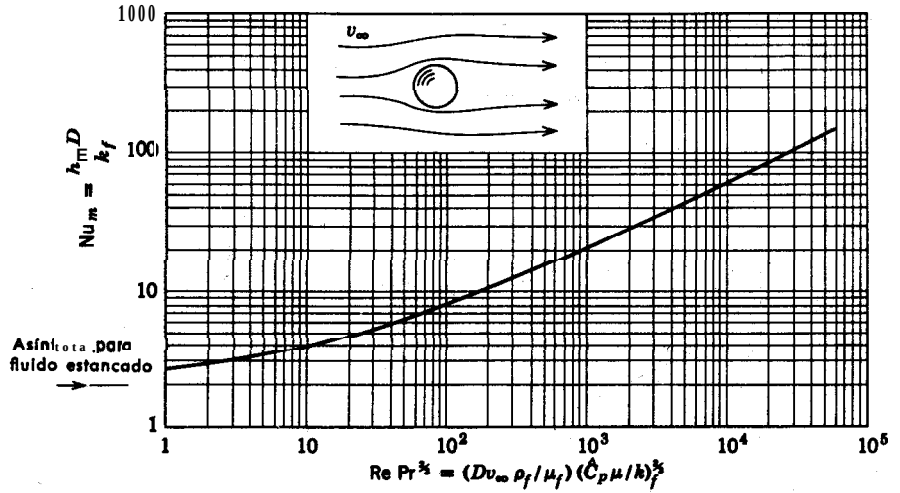


Fig. 13.3-2. Transmisión de calor por convección forzada desde una esfera aislada. [W. E. RANZ y W. R. MARSHALL, Jr., *Chem. Eng. Prog., 48,* 141-146, 173-180 (1952).]

En la Fig. 13.3−2 se representa Nu en función de Re y Pr para la superficie total de una *esfera* situada en el interior de un fluido infinito. La relación representada es[2]

$$\frac{h_m D}{k_f} = 2{,}0 + 0{,}60\left(\frac{Dv_\infty \rho_f}{\mu_f}\right)^{1/2}\left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\right)_f^{1/3} \qquad (13.3\text{-}1)$$

Esta ecuación predice que para un fluido en reposo Nu = 2; esta asíntota se ha deducido teóricamente (véase problema 9.H) y se ha confirmado por la experiencia

[1] **W. J. M. DOUGLAS y S. W. CHURCHILL,** *Chem. Eng. Prog. Symposium Series núm.* **18, 52,** *23-28* **(1956).**

[2] **W. E. RANZ y W. R. MARSHALL, JR.,** *Chem. Eng. Prog., 48,* **141-146, 173-180 (1952). N. FRÖSSLING,** *Gerlands Beitr. Geophys., 52,* **170 (1938), obtuvo por primera vez una correlación de esta forma, con un coeficiente para el ultimo termino de 0,552 en vez de 0,60. Por analogía con los resultados para cilindros, las propiedades físicas de la Ec. 13.3-1 se evalúan a la temperatura T_f, pero esta elección todavía no se ha comprobado experimentalmente.**

para bajos números de Reynolds y Grashof (véase § 13.5). Este resultado encuentra aplicación en numerosos procesos en los que intervienen pulverizadores de gotas o burbujas.

En la Fig. 13.3-3 se representan los resultados obtenidos para el flujo tangencial de un medio fluido infinito sobre una ***lámina plana*** seminfinita e isotérmica. El sistema de flujo y sus coordenadas se representan en la Fig. 11.4— 1. En este sistema de flujo se cumple muy bien la analogía de Colburn entre transmisión de calor y fricción de fluidos (véase Ec. 13.2— 18), debido a que la magnitud $p + \rho gh$ es esencialmente constante para todo el sistema y no existe resistencia de forma. Las sencillas analogías que resultan cuando $p + \rho gh$ es igual a una constante se estudian en § 19.3. Los coeficientes h_{loc}, y f_{loc}, para un punto cualquiera situado sobre la superficie de la lámina, se definen de la siguiente forma:

$$h_{loc} = \frac{q_0}{T_0 - T_\infty} \tag{13.3-2}$$

$$f_{loc} = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho_f v_\infty^2} \tag{13.3-3}$$

en las que q_0 y τ_0 son los valores locales de q_y y $|\tau_{yx}|$ en la superficie de la lámina.

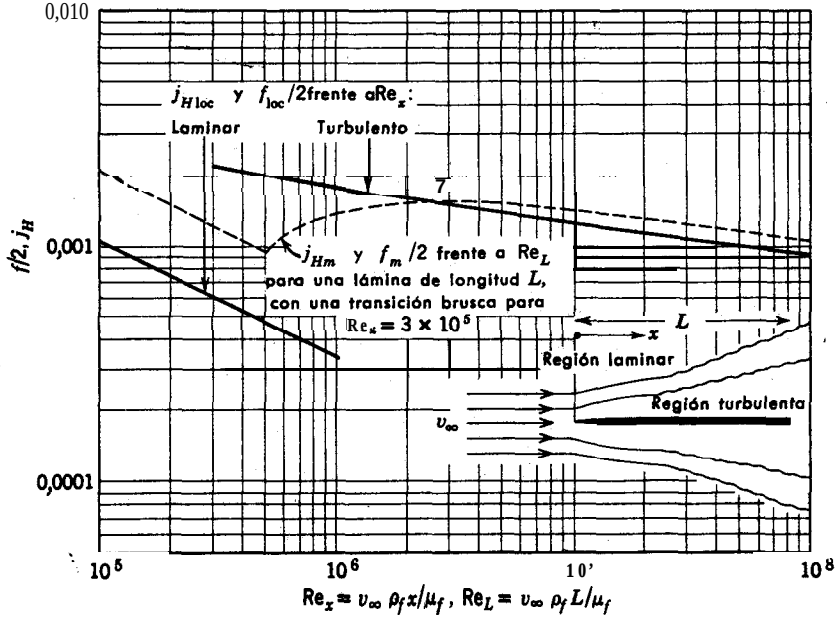


Fig. 13.3-3. Coeficientes de transmisión de calor para flujo tangencial en una lámina plana lisa. [Adaptada de H. SCHLICTING, *Boundary-Layer Theory*. Pergamon Press, Nueva York (1955), pp. 438-439).]

Para la región laminar, que existe generalmente en las cercanías del borde de ataque de la lamina, se cumple la siguiente expresión deducida teóricamente:

$$j_{H\text{loc}} \doteq \frac{f_{\text{loc}}}{2} \tag{13.3-4}$$

$$\frac{f_{\text{loc}}}{2} = 0{,}332\left(\frac{v_\infty \rho_f x}{\mu_f}\right)^{-1/2} \tag{13.3-5}$$

Estas ecuaciones se han deducido originalmente para fluidos de propiedades físicas constantes;3 sin embargo, en la práctica se utilizan, generalmente, en función de las propiedades del fluido a la temperatura T_f, lo que conduce a muy buenos resultados para gases.4 La analogía de la Ec. 13.3-4 se cumple con un error máximo del 2 por ciento para Pr > 0,6, pero para números de Prandtl más bajos resulta inexacta Para flujo altamente turbulento, la analogía se cumple bastante bien cuando se halla f_{loc} mediante la curva empírica de la Fig. 13.3-3. La transición entre flujo laminar y turbulento es parecida a la que se ha representado para tubos en la Fig. 13.2— 1, pero los limites de la región de transición son mas difíciles de predecir. Para el flujo isotérmico en laminas planas, lisas y afiladas, la transición comienza, generalmente, para un número de Reynolds longitudinal, Re, = $v_\infty x \rho_f / \mu_f$, que va de 100 000 a 300 000, y es casi completa para un número de Reynolds superior en un 50 por ciento. En general, resulta difícil predecir velocidades de transmisión de calor desde objetos sumergidos para Re > 10^5 debido a la incierta localización de la región de transición. Debe de evitarse la extrapolación de las correlaciones para esferas y cilindros en esta región, debido a la brusca variación del comportamiento de flujo que tiene lugar para Re $\doteq 10^5$. (Véase Fig. 6.3-1.)

§ 13.4 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA CONVECCIÓN FORZADA A TRAVÉS DE LECHOS DE RELLENO

Los coeficientes de transmisión de calor entre un sólido y un fluido en un lecho de relleno, se definen generalmente como valores «locales» representativos de una sección transversal del lecho, utilizando la siguiente modificación de la Ec. 13.1-5:

$$dQ = h_{\text{loc}}(aS\,dz)(T_0 - T_b) \tag{13.4-1}$$

en la que $S\,dz$ es el volumen de lecho (sólido más fluido) comprendido entre dos secciones separadas entre sí una distancia dz en la dirección de flujo, y a es el área de la superficie de las partículas sólidas por unidad de volumen de lecho.

---

3 El resultado correspondiente a $f/2$, para el caso de propiedades del fluido constantes, ha sido deducido por H. BLASIUS, *Z. Math. Phys*, 56, 1 (1908); la evaluación de j_H para propiedades del fluido constantes proviene de los resultados de E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.*, 1, 115-121 (1921).

4E. R. G. ECKERT, *Trans. ASME*, 56, 1273-1283 (1956).

El análisis de una enorme cantidad de datos experimentales sobre transferencia de calor y materia en lechos de relleno, ha conducido a la siguiente correlación empírica:[1]

$$j_H = 0{,}91\ \mathrm{Re}^{-0{,}51}\ \psi \qquad (\mathrm{Re} < 50) \tag{13.4-2}$$

$$j_H = 0{,}61\ \mathrm{Re}^{-0{,}41}\ \psi \qquad (\mathrm{Re} > 50) \tag{13.4-3}$$

En estas ecuaciones, el factor j_H y el numero de Reynolds están definidos por

$$j_H = \frac{h_{loc}}{\hat{C}_{pb} G_0} \left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)_f^{2/3} \tag{13.4-4}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{G_0}{a \mu_f \psi} \tag{13.4-5}$$

El subíndice f indica que las propiedades están evaluadas a la «temperatura de película» $T_f = \frac{1}{2}(T_0 + Tb)$, y $G_0 = w/S$, es la velocidad másica superficial (véase § 6.4). El término ψ es un coeficiente empírico que depende de la forma de la partícula. En la Tabla 13.4-1 se dan algunos valores de ψ. Esta correlación es útil

TABLA 13.4-1

FACTORES DE FORMA DE PARTÍCULAS PARA LAS CORRELACIONES DE LECHOS DE RELLENO[a]

Forma de la partícula	ψ
Esferas	1,00
Cilindros	0,91
Laminillas	0,86
Anillos de Raschig	0,79
Anillos tabicados	0,67
Monturas de Berl	0,80

[a] B. GAMSON, Chem. *Eng. Progr.*, 47, 19-28 (1951)

para el diseño de sistemas de lecho fijo tales como secaderos, reactores catalíticos y acumuladores de calor con un material de relleno.

§ 13.5 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA CONVECCIÓN LIBRE

Al comenzar la discusión de la convección forzada en § 13.2, se ha determinado la dependencia funcional del Nu, mediante el análisis de las ecuaciones de variación

[1] F. YOSHIDA, *comunicación privada* (diciembre de 1959). Véase también 0. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, *CPP Charts*, Wiley, Nueva York (1960). Para obtener h y j_H en estas referencias bibliográficas hay que dividir sus valores por ψ.

y de las condiciones límite para el problema en cuestión. Para la convección libre se puede hacer un análisis semejante, excepto que la ecuación de movimiento ha de expresarse para ρ variable, con lo que aparece un termino de «fuerza de flotación». (Véanse §§ 10.3, 10.6 y ejemplo 10.5—4.) Mediante un análisis análogo al efectuado para obtener la Ec. 13.2-10, se encuentra que, para un objeto sumergido en una cantidad infinita de fluido, el número de Nusselt para la transmisión de calor por convección libre depende de

$$\mathrm{Nu}_m = \mathrm{Nu}(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}) \tag{13.5-1}$$

en la que Nu_m está basado en el coeficiente de transmisión de calor h_m tomado para la superficie total del objeto sumergido. Puede haber, desde luego, otras relaciones adimensionales para describir la geometría del sistema. Las correlaciones que se dan a continuación son útiles para estimar las perdidas de calor en aparatos e instalaciones ingenieriles. Se supone en todos los casos que la temperatura de la superficie T_0, así como la del fluido lejos de dicha superficie T_∞, son constantes. La diferencia característica de temperatura ΔT es $|T_0 - T_\infty|$. Las propiedades del fluido se evalúan

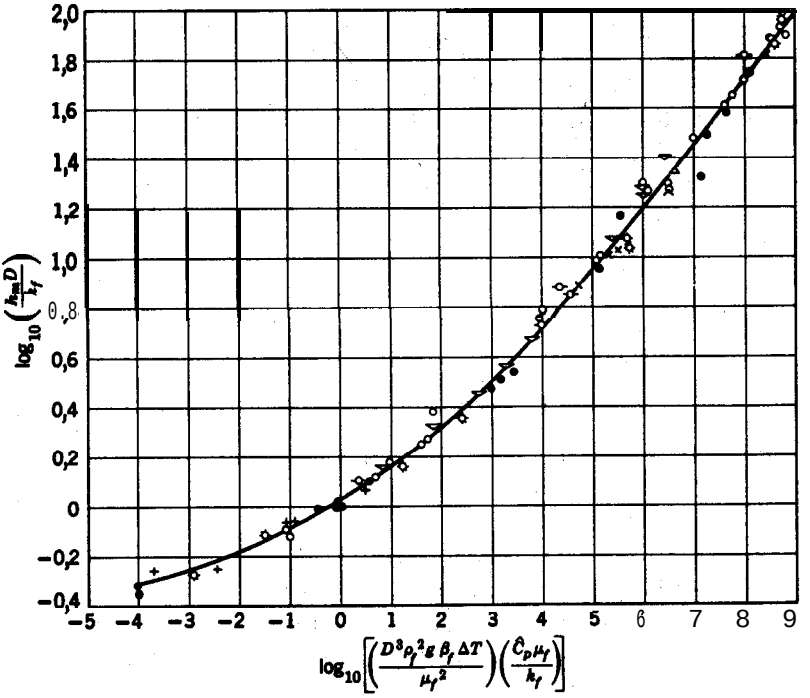


Fig. 13.5-1. Convección libre a diversos fluidos desde largos tubos horizontales. [W. H. McAdams, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, p. 176].

a $(T_0 + T_\infty)/2$. Para los gases ideales, la magnitud β que interviene en el número de Grashof es justamente $1/T_f$.

Para ***una sola esfera*** de diámetro D, sumergida en una gran masa de fluido se ha propuesto la relación **semiempírica**[1]

$$\frac{h_m D}{k} = 2 + 0{,}60\left(\frac{D^3\rho^2 g\beta\,\Delta T}{\mu^2}\right)^{1/4}\left(\frac{\hat{C}_p\mu}{k}\right)^{1/3} \qquad (13.5\text{-}2)$$

que concuerda satisfactoriamente con los datos experimentales para $Gr^{1/4}\,Pr^{1/3} < 200$. Obsérvese que esta ecuación conduce a $Nu_m = 2$ cuando el fluido está en reposo, lo mismo que la Ec. 13.3-1, en la que se ha 'despreciado la convección libre.

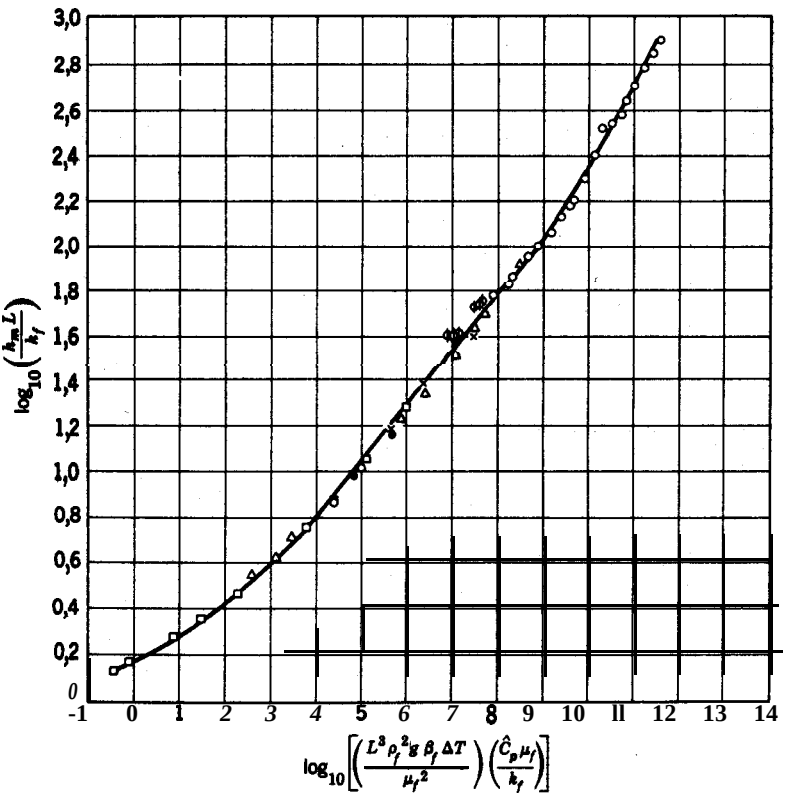


Fig. 13.5-2. Convección libre desde láminas verticales, basada en datos para el aire. **[W. H. McAdams, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954). tercera edición, p. 173.1**

---

1 **W. E. Ranz y W. R. Marshall, JR., *Chem. Eng. Prog.*, 48, 141-146, 173-180 (1952).**

Para *cilindros horizontales* largos, sumergidos en una cantidad infinita de fluido, se recomienda2 la Fig. 13.5— 1. Para Gr Pr > 10^4, esta gráfica está representada por la ecuación

$$\mathrm{Nu}_m = 0{,}525(\mathrm{Gr}\ \mathrm{Pr})^{\prime\prime} \tag{13.5-3}$$

Esta correlación está basada en una gran cantidad de datos para gases y líquidos con Pr $> 0{,}6$.

En la Fig. 13.5-2 se correlacionan2 los datos experimentales obtenidos con ***láminas verticales*** calientes de pequeño espesor y longitud variable ***L,*** suspendidas en aire. Téngase en cuenta que en este caso los números de Nusselt y Grashof están basados en la longitud característica ***L.*** La parte recta de la curva puede expresarse muy aproximadamente mediante la ecuación

$$\mathrm{Nu}_m = 0{,}59(\mathrm{Gr}\ \mathrm{Pr})^{\prime\prime} \qquad 10^4 < \mathrm{Gr}\ \mathrm{Pr} < 10^9 \tag{13.511}$$

que concuerda satisfactoriamente con los resultados de la teoría de capa límite citados en el ejemplo 10.5-4. Para Gr Pr > 10^9, el flujo es turbulento.

Ejempio 13.5-1. Pérdida de calor por convección libre desde una tubería horizonal

Estimar **la velocidad de perdida de calor por convección libre en una unidad de longitud de una larga tubería horizontal de 15 cm de diámetro externo, si la temperatura de** la superficie es de **38°** C y el aire que la rodea está a **1** atm y **27°** C.

Solución. Las propiedades del aire a 1 atm y una temperatura de película de 32,5° C (305,6° K) son

$$\mu = 0{,}0190\ \mathrm{cp} = 0{,}0684\ \mathrm{kg_m\,m^{-1}\,hr^{-1}}$$
$$\rho = 1{,}58\ \mathrm{kg_m\,m^{-3}}$$
$$C_p = 0{,}241\ \mathrm{kcal\ kg_m^{-1}\,{}^\circ K^{-1}}$$
$$k = 0{,}0226\ \mathrm{kcal\ hr^{-1}\ m^{-1}\,{}^\circ K^{-1}}$$
$$\beta = 1/T_f = 1/305{,}6^\circ\ \mathrm{K^{-1}}$$

Los demás valores que se necesitan son $D = 0{,}15$ m, $\Delta T = 11^\circ$ K y g $= 1{,}27 \times 10^8$ m **hr^{-2}.** A partir de estos datos se obtiene

$$\mathrm{Gr\ Pr} = \left(\frac{(0{,}15)^3(1{,}158)^2(1{,}27 \times 10^8)(11/305{,}6)}{0{,}0684}\right)\left(\frac{0{,}241}{0{,}0226}\right)$$
$$= 3{,}2 \times 10^6 \tag{13.5-5}$$

A partir de la Fig. 13.5-1 o de la Ec. 13.5-3 se obtiene $\mathrm{Nu}_m = 22{,}2$; por lo tanto

$$h_m = \mathrm{Nu}_m\, k/D = \frac{(22{,}2)(0{,}0226)}{0{,}15} = 3{,}3\ \mathrm{kcal\ hr^{-1}\ m^{-2}\,{}^\circ C^{-1}} \tag{13.5-6}$$

---

2 W. H. MCADAMS, *Heat Transmission,* McGraw-Hill, Nueva York (1954). tercera edición, pp. 172-176.

Por consiguiente, la velocidad de pérdida de calor por unidad de longitud de tubería es

$$Q/L = h_m A \frac{\Delta T}{L} = h_m \pi D \Delta T$$

$$= (3,3)\ (\pi)(0,15)\ (11) = 17 \text{ kcal hr}^{-1} \text{ m}^{-1} \qquad (13.5\text{-}7)$$

Esta pérdida de calor corresponde exclusivamente a la convección; la radiación se considera en el ejemplo 14.5-2.

§ 13.6 COEFICIENTES DE TRANSMISIÓN DE CALOR PARA CONDENSACIÓN DE VAPORES PUROS SOBRE SUPERFICIES SÓLIDAS

La condensación de un vapor puro sobre una superficie solida es un problema especialmente complejo debido a que interviene el flujo de dos fases fluidas: el vapor y el condensado. La condensación tiene lugar industrialmente en numerosos tipos de aparatos. Para mayor sencillez, consideraremos aquí solamente los casos frecuentes de condensación de un vapor que se mueve lentamente sobre la superficie externa de tubos horizontales o verticales, o bien de paredes verticales planas.

En la Fig. 13.6— 1 se representa esquemáticamente el proceso de condensación sobre una pared vertical. El vapor fluye sobre la superficie de condensación y se mueve hacia ella en virtud del pequeño gradiente de presión existente en las proxi-

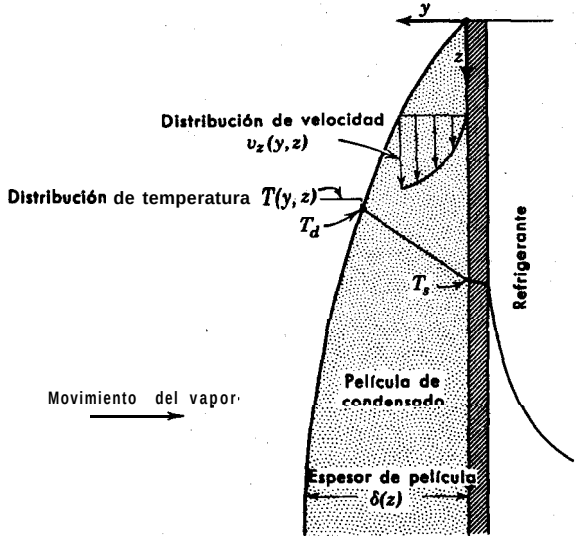


Fig. 13.6-1. Condensación en película sobre una superficie vertical (la discontinuidad de temperatura interfacial está exagerada).

midades de la superficie del líquido.[1] Algunas moléculas de la fase de vapor chocan contra la superficie del líquido y rebotan, mientras que otras penetran a través de dicha superficie y ceden su calor latente de condensación. El calor así liberado tiene que fluir a través del condensado hasta alcanzar la pared, y de allí al fluido de refrigeración situado al otro lado de la pared. Al mismo tiempo, el condensado se elimina de la pared fluyendo por gravedad.

El condensado situado sobre la pared es normalmente la única resistencia importante que se opone a la transmisión de calor en el lado de la pared en el que tiene lugar la condensación: Si la superficie sólida está limpia, el condensado forma generalmente una película continua sobre la superficie, pero si existen trazas de ciertas impurezas, como por ejemplo ácidos grasos en un condensador de vapor de agua, la condensación se produce en gotas. La «condensación en gotas»[2] da lugar a velocidades de transmisión de calor mucho más áltas que la «condensación en películas», pero es difícil de mantener, de forma que en el diseño de condensadores se considera en la práctica que la condensación se produce en película. Las correlaciones que se dan a continuación son aplicables solamente para condensación en película.

La definición habitual de h_m, para la condensación de un vapor puro sobre una superficie sólida de área A y temperatura constante T_0, es

$$Q = h_m A(T_d - T_0) \qquad (13.6\text{–}1)$$

en la que Q es la velocidad de flujo de calor que penetra a través de la superficie del sólido, y T_d *es* la ***temperatura de rocío*** del vapor que llega a la superficie del tubo, es decir, la temperatura a la que condensa el vapor cuando se enfría lentamente a la presión existente. Esta temperatura es esencialmente la del líquido en la interfase líquido-vapor; por consiguiente, h_m puede considerarse como el coeficiente de transmisión de calor para la película del líquido.

Se han deducidos expresiones de h_m para flujo ***laminar sin ondulaciones*** del condensado, resolviendo de forma aproximada las ecuaciones de movimiento y energía para una película descendente de líquido. (Véase problema 13.N.) El resultado de Nusselt para la condensación en película sobre un ***tubo horizontal*** de diámetro D, longitud L, y temperatura constante de la superficie T_0, puede expresarse así

$$h_m = 0{,}954\left(\frac{k_f^3 \rho_f^2 g L}{\mu_f w}\right)^{1/4} \qquad (13.62)$$

---

1 Téngase en cuenta que en este caso existen en la interfase variaciones de presión y temperatura que son pequeñas pero muy bruscas. Estas discontinuidades son esenciales en los procesos de condensación, pero su valor es generalmente despreciable en los cálculos ingenieriles para fluidos puros. Para mezclas, pueden en cambio ser más importantes. Véase R. W. SCHRAGE, *Interphase Mass Transfer*, Columbia University Press (1953).

2 La condensación en gotas se estudia con detalle en MCADAMS, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, pp. 347-351 y H. GRÖBER, S. ERK y U. GRIGULL, *Wärmeübertragung*, Springer, Berlín (1955). tercera edición, pp. 303-310.

3 W. NUSSELT. Z. Ver. *dtsch.* Ing., 60, 541-546, 569-575 (1916).

en la que w/L es la velocidad másica de condensación por unidad de longitud de tubo. Aplicando un balance de energía a la película de condensado, la Ec. 13.6-2 puede expresarse, para diferencias de temperatura moderadas, mediante la ecuación

$$h_m = 0{,}725\left(\frac{k_f^3\rho_f^2 g\,\Delta\hat{H}_{vap}}{\mu_f D(T_s - T_0)}\right)^{1/4} \tag{13.63}$$

Experimentalmente se ha comprobado que las Eos. 13.6-2 y 3 se cumplen con una exactitud de $\pm$ 10 por ciento para tubos horizontales únicos. Parece también4 que se cumple satisfactoriamente para bancadas de tubos horizontales, a pesar de la complicación que supone el goteo de tubo a tubo.

Los resultados teóricos correspondientes a las Ecs. 13.6-2 y 3 para la condensación en película sobre ***tubos o paredes verticales,3*** son:

$$h_m = \frac{4}{3}\left(\frac{k_f^3\rho_f^2 g}{3\mu_f\Gamma}\right)^{1/4} \tag{13.6-4}$$

Y

$$h_m = \frac{3}{4}\sqrt{2}\left(\frac{k_f^3\rho_f^2 g\,\Delta\hat{H}_{vap}}{\mu_f L(T_s - T_0)}\right)^{1/4} \tag{13.6-5}$$

La magnitud Γ de la Ec. 13.6-4 es la velocidad total de flujo de condensado en el fondo de la superficie de condensación por unidad de anchura de dicha superficie; para un tubo vertical, $\Gamma = w/\pi D$, siendo w la velocidad másica total de condensación en el tubo. Para tubos verticales ***cortos*** (L < 15 cm), los valores experimentales de h_m concuerdan satisfactoriamente con la teoría, pero para tubos verticales ***largos*** (L > 2,4 m) los valores experimentales superan a los teóricos, para un determinado ΔT, hasta un 70 por ciento. La discrepancia se atribuye a que las ondulaciones son de mucho mayor amplitud en tubos verticales largos.5

Vamos a considerar ahora las expresiones empíricas para el flujo ***turbulento*** de condensado. Para ***tubos o paredes verticales,*** el flujo turbulento comienza a un numero de Reynolds Re = Γ/μ_f del orden de 350. Para números de Reynolds superiores a este se ha propuesto la siguiente fórmula empírica:6

$$h_m = 0{,}003\left(\frac{k_f^3\rho_f^2 g(T_s - T_0)L}{\mu_f^3\,\Delta\hat{H}_{vap}}\right)^{1/4} \tag{13.66}$$

Para un ΔT pequeño, la Ec. 13.6-6 es equivalente a la fórmula

$$h_m = 0{,}021\left(\frac{k_f^3\rho_f^2 g\Gamma}{\mu_f^3}\right)^{1/3} \tag{13.67}$$

---

4 B. E. SHORT y H. E. BROWN, *Proc. General Disc. Heat Transfer*, Londres, pp. 27-31 (1951).
5 W. H. MCADAMS, *op. cit.*, p. 333.
6 U. GRIGULL, *Forsch. Ing. Wes.*, 13, 49-57 (1942); *Z. Ver. dtsch. Ing., 86,* 444-445 (1942).

Para facilitar el cálculo y con el fin de indicar el grado de concordancia con los datos experimentales, se resumen en la Fig. 13.6—2 las Ecs. 13.6-4, 5, 6 y 7. Podría obtenerse una concordancia algo. mejor utilizando en el intervalo turbulento una familia de líneas con el fin de representar el efecto del número de Prandtl; sin embargo, a la vista de la fluctuación de los datos, una sola línea es suficiente.

Es muy difícil obtener flujo turbulento de condensado en tubos horizontales, a menos que se utilicen diámetros muy grandes o diferencias de temperatura elevadas. Las Ecs. 13.6-2 y 3 se consideran satisfactorias hasta un número de Reynolds de transición estimado, Re = $w_T/L\mu_f$, del orden de 1000, siendo w_T el flujo *total* de condensado que abandona un determinado tubo, incluyendo el condensado procedente de los tubos superiores.[7]

El proceso inverso, vaporización de un líquido puro, es considerablemente más complicado que el de condensación. Aquí no se estudia la transmisión de calor a líquidos en ebullición, limitándonos a indicar algunas citas sobre este campo de investigación que se está desarrollando rápidamente.[8,9]

Ejemplo 13.6— 1. Condensación de vapor de agua sobre una superficie vertical

A un líquido en ebullición que circula por un tubo vertical se le comunica calor mediante la condensación de vapor de agua en el exterior del tubo. La parte de tubo que se calienta ea de 3 m de altura y 5 cm de diámetro externo. Si se utiliza vapor de agua saturado, ¿cuál sera la temperatura necesaria del vapor para transmitir 23 000 kcal hr^{-1} al tubo, cuya temperatura de la superficie es de 93° C? Supóngase que la condensación se produce en película.

Solución. Las propiedades del fluido dependen de la temperatura T_d que es desconocida. Suponiendo que T_d = 93° C, tendremos

$$\Delta\hat{H}_{vap} = 543 \text{ kcal kg}_m^{-1}$$
$$k_f = 0{,}585 \text{ kcal hr}^{-1}\text{ m}^{-1}\text{ °C-r}$$
$$\rho_f = 963 \text{ kg}_m\text{ m}^{-3}$$
$$\mu_f = 1{,}10 \text{ kg, m}^{-1}\text{ hr}^{-1}$$

Aplicando un balance de energía sobre el tubo, suponiendo que el vapor cede exclusivamente el calor latente (lo que implica que $T_d = T_0 = 93°$ C), se obtiene,

$$Q = w\,\Delta\hat{H}_{vap} = \pi D\Gamma\,\Delta\hat{H}_{vap} \tag{13.68}$$

en la que Q es el flujo de calor que entra a través de la pared del tubo. El número de Reynolds de la película es

$$\frac{\Gamma}{\mu} = \frac{0}{\pi D\mu\,\Delta\hat{H}_{vap}} = \frac{23.000}{\pi\,(0{,}95)\,(1{,}10)\,(543)} = 245 \tag{13.6-9}$$

[7] W. H. MCADAMS, *op. cit.* p. 338-339.

[8] W. H. MCADAMS, *op. cit.*, capítulo 14.

[9] J. J. WESTWATER, *Advances in Chemical Engineering*, Academic Press, Nueva York, vol. I, capítulo 1 (1956); vol. II, capítulo I (1958).

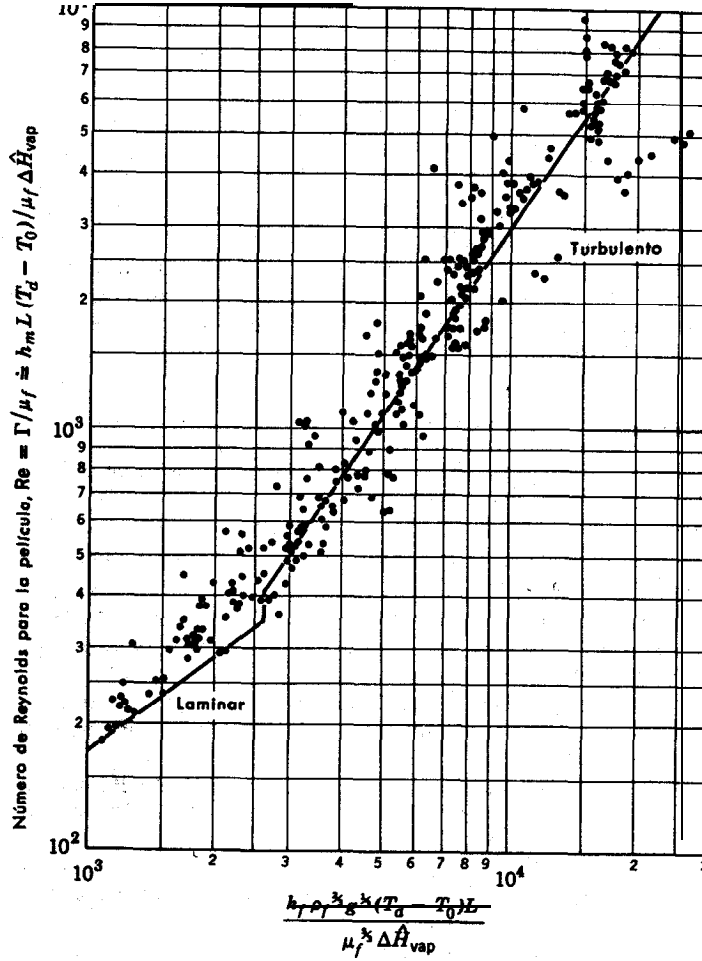


Fig. 13.6-2. Correlación de datos de transmisión de calor para la **condensación** en película de vapores puros en **superficies** verticales. [U. GRIGULL, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung,* Springer, Berlín **(1955),** tercera edición, p. 296.1

Para este valor de la ordenada se encuentra en la Fig. 13.6-2 que el flujo es laminar.

Si bien se puede aplicar la Ec. 13.6-4, resulta **más** conveniente utilizar la **línea** de la Fig. 13.6-2 basada en esta ecuación, que da

$$\frac{k_f \rho_f^{3/4} g^{1/4} (T_d - T_0) L}{\mu_f^{3/4} \Delta H_{vap}} = 1600 \qquad (13.6\text{-}10)$$

de donde

$$T_d - T_0 = 1600 \frac{\mu_f^{5/3} \Delta \hat{H}_{vap}}{k_f \rho_f^{3/3} g^{1/3} L}$$

$$= \frac{1600}{(0{,}585)\ (963)^{2/3}\ (1{,}27 \times 10^8)^{1/3}\ (3)} = 12^\circ \text{ C} \qquad (13.6\text{-}11)$$

Por tanto, la primera aproximación para la temperatura del vapor es 105° C. Evaluando las propiedades físicas de acuerdo con este resultado, que ya es bastante próximo, se obtiene como segunda aproximación $T_d = 104^\circ$ C. De acuerdo con la Fig. 13.6-2 resulta evidente que este resultado representa un límite superior; si se producen ondulaciones, la caída de temperatura a través de la película de condensado puede ser incluso la mitad del valor calculado aquí.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Discutir las ventajas relativas de los cuatro tipos de coeficientes de transmisión de calor, para el flujo en conducciones, que se definen en § 1.3.

2. ¿ Por que es conveniente definir ΔT en función de T_s para el caso de conducciones cerradas?

3. ¿Qué es el coeficiente global de transmisión de calor U? Describir un caso real en el que debería de utiliirse dicho coeficiente?

4. ¿Cuáles son las dimensiones de los coeficientes de transmisión de calor U y Ir?

5. ¿Cuál es el significado físico de los números de Nusselt Nu_1, Nu_{ln} y Nu_{loc}? Explíquese esto en función de los perfiles de temperatura.

6. Dibujar perfiles de temperatura para flujo turbulento en un tubo, que darían lugar a números de Nusselt locales del orden de 1000,100 y 10. ¿ Qué perfil corresponde al mayor número de Prandtl y al mayor número de Reynolds?

7. ¿Cuál es el significado físico del número de Stanton, St = Nu/Re Pr, para el calentamiento de un fluido en una porción de tubería de longitud L y diámetro D? Interpretar el significado del número de Stanton local en estas condiciones.

8. En la Fig. 13.2-3 se observa que el número de Nusselt disminuye al aumentar los valores de L/D. Explicar este comportamiento en función de los procesos físicos que tienen lugar cerca de la entrada de la sección de intercambio de calor.

9. Citar algunos libros y referencias bibliográficas que deben consultarse para obtener una detallada información sobre correlaciones del coeficiente de transmisión de calor.

10. ¿ Qué ayuda proporciona el análisis dimensional para el planteamiento y análisis de experimentos de transmisión de calor?

11. ¿ Qué grupos adimensionales deben de intervenir en los problemas de transmisión de calor por convección forzada, convección libre y convección libre y forzada simultáneas?

12. ¿Qué otro grupo 0 grupos adiionales es de esperar que intervengan en las correlaciones de transmisión de calor para alta velocidad de flujo de un líquido y alta velocidad de flujo de un gas compresible7

13. La mayor parte de las correlaciones de los coeficiente de transmisión de calor no tienen en cuenta la variación de la densidad de flujo local de calor con la distribución de temperatura en la superficie. Tomar un ejemplo de este capítulo con el fin de ilustrar el efecto cuantitativo de distintas condiciones térmicas límite sobre el coeficiente local de transmisión de calor.

14. ¿Qué es el factor j_H de Colburn ? ¿En qué condiciones existe una útil relación entre j_H y f? ¿La justificación de esta ecuación es teórica o empírica?

15. ¿Por qué no es conveniente utilizar j_H para la convección forzada alrededor de una esfera? Ilústrese mediante una representación gráfica de j_H frente al número de, Reynolds.

16. Describir dos métodos que se han utilizado en las correlaciones de transmisión de calor para considerar la variación de las propiedades físicas con la temperatura.

17. ¿Qué tienen en común la convección libre y la condensación?

18. Demostrar cómo puede obtenerse la 13.6- 5 a partir de la Ec. 13.6-4.

19. ¿En qué posición (horizontal o vertical) deberá colocarse un condensador tubular de 2,5 cm de diámetro y 250 cm de longitud con el fin de que condense la máxima cantidad de vapor de agua para una determinada temperatura de superficie? ¿Cuáles son las cantidades relativas que condensan en ambas posiciones?

20. ¿Para que fluidos no pueden utilizarse las gráficas de Sieder y Tate y de Deissler? ¿Qué correlaciones existen para esos fluidos?

21. Demostrar que los tres términos de la ordenada de la Fig. 13.2— 1 son equivalentes.

PROBLEMAS

13.A$_1$ Coeficientes medios de transmisión de calor

En el cambiador de calor de la Fig. 13.A se calientan 4500 kg por hora de un aceite, cuyo calor especifico es 0,60, desde 40° C hasta 95" C. El aceite circula 'por el interior de los tubos, que son de cobre con un diámetro exterior de 2,5 cm y un espesor de pared de 0,16 cm. La lon-

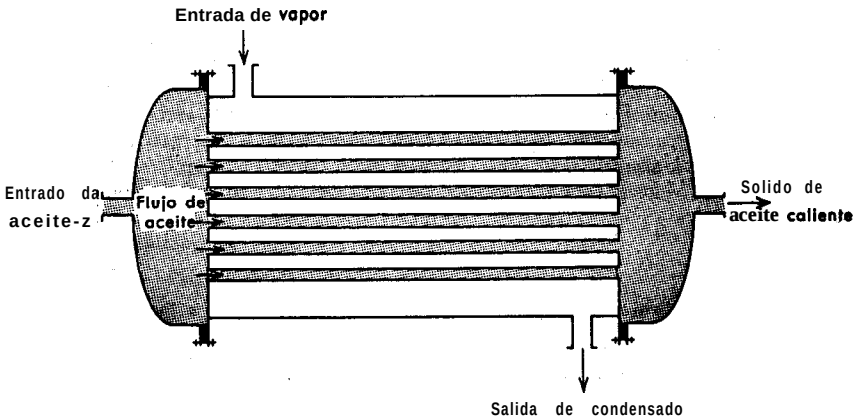


Fig. 13.A. Cambiador de calor de «carcasa y tubos» de simple paso.

gitud total de los tubos es de 90 m. El calor necesario se comunica mediante la condensación en el exterior de los tubos de vapor de agua saturado a 1,02 atm.

Calcular h_1, h_a y h_{ln} para el aceite, suponiendo que la superficie interior de los tubos esta a la temperatura de saturación del vapor de agua, 100,6° C.

Respuestas: 370, 678, 972 kcal hr^{-1} m^{-2} $°C^{-1}$.

13.B_1 Transmisión de calor para el flujo laminar en un tubo

A un tubo de cobre de 2.5 cm de diámetro interno y 6 m de longitud llegan 45 kg por hora de un aceite a 38" C. Debido a la condensación de vapor de agua sobre la superficie exterior del tubo, la superficie interior del mismo se mantiene a la temperatura de 102" C. Puede admitirse que el flujo esta totalmente desarrollado en toda la longitud del tubo y las propiedades físicas del aceite pueden considerarse constantes e iguales a: $\hat{C}_p = 0.49$ kcal kg^{-1} "C-t, $\rho = 881$ kg m^{-3}, $\mu = 0{,}587$ cp., $k = 0{,}123$ kcal hr^{-1} m^{-1} "C-r.

a. Calcular el número de Reynolds.
b. Calcular el número de Prandtl.
c. Calcular la temperatura del aceite a la salida

Respuestas: a. 1085
b. 8,42
c. 68.5" c

13.C_1 Efecto de la velocidad de flujo sobre la temperatura de salida de un cambiador de calor

a. Repetir los apartados *(a)* y (c) del problema 13.B para velocidades de flujo del aceite de 100, 200, 400, 800 y 1600 kg hr^{-1}.
b. Calcular el flujo total de calor a través de la pared del tubo para cada una de las anteriores velocidades de flujo del aceite.

13.D_1 Coeficiente local de transmisión de calor para la convección forzada en un tubo

Por un tubo de 5 cm de diámetro interno circula agua con una velocidad de flujo w = 6800 kg hr^{-1}. La temperatura de la pared interior en un punto del tubo es 71° C y la temperatura global del fluido en dicho punto es 15,5° C.
¿Cuál es la densidad local de flujo de calor q, en la pared del tubo? Supóngase que h_{loc} ha alcanzado un valor asintótico constante.

Respuesta: 1,60 x 10^5 kcal hr^{-1} m^{-2}

13.E_1 Transmisión de calor desde un vapor condensante

a. La superficie exterior de un tubo vertical de 2,5 cm de diámetro externo y 30 cm de longitud se mantiene a 88" C. Si el tubo está rodeado por vapor de agua saturado a 1 atm, ¿cuál será la velocidad total de transmisión de calor a través de la pared del tubo?
b. ¿Cuál sería la velocidad de transmisión de calor para el mismo tubo colocado horizontalmente ?

Respuestas: a. 2090 kcal hr^{-1}
b. 2990 kcal hr^{-1}

13.F_1 Transmisión de calor por convección forzada desde una esfera solitaria

Una esfera sólida de 2,5 cm de diámetro está situada en una corriente de aire sin perturbación, que se aproxima a la esfera con una velocidad de 30 m seg^{-1}, a la presión de 1 atm y con una temperatura de 38" C. La superficie de la esfera se mantiene a 93" C mediante una resistencia eléctrica introducida en su interior. ¿Cuál ha de ser la potencia de calefacción eléctrica, en cal seg^{-1}, para mantener las condiciones indicadas? Despréciese la radiación.

Respuesta: 3,2 cal seg^{-1}

13.G_1 Transmisión de calor por convección libre desde una esfera solitaria

Si la esfera del problema 13.F_1 se suspende en aire inmóvil a 1 atm de presión y 38" C de temperatura ambiente y la temperatura de la superficie de la esfera se mantiene de nuevo a 93" C ¿ cual sera la potencia de calefacción eléctrica necesaria en este caso? Despréciese la radiación.

Respuesta: 0,33 *cal* seg^{-1}

13.H_2 Número de **Nusselt local límite para flujo laminar en un tubo con densidad de flujo de calor constante**

La Ec. 9.8 – 31 da la distribución asintótica de temperatura para el calentamiento de un fluido de ρ, μ, $\hat{C}_p$ y k constantes en un tubo largo con densidad de flujo de calor constante en la pared. Utilizar este perfil de temperatura para demostrar que el número de Nusselt límite en estas condiciones es **48/11.**

13.1, Coeficientes giobaies de transmisión de calor

En el problema 13.A se han despreciado las resistencias de la película de vapor condensado y de la pared del tubo. Justificar esta simpliñcacibn calculando la temperatura real de la superficie interior de los tubos en una sección transversal del cambiador en la que la temperatura del aceite es 65,5° C. Admítase que h_{loc} para el aceite es constante en todo el tubo e igual a 972 kcal $hr^{-1}\ m^{-2}\,°C^{-1}$. Los tubos son horizontales,

13.J_2 El anemómetro de alambre caliente[1]

Un anemómetro de alambre caliente consiste esencialmente en un alambre fino, generalmente de platino, que se calienta eléctricamente y se expone a un fluido en movimiento. La temperatura del alambre, que es función de la temperatura y velocidad del fluido y de la velocidad de calefacción, puede determinarse midiendo su resistencia eléctrica.

a. Un alambre cilíndrico recto de 1,25 cm de longitud y 0,025 cm de diámetro se expone a una corriente de aire a 21" C que fluye con una velocidad de 30 m seg^{-1}. ¿Qué potencia eléctrica, expresada en watios, hay que comunicar al alambre para mantener su superficie a 315" C? Despreciar la radiación y la conducción de calor a lo largo del alambre.

b. Se ha indicado2 que para un cierto sistema alambre-fluido; en el que las temperaturas del alambre y del fluido están dadas (y por consiguiente una determinada resistencia del alambre), se cumple

$$i^3 = B\sqrt{v_\infty} + C \qquad \textbf{(13.J–1)}$$

en la que i es la intensidad de corriente necesaria para mantener la temperatura deseada y v_∞ la velocidad con que se acerca el fluido. ¿Cómo concuerda esta ecuación con las predicciones de la Fig. 13.3-1 para el alambre y fluido del apartado *(a)* en un intervalo de velocidad del fluido de 30 a 100 m seg^{-1}? ¿Cuál es el significado de la constante C en la Ec. 13.J–1?

13.K_2 Aplicación del análisis dimensional

Considerar el sistema de flujo descrito al comenzar la sección § 13.2, para el cual'se ha obtenido ya por análisis dimensional el perfil adimensional de velocidad (Fc. 6.2-7) y el perfil de temperatura (Fc. 13.2-9).

a. Utilizar las Ecs. 6.2 -7 y 13.2-9 y la definición de temperatura de mezcla adiabática, para demostrar que

$$\frac{T_{b2} - T_{b1}}{T_0 - T_{b1}} = \text{una función de Re, Pr, } L/D \qquad \textbf{(13.K–1)}$$

b. Utilizar el resultado obtenido y las definiciones de los coeficientes de transmisión de calor para deducir las Ecs. 13.2-12, 13 y 14.

---

[1] Véase por ejemplo M. JAKOB, *Heat Transfer,* vol. II, Wiley, Nueva York (1957). pp. 196-198.
[2] L. V. KING, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A214, 373* (1914).

13.L$_2$ Relación entre h_{loc} y h_{ln}

En muchos cambiadores de calor industriales tubulares (véase ejemplo 15.4−2), la temperatura de la superficie del tubo T_0 varía linealmente con la temperatura global del fluido T_b. Para este caso frecuente, h_{loc} y h_{ln} pueden relacionarse de una forma sencilla:

a. Partiendo de la Ec. 13.1-5, demostrar que

$$h_{loc}\pi D\,dz(T_b - T_0) = -\left(\frac{\pi}{4}\right) D^2 \rho C_p \langle v\rangle\, dT_b \tag{13.L-1}$$

y por tanto que

$$\int_0^L h_{loc}\,dz = \tfrac{1}{4}\rho C_p \langle v\rangle D\,\frac{T_b(L) - T_b(0)}{(T_0 - T_b)_{ln}} \tag{13.L-2}$$

b. Combinar los resultados anteriores con la Ec. 13.1-4 para demostrar que

$$h_{ln} = \int_0^1 h_{loc}\,d\frac{z}{L} \tag{13.L-3}$$

en la que L es la longitud total de tubo y por consiguiente que

$$h_{loc}\big|_{z=L} = h_{ln}\big|_{z=L} + \frac{dh_{ln}}{d\ln L} \tag{13.L-4}$$

13.M$_2$ Pérdida de calor por convección libre desde un tubo

La perdida de calor en el ejemplo 13.5 − 1, ¿sería mayor o menor si la temperatura de la superficie del tubo fuese de 93°C y la temperatura del aire 82° C?

13.N$_3$ La expresión de Nusselt para los coeficientes de transmisión de calor por un vapor condensante

Considerar una película laminar de condensado que desciende por una pared vertical (véase Fig. 13.6-1) y suponer que esta película líquida constituye la única resistencia. a la transmisión de calor en el lado de la pared correspondiente al vapor. Suponer también (i) que puede despreciarse el esfuerzo cortante entre el líquido y el vapor, (ii) que las propiedades físicas de la película pueden evaluarse para la media aritmética entre la temperatura del vapor y la de la superficie de refrigeración y que esta última (la temperatura de la superficie de refrigeración) puede suponerse constante, (iii) que la aceleración del fluido en la película es despreciable en comparación con las fuerzas de gravitación y viscosas, (iv) que las variaciones de calor sensible en la película de condensado carecen de importancia frente al calor latente que se transmite a través de ella, y (v) que la densidad de flujo de calor es prácticamente normal a la superficie de la pared.

a. Recuérdese de la sección § 2.2 que la velocidad media de una pelicula de espesor constante δ es

$$\langle v_z\rangle = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu} \tag{13.N-1}$$

Supóngase que esta ecuación es válida para cualquier valor de z.

b. Expresar la ecuación de energía para la pelicula, despreciando la curvatura y la convección. Demostrar que la densidad de flujo de calor que atraviesa la película hacia la superficie fría es

$$-q_r = k\left(\frac{T_\delta - T_0}{\delta}\right) \tag{13.N-2}$$

c. A medida que la película desciende por la pared recibe un aporte adicional de materia debido al proceso de condensación. La cantidad de calor liberado en este proceso es $\hat{\Delta}H_{,}$, por unidad de masa de la substancia que sufre el cambio de estado. Demostrar que igualando el calor que se desprende por condensación con el flujo de calor a través de la película en un segmento dz de la misma, se llega a

$$\rho \Delta \hat{H}_{vap} \, d(\langle v \rangle \delta) = k \left(\frac{T_d - T_0}{\delta} \right) dz \qquad \textbf{(13.N–3)}$$

d. Introducir la expresión de la velocidad media del apartado *(a)* en la Ec. 13.N−3 e integrar desde $z = 0$ hasta $z = z$ para obtener

$$\delta(z) = \left(\frac{4k(T_d - T_0)\mu z}{\rho^2 g \, \Delta \hat{H}_{vap}} \right)^{1/4} \qquad \text{(13.N-4)}$$

e. Utilizar la definición del coeficiente de transmisión de calor y el resultado del apartado *(d)* con el fin de obtener la Ec. 13.6-5.

f. Demostrar que para las condiciones del problema las Ecs. 13.6-4 y 5 son equivalentes.

13.0s Correlaciones de transmisión de calor para tanques agitados

Un líquido cuyas propiedades físicas son esencialmente constantes se calienta en marcha continua a su paso por un tanque agitado, tal como se indica en la Fig. 13.0. El calor proviene de la condensación de vapor de agua en la pared exterior del tanque. Puede considerarse que la resistencia térmica de la película de condensado y de la pared del tanque es pequeña en comparación de la del fluido en el interior del mismo y que ademas la parte del tanque no en contacto con el vapor esta perfectamente aislada. La velocidad de flujo de líquido a través del tanque ejerce un efecto despreciable sobre el tipo de flujo existente en el mismo,

Deducir la forma general de la correlación adimensional de transmisión de calor en el tanque, correspondiente a la correlación para el fiujo en un tubo que se ha dado en § 13.2. Tómese como longitud de referencia el diámetro del agitador, D; como velocidad de referencia, ND, siendo N la velocidad de giro del eje en revoluciones por unidad de tiempo; y como presión de referencia, $\rho(ND)^2$, siendo p la densidad del fluido.

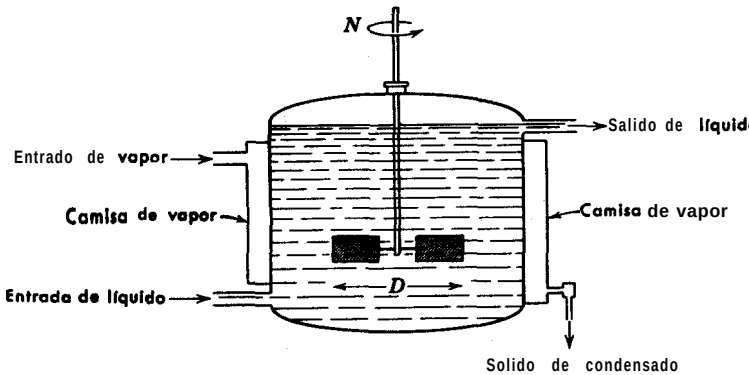


Fig. 13.0. Calentamiento continuo de un líquido en un tanque agitado.

13.P_3 Cálculo analítico de números de Nusselt

Ampliar los resultados de los siguientes ejemplos y problemas con el fin de obtener los números de Nusselt por cálculo teórico: Problema 9.P, problema 9.R, ejemplo 11.2-1, ejemplo 11.2-2, ejemplo 11.4−1 y problema 12.B.

CAPÍTULO 14

TRANSPORTE DE ENERGÍA POR RADIACIÓN

En los capítulos precedentes se ha estudiado el transporte de energía por conducción y convección. Estas dos formas de transporte necesitan la existencia de un medio material. Para que la conducción tenga lugar es preciso que haya una desigualdad de temperatura entre los puntos contiguos del medio. En el caso de la convección, tiene que existir un fluido con libertad de movimiento, que en su desplazamiento transporta energía. En este capítulo se considera un tercer mecanismo de transporte de energía, que es la radiación. Es éste un mecanismo electromagnético, en el que la energía se transporta con la velocidad de la luz sin necesidad de un medio material. La velocidad del transporte de energía por radiación entre dos cuerpos «negros» en el vacío, es proporcional a la diferencia de las, cuartas potencias de sus temperaturas absolutas. Este mecanismo es cuantitativamente muy diferente de los tres procesos de transporte que se,consideran a lo largo de este libro: transporte de cantidad de movimiento (en fluidos newtonianos), que es proporcional a un gradiente de velocidad, transporte de energía (por conducción), que es proporcional a un gradiente de temperatura y transporte de materia (por difusión ordinaria), proporcional a un gradiente de concentración. Debido a la singularidad de la radiación como medio de transporte, y a la importancia de la transmisión de calor por radiación en los cálculos industriales, vamos a dedicar un capítulo de introducción a este tema.

Para efectuar un estudio completo del transporte por radiación es preciso utilizar diversas disciplinas:[1,2] la teoría electromagnética se necesita para describir la naturaleza esencialmente ondulatoria de la radiación, especialmente por lo que respecta a la energía y presión en relación con las ondas electromagnéticas; la termodinámica es útil para obtener algunas relaciones entre las «propiedades globales» de un recinto de radiación; la mecánica cuántica es necesaria para describir detalladamente los procesos atómicos y moleculares que tienen lugar cuando la radiación se produce en el interior de la materia, o bien es absorbida por ella; finalmente, se precisa la mecánica estadística para describir la forma en que la energía radiante se distribuye en el espectro de longitudes de onda. En este capítulo se hace un estudio

[1] M. PLANCK, *Theory of Heat*, Macmillan, Londres (1932), partes III y IV.
[2] W. HEITLER, *Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press (1944), segunda edición.

elemental, y su principal objeto es definir ciertas magnitudes clave y presentar los resultados más importantes de la teoría y la experimentación. Después de esto, se expone la forma en que se pueden utilizar algunos de estos resultados para calcular la velocidad de transmisión de calor por radiación en sistemas sencillos.

En la sección § 14.1 se introduce al lector en algunos conceptos y definiciones básicas. En § 14.2 se presentan algunos de los principales resultados físicos de la radiación del cuerpo negro. En la sección siguiente, § 14.3, se estudia la velocidad de intercambio de calor entre dos cuerpos negros; en ella no se introducen nuevos principios físicos, ya que los problemas básicos son de orden geométrico. La sección § 14.4 se dedica a ampliar la anterior para el caso de superficies no negras. Finalmente, en la última sección se discuten brevemente los procesos de radiación en medios absorbentes.

§ 14.1 EL ESPECTRO DE RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Cuando un cuerpo sólido se calienta, mediante una resistencia eléctrica, por ejemplo, emite una radiación cuya longitud de onda está comprendida principalmente en el intervalo de 0,1 a 10 micrones. Esta radiación se denomina *radiación térmica*. Para la descripción cuantitativa de los mecanismos atómico y molecular en' virtud de los cuales se produce la radiación, es preciso acudir a la mecánica cuántica, y por consiguiente se sale de los límites de este estudio. Sin embargo, una descripción cualitativa es la siguiente: cuando se comunica energía a un cuerpo sólido, algunos de los átomos o moléculas que lo constituyen pasan a «estados excitados», que espontáneamente tienden a retornar a estados de energía más bajos. Como consecuencia de esto, se produce una emisión de energía en forma de radiación electromagnética. Como la radiación emitida puede deberse a variaciones en los estados electrónico, vibracional y rotacional de los átomos o moléculas, estará distribuida en un amplio intervalo de longitudes de onda.

En realidad, la radiación térmica representa una pequeña parte de todo el espectro de radiación electromagnética. En la Fig. 14.1 — 1 se representa un diagrama en el que, de forma aproximada, se indican los tipos de meranismos que son responsables de la radiación. Los distintos tipos de radiación se distinguen entre sí solamente por el intervalo de longitudes de onda que comprenden. En el vacío, todas las formas de energía radiante se mueven con la velocidad de la luz. La longitud de onda λ, que caracteriza una onda electromagnética, está relacionada con la frecuencia v de acuerdo con la ecuación:

$$\lambda = \frac{c}{v} \tag{14.1-1}$$

siendo el valor de c $2{,}9979 \times 10^{10}$ cm seg $^{-1}$. En la parte visible del espectro las distintas longitudes de onda dependen del «color» de la luz.

Para algunas cuestiones es conveniente considerar la radiación electromagnética desde un punto de vista corpuscular. En este caso, a una onda electromagnética de frecuencia v se le asocia un ***fotón,*** que es una «partícula» de carga cero y masa cero y cuya energía ϵ viene dada por

$$\epsilon = h\nu \tag{14.1-2}$$

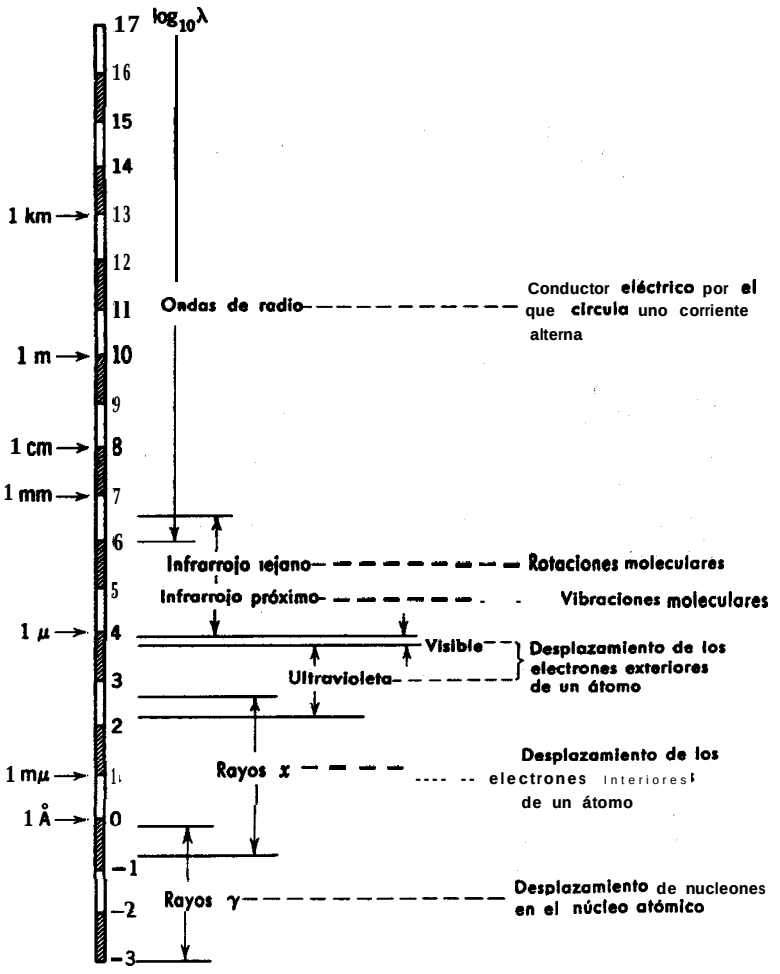


Fig. 14.1-1. Espectro electromagnético de radiación, con indicación aproximada del mecanismo en virtud del cual se producen los distintos tipos de radiación: 1 Å = 1 unidad Angstrom = 10^{-8} cm; 1μ = 1 micrón = 10^{-4} cm.

siendo h la constante de Planck, cuyo valor es $6{,}624 \times 10^{-27}$ erg seg. Teniendo en cuenta estas dos ecuaciones y la información de la Fig. 14.1—1, se aprecia que una disminución de la longitud de onda de la radiación electromagnética da lugar a un aumento de la energia de los fotones correspondientes. Por ejemplo, cuando una molécula disminuye su velocidad de rotación, la cantidad de energía que se desprende es relativamente pequeña y la radiación correspondiente pertenece, generalmente, al infrarrojo. Por el contrario, se desprenden cantidades relativamente grandes de energía cuando un núcleo atómico pasa de un estado de energía elevado a otro más bajo, y la radiación correspondiente es gamma o x. Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, parece también lógico que la energía radiante emitida por objetos calientes tenderá hacia longitudes de onda más cortas (fotones de mayor energía) a medida que aumenta la temperatura.

Hasta aquí se ha considerado el fenómeno de ***emisión*** de energía radiante o fotones, cuando un sistema atómico o molecular pasa desde un estado elevado de energía a otro más bajo. El proceso inverso, que se denominá ***absorción,*** ocurre cuando la adición de energía radiante a un sistema atómico o molecular da lugar a que el sistema pase a un estado más elevado de energía. Este último proceso es el que tiene lugar cuando la energía radiante incide sobre una superficie sólida, provocando su calentamiento.

§ 14.2 ABSORCIÓN Y EMISIÓN EN SUPERFICIES' SÓLIDAS

Una vez que se ha introducido al lector en los conceptos de absorción y emisión a escala atómica, vamos a estudiar ahora estos mismos procesos desde un punto de vista macroscópico. El estudio se reduce a sólidos opacos.

La radiación que incide sobre la superficie de un sólido opaco puede ser absorbida o reflejada. La fracción de la radiación incidente que se absorbe se denomina ***coeficiente de absorción*** y se designa por el símbolo ***a;*** análogamente, la fracción de la radiación incidente de frecuencia v que se absorbe se representa mediante el símbolo a_ν. Es decir, que a y a_ν se definen por

$$a = \frac{q^{(a)}}{q^{(i)}} \qquad a_\nu = \frac{q_\nu^{(a)}}{q_\nu^{(i)}} \tag{14.2-1,2}$$

donde $q_\nu^{(a)}\,d\nu$ y $q\nu_\nu^{(i)}\,d\nu$ son las radiaciones absorbida e incidente por unidad de área y unidad de tiempo, en el intervalo de frecuencia comprendido entre v y $\nu + d\nu$. Para cualquier ***cuerpo real*** a_ν será menor que la unidad y variará considerablemente con la frecuencia. Un cuerpo hipotético para el que a_ν fuese constante (menor que la unidad), en todo el intervalo de frecuencias y para todas las temperaturas, se denomina ***cuerpo gris;*** o sea, que un cuerpo gris absorbe siempre la misma fracción de la radiación incidente, cualquiera que sea la frecuencia. Un caso limite de cuerpo gris es aquél en el que $a_\nu = 1$ para todas las frecuencias y temperaturas; este comportamiento límite corresponde a lo que se llama un ***cuerpo negro.***

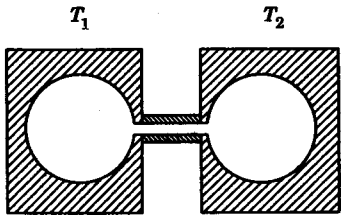


Fig 14.2–1. Experiencia imaginaria para demostrar que la radiación de cavidad es independiente de los materiales de la pared.

Todas las superficies solidas emiten **energía** radiante. La energía radiante total emitida por unidad de tiempo y unidad de área se designa por $q^{(e)}$, y la emitida en el intervalo de frecuencia comprendido entre ν y $\nu + d\nu$ por $q_\nu^{(e)}\, d\nu$. Para las correspondientes velocidades de emisión de energía desde un cuerpo negro se utilizan los símbolos $q_b^{(e)}$ y $q_{b\nu}^{(e)}\, d\nu$. En función de estas magnitudes, la ***emisividad*** para la emisión total de energía radiante, así como para una determinada frecuencia, se definen de la siguiente forma

$$e = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}}; \qquad e_\nu = \frac{q_\nu^{(e)}}{q_{b\nu}^{(e)}} \qquad (14.2\text{–}3,4)$$

La emisividad también es menor que la unidad para superficies reales no fluorescentes, e igual a uno para cuerpos negros. A una determinada temperatura, la energía radiante emitida por un cuerpo negro representa un límite superior de la energía radiante emitida por superficies reales no fluorescentes.

Consideremos ahora la radiación en el interior de un recinto evacuado o «cavidad» de paredes isotérmicas, suponiendo que todo el sistema está en equilibrio. En estas condiciones, no existe una densidad de flujo neto de energía a través de la interfase existente entre el sólido y la cavidad. Se puede demostrar que en dicha cavidad la radiación es independiente de la naturaleza de las paredes y varía solamente con la temperatura de las mismas. Conectemos dos cavidades, cuyas paredes están constituidas por dos materiales diferentes que están a la misma temperatura, tal como se indica en la Fii. **14.2** — 1. Si las intensidades de radiación fuesen distintas en las dos cavidades, existiría un transporte neto de energía radiante de una cavidad a otra. Como esto estaría en contradicción con el segundo principio de termodinámica, las intensidades tienen que ser iguales en las dos cavidades, independientemente de cual sea la composición de las superficies de las mismas. **También** se puede demostrar que la radiación es uniforme y no polarizada en toda la cavidad. Esta ***radiación de cavidad*** juega un importante papel en la deducción de la ley de Planck. La intensidad de radiación se designa por $q^{(cav)}$, y corresponde a la energía radiante que incidiría sobre una superficie sólida de área unidad situada en cualquier lugar del interior de la cavidad.

Vamos a considerar ahora otras dos supuestas experiencias. La primera de ellas consiste en colocar en el interior de la cavidad un pequeño cuerpo negro que está a la misma temperatura que las paredes de la cavidad. En este caso no existirá un intercambio neto de energía entre el cuerpo negro y las paredes de la cavidad, y por lo tanto, la energía que incide sobre la superficie del cuerpo negro sera exactamente igual a la energía emitida por él:

$$q^{(cav)} = q_b^{(e)} \tag{14.2-5}$$

De este resultado se deduce la importante conclusión de que la radiación emitida por un cuerpo negro es igual a la intensidad de radiación de equilibrio existente en el interior de la cavidad a la misma temperatura. En la segunda experiencia imaginaria, se coloca en el interior de la cavidad un cuerpo no negro, cuya temperatura es igual a la de las paredes de la cavidad. Tampoco en este caso hay intercambio neto de calor entre el cuerpo no negro y las paredes de la cavidad, y se puede por lo tanto, establecer, que la energía absorbida por el cuerpo será igual a la que radia desde él:

$$aq^{(cav)} = q^{(e)} \tag{14.2-6}$$

Comparando las Ecs. 14.2-5 y 6 se obtiene

$$a = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}} \tag{14.2-7}$$

De acuerdo con la definición de la emisividad e, de la Ec. 14.2-3, se llega a la conclusión de que

$$e = a \tag{14.2-8}$$

Ésta es la *ley de Kirchhoff,* que establece que a una temperatura determinada, la emisividad y el coeficiente de absorción de cualquier superficie sólida son iguales, cuando la radiación está en equilibrio con la superficie sólida. También se puede demostrar que la Ec. 14.2-8 es válida para cada longitud de onda separadamente:

$$e_\nu = a, \tag{14.2-9}$$

En la Tabla 14.2-1 se indican los valores de la emisividad total e de algunos solidos. En realidad, e depende de la frecuencia y del ángulo de emisión, pero los valores que se indican aquí tienen una gran aplicación. Los valores tabulados corresponden (con algunas excepciones) para emisión normal a la superficie, pero pueden utilizarse para emisividad hemisférica, especialmente para superficies rugosas. Las superficies metálicas no oxidadas y limpias poseen emisividades muy bajas, mientras que, a temperatura ambiente o superior, la mayoría de los no metales y los óxidos metálicos tienen emisividades del orden de 0,8. Obsérvese que para casi todos los materiales la emisividad aumenta con la temperatura.

TABLA 14.2—1

EMISIVIDADES TOTALES DE VARIAS SUPERFICIES PARA EMISIÓN PERPENDICULAR[a]

	T (° K)	e	T (° K)	e
Aluminio				
Altamente pulimentado, pureza 98,3 %	500	0,039	850	0,057
Oxidado a 600° C	472	0,11	872	0,19
Material para techos recubiertos de Al	311	0,216		
Cobre				
Electrolitico, altamente pulimentado	353	0,018		
Oxidado a 600° C	472	0,57	872	0,57
Hierro				
Electrolitico, altamente pulimentado	450	0,052	500	0,064
Totalmente oxidado	293	0,685		
Fundición, pulimentada	473	0,21		
Fundición, oxidada a 600° C	472	0,64	872	0,78
Cartón de amianto	311	0,93	644	0,945
Ladrillo				
Ordinario, rugoso	294	0,93		
de sílice, sin vidriar, rugoso	1273	0,80		
de sílice, vidriado, rugoso	1373	0,85		
Negro de humo, para un espesor de 0,075 cm o mayor	311	0,945	644	0,945
Pinturas				
Laca negra brillante, sobre hierro	298	0,875		
Laca blanca	311	0,80	367	0,95
Pinturas al aceite, 16 colorea	373	0,92—0,96		
Pinturas de aluminio, de distinta edad y contenido de laca	373	0,27—0,67		
Refractarios, 40 distintos				
Malos radiadores	872	0,65—0,70	1272	0,75
Buenos radiadores	872	0,80—0,85	1272	0,85—0,90
Agua liquida, capa gruesa[b]	273	0,95	373	0,963

[a] Valores seleccionados de los datos tabulados por H. C. Hottel para W. H. Mc ADAMS, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1942), segunda edición, pp. 393-396.

[b] Calculados a partir de datos espectroscópicos

Se ha indicado que la energía radiante emitida por un cuerpo negro representa un límite superior de la energía radiante emitida por superficies reales, y que dicha energía es una función de la temperatura. Experimentalmente se ha comprobado que la energía total emitida por una superficie negra viene dada por

$$q_b^{(e)} = \sigma T^4 \tag{14.2-10}$$

en la que T es la temperatura absoluta. ***Ésta es*** la ***ley de Stefan-Boltzmann.*** Se ha encontrado que el valor de la constante σ de Stefan-Boltzmann es 4,878 x 10^{-8} $\text{kcal hr}^{-1}\,\text{m}^{-2}\,°\text{K}^{-4}$ o bien 1,355 $\times 10^{-12}$ cal $\text{seg}^{-1}\,\text{cm}^{-2}\,°\text{K}^{-4}$. En la próxima sección se indican dos métodos mediante los cuales se ha confirmado teóricamente esta importante fórmula. La energía radiante emitida por cuerpos no negros a la temperatura T, viene dada por

$$q^{(e)} = e\sigma T^4 \tag{14.2-11}$$

en la que e debe de evaluarse a la temperatura T. En las secciones §§ 14.4 y 5 se discute la utilización de las Ecs. 14.2-10 y ll para calcular las velocidades de transferencia de energía radiante entre superficies calientes.

Anteriormente se ha dicho que la constante de Stefan-Boltzmann se ha determinado experimentalmente, lo que implica que es posible disponer de un verdadero cuerpo negro. En realidad, no existen sólidos con superficies perfectamente negras. Sin embargo, se puede obtener una excelente aproximación haciendo un orificio muy pequeño en una cavidad isotérmica. Dicho orificio se comporta prácticamente como una superficie negra. Que esto constituye una buena aproximación puede verse a partir de la siguiente relación, que expresa la emisividad efectiva del orificio e_{orif} en un recinto de paredes rugosas, en función de la emisividad real e de las paredes de la cavidad, y la fracción f del área interna total de la cavidad que se elimina merced al orificio:

$$e_{\text{orif}} = \frac{e}{e + f(1-e)} \tag{14.2-12}$$

Si e = 0,8 y f = 0,001, el valor de e_{orif} resulta 0,99975. Por lo tanto, se absorberá el 99,975 por ciento de la radiación que incide sobre el orificio. La radiación que sale por el orificio corresponderá muy aproximadamente a la radiación de un cuerpo negro.

§ 14.3 LEY DE DISTRIBUCIÓN DE PLANCK, LEY DE DESPLAZAMIENTO DE WIEN, Y LA LEY DE STEFAN-BOLTZMANN[1,2,3]

La ley de Stefan-Boltzmann puede deducirse a partir de consideraciones termo-

[1] J. DE BOER, *Textbook of Physics*, capítulo VII (R. Kronig, Ed.), Scheltema and Holkema. Amsterdam (1951), tercera edición.

[2] G. Joos, *Theoretical Physics*, Hafner, Nueva York (1939).

[3] M. PLANCK, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, Barth, Leipzig (1923), quinta edición.

dinámicas, con tal de que se tengan en cuenta ciertos resultados de la teoría del campo electromagnético. Concretamente, se puede demostrar que para la radiación de cavidad, la densidad de energía (es decir, la energía por unidad de volumen) en el interior de la misma es

$$u^{(r)} = \frac{4}{c} q_b^{(e)} \tag{14.3-1}$$

Como la energía radiante emitida por un cuerpo negro depende solamente de la temperatura, la densidad de energía $u^{(r)}$ ha de ser también una función exclusiva de la temperatura. También se puede demostrar que la radiación electromagnética ejerce sobre las paredes de la cavidad una presión $p^{(r)}$, que viene dada por

$$p^{(r)} = \tfrac{1}{3} u^{(r)} \tag{14.3-2}$$

Los anteriores resultados para la radiación de cavidad pueden obtenerse también considerando que la cavidad está llena de un gas constituido por fotones, cada uno de los cuales está dotado de una energía $h\nu$ y una cantidad de movimiento $h\nu/c$. A continuación se aplica la siguiente fórmula termodinámica

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{14.3-3}$$

para el gas de fotones o radiación en la cavidad. Introduciendo en esta relación $U^{(r)} = Vu^{(r)}$ y $p^{(r)} = (\frac{1}{3})u^{(r)}$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $u^{(r)}(T)$:

$$u^{(r)} = \frac{T}{3}\frac{du^{(r)}}{dT} - \frac{u^{(r)}}{3} \tag{14.34}$$

Integrando esta ecuación ordinaria se obtiene

$$u^{(r)} = bT^4 \tag{14.3-5}$$

en la que b es una constante de integración. Combinando este resultado con la Ec. 14.3— 1, se obtiene la energía radiante emitida p or la superficie de un cuerpo negro por unidad de área y unidad de tiempo:

$$q_b^{(e)} = \frac{c}{4} u^{(r)} = \frac{cb}{4} T^4 = \sigma T^4 \tag{14.3–6}$$

que es justamente la ley de Stefan-Boltzmann. Obsérvese que la deducción termodinámica no predice el valor de σ.

Otro camino para deducir la ley de Stefan-Boltzmann consiste en integrar la ***ley de distribución de Planck.***[3] Esta famosa ecuación expresa la densidad de flujo

de energía $q_{b\lambda}^{(e)}\,d\lambda$ que emite una superficie negra en el intervalo de longitud de onda comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$

$$q_{b\lambda}^{(e)} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{ch/\lambda kT} - 1} \tag{14.27}$$

en la que h es la constante de Planck. Este resultado puede deducirse aplicando la estadística cuántica a un gas de fotones en una cavidad, considerando que los fotones siguen la estadística de Bose-Einstein.[4,5] Este intento de explicar la distribución de frecuencia de la radiación del cuerpo negro fue lo que condujo a Planck al desarrollo de la teoría y la estadística cuánticas en los primeros años del siglo actual. En la Fig. 14.3— 1 se representa la distribución de Planck, que predice correctamente la curva de energía frente a la longitud de onda, y el desplazamiento del valor máximo hacia longitudes de onda menores a medida que aumenta la temperatura. Integrando la Ec. 14.3 -7 para todas las longitudes de onda, se obtiene

$$\begin{aligned} q_b^{(e)} &= \int_0^\infty q_{b\lambda}^{(e)}\,d\lambda \\ &= 2\pi c^2 h \int_0^\infty \frac{\lambda^{-5}}{e^{ch/\lambda kT} - 1}\,d\lambda \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\left(6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\cdot\frac{\pi^4}{015} \\ &= \left(\frac{2}{15}\frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3}\right)T^4 \end{aligned} \tag{14.3-8}$$

En esta integración se ha efectuado el siguiente cambio de variable $x = ch/\lambda kT$. La integración se realiza desarrollando $1/(e^x - 1)$ en función de e^x, e integrando término a término. Por consiguiente, el método cuántico estadístico da la distribución espectral de la radiación, así como también el valor de la constante a, en función de las constantes universales c, h y k; o sea, que $a = 2\pi^5 k^4/15c^2h^3) = 4{,}878 \times 10^{-8}$ kcal hr^{-1} m^{-2} °K^{-4}. Este valor es un 1,5 por ciento inferior al obtenido por medidas directas de radiación, pero ofrece más garantía.

---

[4] J. E. MAYER y M. G. MAYER, *Statistical Mechanics*, Witey, Nueva York (1940), pp. 363-374.

[5] R. C. TOLMAN, *Principles of Statistical Mechanics*, Oxford University Press (1938), pp. 380-383.

Además de la ley de **Stefan-Boltzmann,** se puede obtener también, a partir de la distribución de Planck, una importante relación con respecto al valor máximo en dicha distribución. Para ello, se expresa la **Ec.** 14.3-7 en función de x y se hace $dq_{bx}^{(e)}/dx = 0$, con lo que se obtiene la siguiente ecuación para $x_{máx}$, que es el valor de x para el cual la distribución de Planck presenta un máximo:

$$x_{máx} = 5(1 - e^{-x_{máx}}) \tag{14.3-9}$$

La solución numérica de esta ecuación conduce. a $x_{máx} = 4{,}9651$. Por consiguiente, a una determinada temperatura T

$$\lambda_{máx} T = \frac{ch}{K x_{máx}} \tag{14.3-10}$$

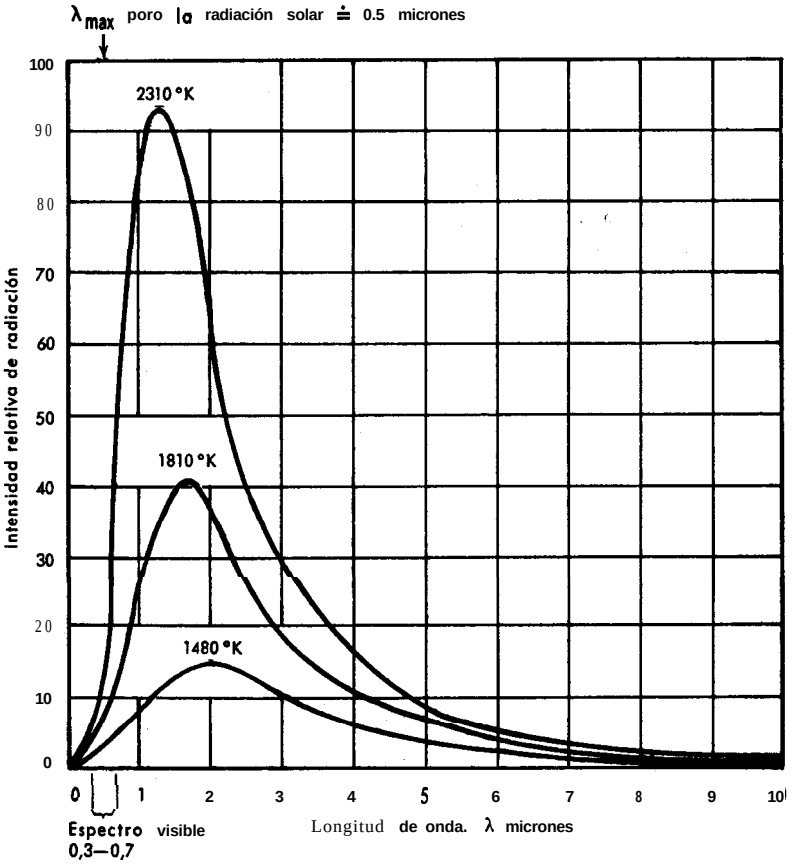


Fig. 14.3-1. **Espectro de radiación de equilibrio de acuerdo con la ley de Planck.**

Introduciendo los valores de las constantes universales y el de $x_{máx}$, se obtiene

$$\lambda_{máx}\, T = 0{,}2884 \text{ cm } {}^{o}\text{K} \qquad (14.3\text{-}11)$$

Este resultado constituye ***la ley de desplazamiento de Wien,*** y es especialmente útil para estimar la temperatura de objetos lejanos. La ley predice, de acuerdo con la experiencia, que el color aparente de la radiación pasa del rojo (grandes longitudes de onda) al azul (cortas longitudes de onda) a medida que aumenta la temperatura.

Finalmente, se pueden interpretar algunas de las observaciones anteriores en función de la ley de distribución de Planck. En la Fig. 14.3-2 se han dibujado tres curvas: la curva de distribución de Planck para un hipotético cuerpo negro, la curva de distribución para un hipotético cuerpo gris, y una curva de distribución para un cuerpo real. Es evidente que cuando se utilizan los valores totales de la emisividad, tales como los de la Tabla 14.2-1, se consideran empíricamente las desviaciones de la ley de Planck en todo el espectro.

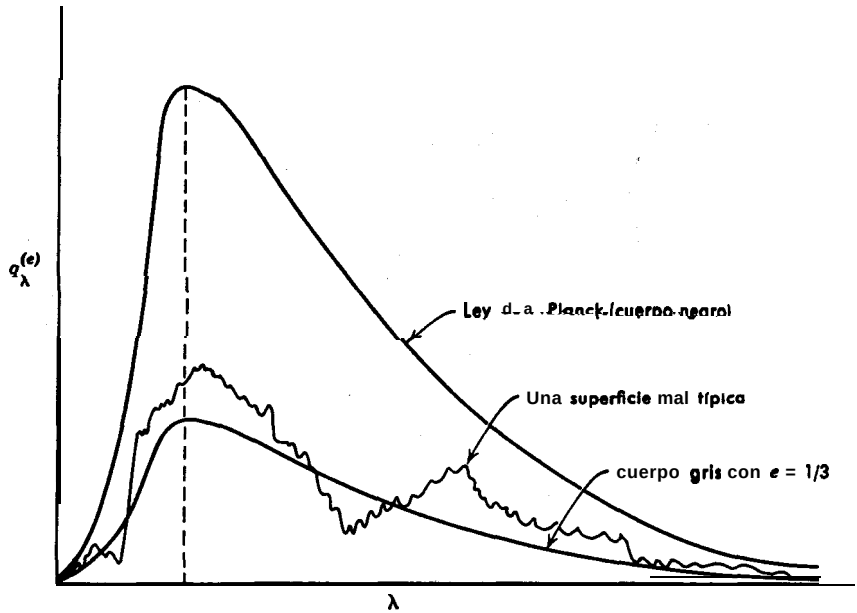


Fig. 14.3-2. Comparación de superficies negras, grises y reales.

Ejemplo 14.3-1. Temperatura y emisión de energía radiante del Sol

Para cálculos aproximados, el Sol puede considerarse como un cuerpo negro que emite radiación con una intensidad máxima para $\lambda = 0{,}5$ micrones (5000 Å). Sobre esta base, estimar *(a)* la temperatura de la superficie del Sol y *(b)* la densidad de flujo calorifico que emite la superficie del Sol.

Solución.

a. A partir de la ley de desplazamiento de Wien,

$$T = \frac{0{,}2884}{\lambda_{máx}} = \frac{(0{,}2884 \text{ cm } ^\circ\text{K})}{(0{,}5 \times 10^{-4} \text{ cm})} = 5760^\circ\text{K} = 10\,400^\circ\text{R}$$

b. A partir de la ley de Stefan-Boltzmann,

$$\begin{aligned} q_b^{(e)} &= \sigma T^4 \\ &= (4{,}878 \times 10^{-8})(5760)^4 \\ &= 5{,}4 \times 10^7 \text{ kcal hr}^{-1} \text{ m}^{-2} \end{aligned}$$

§ 14.4 RADIACIÓN DIRECTA ENTRE CUERPOS NEGROS EN EL VACÍO QUE ESTÁN A DIFERENTE TEMPERATURA

En las secciones anteriores se ha expuesto la ley de Stefan-Boltzmann, que describe la emisión total de energía radiante desde una superficie perfectamente negra. En esta sección se estudia la transferencia de energía radiante entre dos cuerpos negros de geometría y orientación arbitrarias. Para esto, es preciso conocer cómo se distribuye con respecto al ángulo la energía radiante emitida por un cuerpo negro. Teniendo en cuenta que la radiación del cuerpo negro es isotrópica, se puede deducir la siguiente relación, conocida como ***ley de Lambert:***

$$q_{b\theta}^{(e)} = \frac{q_b^{(e)}}{\pi} \cos\theta = \frac{(\sigma T^4)}{\pi} \cos\theta \qquad (14.4\text{-}1)$$

en la que $q_{b\theta}^{(e)}$ es la energía emitida por unidad de área, unidad de tiempo y unidad de ángulo sólido, en la dirección θ (véase Fig. 14.4— 1). La energía emitida por unidad de área de superficie negra en todo el ángulo sólido sombreado es, por consiguiente, $q_{b\theta}^{(e)}$ sen $\theta\, d\theta\, d\phi$. Integrando esta expresión sobre todo el hemisferio, se obtiene la emisión total de energía:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} q_{b\theta}^{(e)} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi &= \frac{\sigma T^4}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= \sigma T^4 = q_b^{(e)} \end{aligned} \qquad (14.4\text{-}2)$$

Este cálculo explica el por qué se ha introducido el factor π^{-1} en la Ec. 14.4— 1.

Ahora es posible hallar la velocidad de transferencia neta de calor desde un cuerpo «1» a un cuerpo «2», cuando ambos son negros y de una forma y orientación arbitrarias. (Véase Fig. 14.4-2.) Para ello se considera la velocidad neta de transmisión de calor entre un par de elementos de superficie dA_1 y dA_2 que se «ven» mutuamente, y se integra sobre todos los pares posibles de dichas áreas. Los elementos dA_1 y dA_2 se unen mediante una línea recta r_{12}, que forma un ángulo θ_1 con la normal a dA_1 y un ángulo θ_2 con la normal a dA_2.

Comenzamos por escribir una expresión para la energía radiada desde dA_1 en un ángulo sólido sen $\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$, situado alrededor de r_{12}. Este ángulo sólido se toma

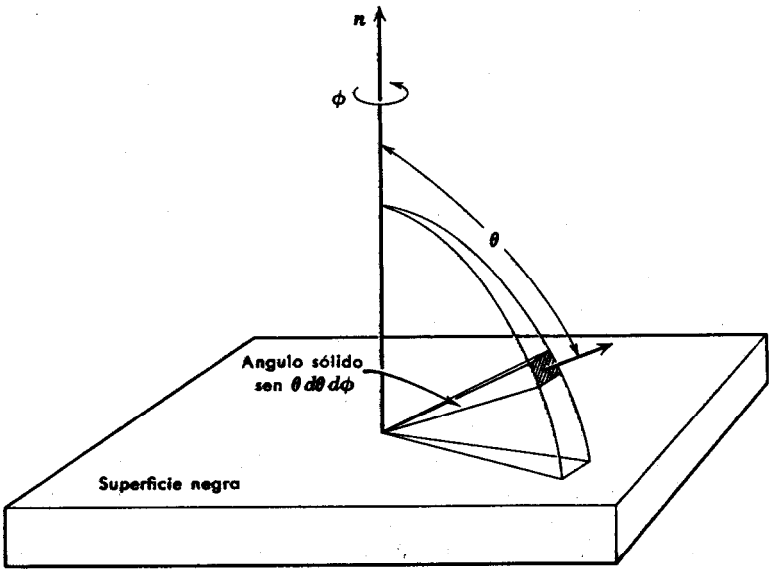


Fig. 14.4-1. **Radiación en un ángulo sólido sen $\theta\, d\theta\, d\phi$ que forma un ángulo θ con la normal a la superficie.**

suficientemente grande, de forma que dA_2 quede totalmente comprendida dentro del «rayo». (Véase Fig. 14.4-2.)

De acuerdo con la ley del coseno, de Lambert, la energía radiada en la unidad de tiempo, será

$$\left(\frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cos \theta_1\right) dA_1 \operatorname{sen} \theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1 \qquad (14.4\text{-}3)$$

De la energía que sale de dA_1 según un ángulo θ_1, solamente será interceptada por dA_2 una fracción de la misma, que viene dada por la expresión:

$$\frac{\left(\begin{array}{c}\text{área de } dA_2 \text{ proyectada sobre}\\ \text{un plano perpendicular a } r_{12}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{área formada por la intersección del ángulo sólido sen } \theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1 \text{ con una esfera}\\ \text{de radio } r_{12} \text{ y centro situado en } dA_1\end{array}\right)} = \frac{dA_2 \cdot \cos \theta_2}{r_{12}^2 \operatorname{sen} \theta_1\, d\theta_1\, d\phi_1} \qquad (14.4\text{-}4)$$

Multiplicando estas dos últimas expresiones se obtiene

$$dQ_{\overrightarrow{12}} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2}\, dA_1\, dA_2 \qquad (14.4\text{-}5)$$

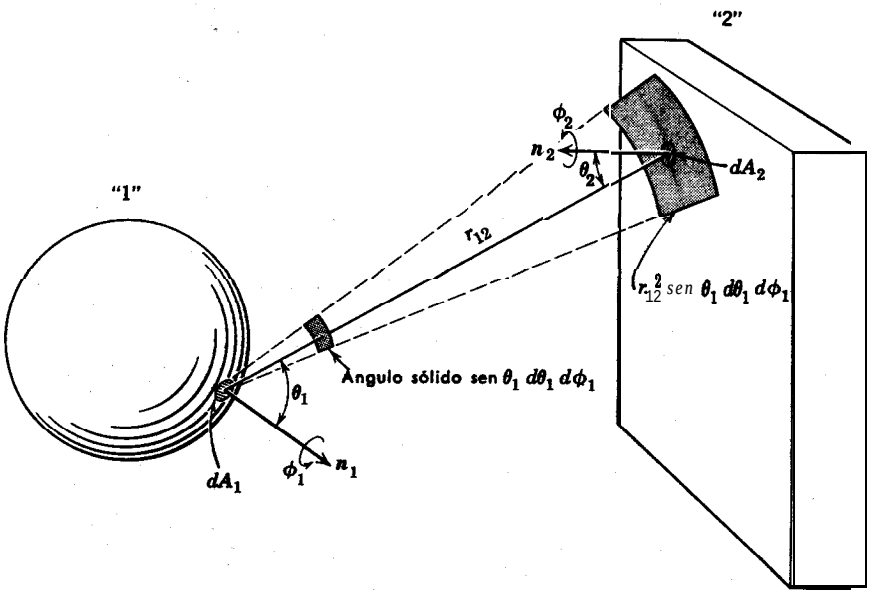


Fig. 14.4-2. Intercambio radiante entre dos cuerpos negros.

que corresponde a la energía radiante emitida por dA_1 e interceptada por dA_2 en la unidad de tiempo. De igual forma, se puede escribir

$$dQ_{\overrightarrow{21}} = \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1\, dA_2 \tag{14.4-6}$$

que es la energía radiante emitida por dA_2 e interceptada por dA_1 en la unidad de tiempo. Por consiguiente, la velocidad neta del transporte de energía de dA_1 a dA_2 es

$$\begin{aligned} dQ_{12} &= dQ_{\overrightarrow{12}} - dQ_{\overrightarrow{21}} \\ &= \frac{\sigma}{\pi}(T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1\, dA_2 \end{aligned} \tag{14.4-7}$$

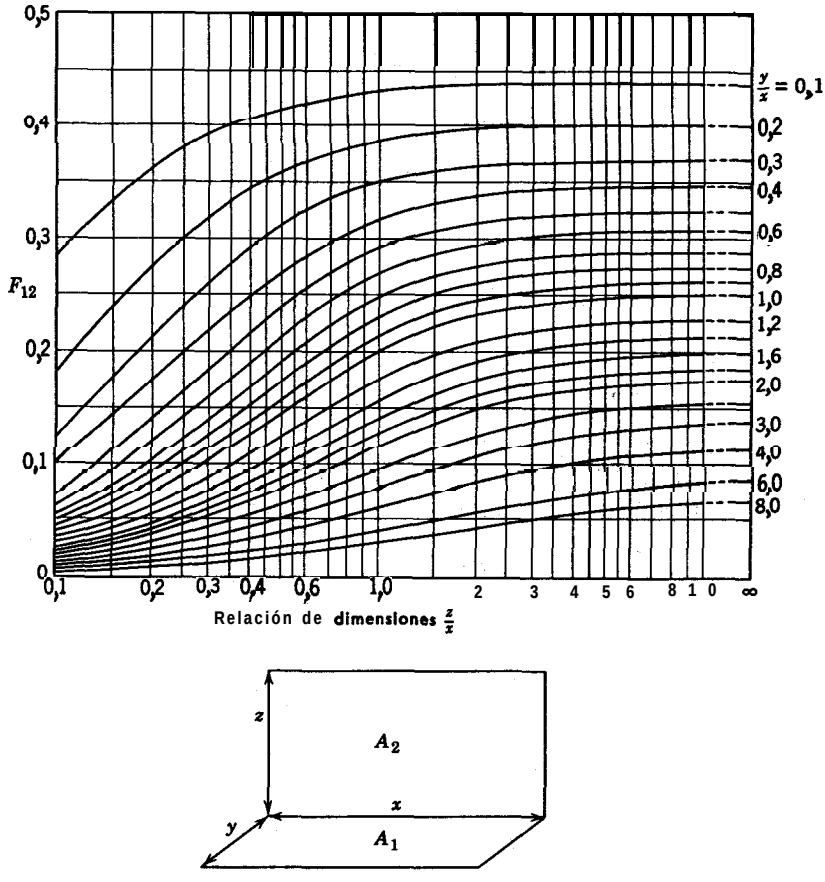
Según esto, la velocidad neta de transferencia de energía desde un cuerpo negro isotérmico «1» a otro cuerpo negro isotérmico «2», es

$$Q_{12} = \frac{\sigma}{\pi}(T_1^4 - T_2^4) \int\int \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1\, dA_2 \tag{14.4-8}$$

Como se sabe, esta integración está restringida para las **parejas** de **áreas** dA_1 y dA_2 que se ven mutuamente. Habitualmente el resultado se expresa de esta forma

$$Q_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad (14.4\text{-}9)$$

Generalmente se toman para A_1 y A_2 las áreas totales de los cuerpos «1» y «2», *y los factores de visión*[1] vienen dados por



Fii. 14.4-3. Factores de visión para la radiación directa entre rectángulos adyacentes en planos perpendiculares. [H. C. HOTTEL, capítulo 3 de W. H. MCADAMS *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), p. 68.]

[1] Denominados también factores *de ángulo*.

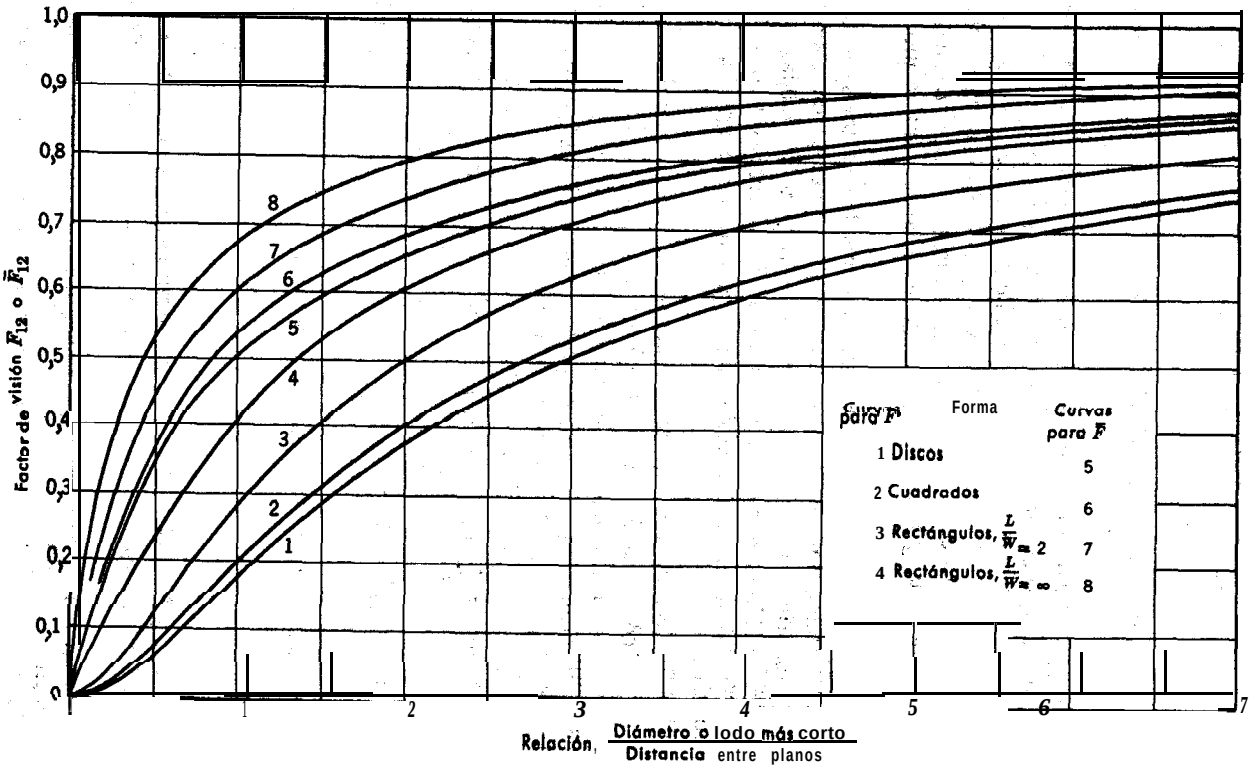


Fig. 14.4–4. Factores de visión para la radiación directa entre formas idénticas opuestas en planos paralelos. [H. C HOTTEL, capítulo 3 de W. H. MCADAMS *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, p. 69.j

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int\int \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA^{12}\, dA \qquad (14.4\text{–}10)$$

$$F_{21} = \frac{1}{\pi A_2} \int\int \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA\, dA_2 \qquad (14.4\text{–}11)$$

Evidentemente, $A_1F_{12} = A_2F_{21}$. El factor de visión F_{12} representa la fracción de radiación que sale de A_1 que es interceptada directamente por A_2.

Excepto para algunos casos muy sencillos, el calculo real de los factores de visión es un problema difícil. En las Figs. 14.4-3 y 4 se presentan algunos factores de visión para radiación directa, calculados por Hottel y colaboradores [2,3,4]. Cuando se dispone de estas gráficas resulta sencillo calcular los intercambios de energía mediante la Ec. 14.4-9.

En la deducción que antecede se ha supuesto que pueden utilizarse la ley de Lambert y la ley de Stefan-Boltzmann para describir los procesos 'de transporte radiactivo de no equilibrio, a pesar de que sólo son estrictamente válidas para el equilibrio de radiación. No se han estudiado a fondo. los -errores que se cometen por esta razón, pero las fórmulas deducidas dan aparentemente una buena descripción cuantitativa.

Hasta ahora se han considerado solamente sistemas que constan de dos cuerpos negros «1» y «2». A continuación vamos a referimos a úna serie de superficies negras «1», «2», i.., «n», que forman las paredes' de un' recinto. Las superficies se mantienen a las temperaturas $T_1, T_2, \ldots T_n$, respectivamente. El flujo neto de calor desde una superficie «i» a las n-l superficies restantes es

$$Q_{i_0} = \sigma A_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(T_i^4 - T_j^4) \qquad i = 1, 2, \cdots n \qquad (14.4\text{-}12)$$

o bien

$$Q_{i_0} = \sigma A_i \left\{ T_i^4 - \sum_{j=1}^{n} F_{ij} T_j^4 \right\} \qquad (14.4\text{-}13)$$

Para escribir la segunda forma, se ha aplicado la relación

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} = 1 \qquad (14.4\text{-}14)$$

En los sumatorios de las Ecs. 14.4— 13 y 14 está comprendido el termino F_{ii}, que para un objeto que no intercepta ninguno de sus propios rayos es igual a cero. La

---

[2] H. C. HOTTEL, «Radiant Heat Transmission», *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición, pp. 483-498.

[3] H. C. HOTTEL, «Radiant Heat Transmission», en W. H. MCADAMS, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), tercera edición, capitulo 4.

[4] M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1957). vol. II, capítulo 31.

serie de las n ecuaciones correspondientes a la Ec 14.4-12 (o Ec. 14.4—13), pueden resolverse 'para hallar las temperaturas o los flujos de calor, según los datos de que se disponga.

Una solución simultánea de las Ecs. 14.4-13, que tiene un interés especial, es la que corresponde a $Q_{3s}, Q_{4s}, \ldots . Q_{ns} = 0$; las superficies 3, 4 ,... n se denominan «adiabáticas». En este caso, se pueden eliminar del calculo las temperaturas de todas las superficies excepto las «1» y «2», y obtener una solución directa para el flujo neto de calor desde la superficie «1» a la superficie «2»:

$$Q_{12} = \sigma A_1 F_{12}(T_1^4 - T_2^4) = \sigma A_2 F_{21}(T_1^4 - T_2^4) \qquad (14.4\text{-}15)$$

En la Fig. 14.4-4 se han representadó los valores de F_{12} que se utilizan en esta ecuación. Estos valores se aplican solamente cuando las paredes adiabáticas están formadas a partir de elementos lineales perpendiculares a « 1» y «2».

La utilización de estos factores de visión F y F simplifica grandemente los cálculos cuando se conocen las temperaturas de las superficies «1 » y «2». El lector que desee una mayor información sobre el intercambio de energía radiante en recintos, debe de acudir a la bibliografía.4

Ejemplo 14.4— 1. Estimad611 de la constante solar

La densidad de flujo de calor radiante que llega a la atmósfera terrestre procedente del Sol se denomina «constante solar» y tiene importancia en la utilización de la energía solar y en meteorología. Tómese el Sol como cuerpo 1 y la Tierra como cuerpo 2 y utilícense los siguientes datos para calcular la constante solar: $D_1 = 1{,}38 \times 10^6$ km; $r_{12} = 1{,}50 \times 10^8$ km; $q_{b1}^{(e)} = 5{,}4 \times 10^7$ kcal hr^{-1} m^{-2} (según el ejemplo 14.3-1).

Solución. Utilizando la terminología de la Ec. 14.4-5 y la Fig. 14.4-5,

$$\text{constante solar} = \frac{dQ_{12}}{\cos\theta_2\, dA_2} = \frac{UT,'}{\pi r_{12}^2}\int \cos\theta_1\, dA_1$$

$$= \frac{\sigma T_1^4}{\pi}\frac{\pi D_1^2}{4r_{12}^2} = \frac{q_{b1}^{(e)} D_1^2}{4r_{12}^2}$$

$$= \frac{5{,}4 \times 10^7}{4}\left(\frac{1{,}38 \times 10^6 \text{ km}}{1{,}50 \times 10^8 \text{ km}}\right)^2$$

$$= 1.140 \text{ kcal hr}^{-1}\text{ m}^{-2} \qquad (14.4\text{-}16)$$

Este resultado concuerda satisfactoriamente con otras estimaciones efectuadas. Se puede separar r_{12}^2 de la integral, debido a que la distancia r_{12} a la superficie visible del Sol varía menos del 0,5 por ciento. La integral que queda, $\int \cos\theta_1\, dA_1$, corresponde al brea proyectada del Sol tal como se ve desde la Tierra, o sea prácticamente $\pi D_1^2/4$.

Ejemplo 14.4-2. Transmisión de energía radiante entre discos

Dos discos-negros de 60 cm de diámetro, directamente opuestos, están situados a una distancia de 120 cm. El di «1» se mantiene a 1000° K y el «2» a 500° K. Calcular el flujo

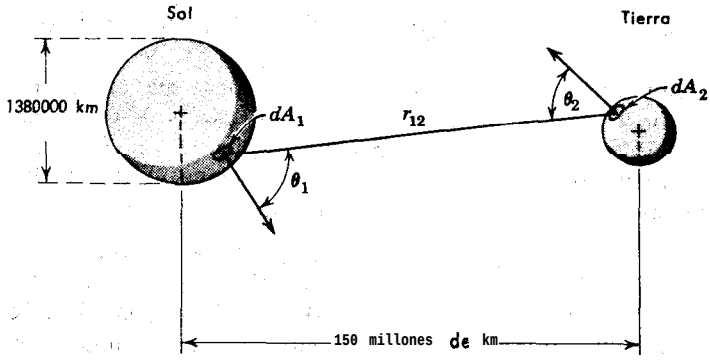


Fig. 14.4-5. Estimación de la constante solar.

de calor entre los discos: (a) cuando no existen otras superficies y (*b*) cuando los dos discos se conectan mediante una superficie negra constituida por un cilindro recto adiabático.

Solución.

a. A partir de la Ec. 14.4-9 y la curva 1 de la Fig. 14.4-4.

$$\begin{aligned} Q_{12} &= A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= (\pi)(0{,}30)^2(0{,}06)(4{,}878 \times 10^{-8})[(1000)^4 - (500)^4] \\ &= 7{,}76 \times 10^2 \text{ kcal hr}^{-1} \end{aligned}$$

b. A partir de la Ec. 14.4-15 y la curva 5 de la Fig. 14.4-4,

$$\begin{aligned} Q_{12} &= A_1 \bar{F}_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= (\pi)(0{,}30)^2(0{,}34)(4{,}878 \times 10^{-8})[(1000)^4 - (500)^4] \\ &= 43{,}9 \times 10^2 \text{ kcal hr}^{-1} \end{aligned}$$

14.5 RADIACIÓN ENTRE CUERPOS NO NEGROS QUE ESTÁN A DISTINTA TEMPERATURA

En principio, la radiación entre superficies no negras puede abordarse mediante el análisis diferencial de los rayos emitidos y sus sucesivos componentes reflejados. En la práctica, esto se puede efectuar para superficies que son, aproximadamente, negras, ya que en este caso sólo es preciso considerar una o dos reflexiones. Sin embargo, para superficies de elevado poder de reflexión el análisis es complicado, y, generalmente, no se conocen con suficiente exactitud la distribución de los rayos emitidos y reflejados con respecto al ángulo y la longitud de onda, de forma que no está justificado un cálculo detallado.

Se puede obtener un tratamiento razonablemente exacto para una pequeña superficie no negra contenida en el interior de un gran recinto prácticamente isotérmico (es decir, una «cavidad»), como es el caso de una tubería que conduce vapor

de agua, situada en una habitación, cuyas paredes están a temperatura constante. La velocidad de emisión de energía desde una superficie no negra «1» a un recinto que la rodea «2», viene da& por

$$Q_{12}^{\rightarrow} = e_1 A_1 F_{12} \sigma T_1^4 \qquad (14.5\text{–}1)$$

y la velocidad de absorción por la superficie «1» de energía procedente de los alrededores es

$$Q_{21}^{\rightarrow} = a_1 A_1 F_{12} \sigma T_2^4 \qquad (14.5\text{-}2)$$

En esta ecuación se ha tenido en cuenta que la radiación que incide sobre la superficie «1» es prácticamente una radiación de cavidad, o radiación de un cuerpo negro, correspondiente a la temperatura T_2. Por consiguiente, la velocidad neta de radiación desde A_1 a los alrededores es

$$Q_{12} = \sigma A_1 (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \qquad (14.5\text{-}3)$$

Si A_1 no tiene ninguna concavidad no intercepta ninguno de sus propios rayos, y F_{12} es igual a la unidad. En la Ec. 14.5-3, et es el valor de la emisividad de la superficie «1» a la temperatura T_1. El coeficiente de absorción a_1 se *estima* generalmente como el valor de e de la superficie «1» a la temperatura T_2.

Se considera ahora un recinto que consta de n superficies grises difuso-reflectantes que están a temperaturas diferentes T_1, T_2, ... T_n. Si todas las superficies menos

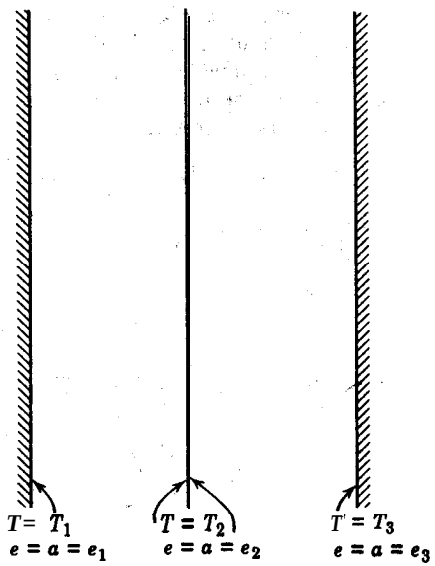


Fig. 14.5-1. Escudo de radiación.

dos son adiabáticas (es decir, $Q_{s3} = Q_{s4} = \ldots = 0$), el flujo de calor entre las superficies «1» y «2» viene dado por la siguiente ampliación de la Ec. 14.4–15 :[1,2]

$$Q_{12} = A_1\mathscr{F}_{12}\sigma(T_1^4 - T_2^4) = A_2\mathscr{F}_{21}\sigma(T_1^4 - T_2^4) \tag{14.5-4}$$

en la que

$$\frac{1}{A_1\mathscr{F}_{12}} = \frac{1}{A_1F_{12}} + \frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{e_1} - 1\right) + \frac{1}{A_2}\left(\frac{1}{e_2} - 1\right) \tag{14.5-5}$$

Las Ecs. 14.5-4 y 5 corresponden a una solución exacta si A_1 y A_2 son planos paralelos infinitos, cilindros coaxialesinfinitos, o esferas concéntricas y no existen a la vista otras superficies; también es exacta para otras geometrías, si se ve el mismo recinto cualquiera que sea el punto 'situado sobre A_1 desde el que se observa, y análogamente para A_2. Las ecuaciones también se transforman en exactas cuando las emisividades de todas las superficies del sistema tienden hacia la unidad. En la Fig. 14.4-4 se indican los valores de F_{12} para algunas geometrias sencillas.

Ejemplo 14.5-1, Escudos de radiación

Deducir una expresión para la disminución de la transferencia de energía radiante entre dos planos grises paralelos de dimensiones infinitas que tienen la misma área A, cuando paralelamente entre ellos se coloca una delgada lámina gris de conductividad calorífica muy elevada.

Solución. ge puede efectuar un balance de radiación entre cada pareja de superficies adyacentes, utilizando la nomenclatura de la Fig. 14.5-1 y sumando las energías absorbidas durante la repetida reflexión de un determinado rayo primario. Por ejemplo, en la Fig. 14.5 -2 se representa esquemáticamente la forma en que se absorbe la energía que sale de la superficie «1». Lo mismo puede hacerse para la energía emitida originalmente por la superficie «2». Combinando estos resultados se llega a

$$Q_{12} = A\sigma(T_1^4 - T_2^4)[e_1e_2 + e_1e_2(1 - e_2)(1 - e_1) + e_1e_2(1 - e_2)^2(1 - e_1)^2 + \cdots]$$

$$= A\sigma e_1e_2(T_1^4 - T_2^4)\sum_{i=0}^{\infty}[(1 - e_2)(1 - e_1)]^i \tag{14.5-6}$$

Se puede demostrar que el sumatorio se transforma en

$$\sum_{i=0}^{\infty}[(1 - e_2)(1 - e_1)]^i = \frac{1}{1 - (1 - e_2)(1 - e_1)} \tag{14.5-7}$$

de forma que

$$Q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right)} \tag{14.5-8}$$

[1] H. C. HOTTEL, en W. H. McAdams, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, Nueva York (1954), capitulo 4.

[2] M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1957), vol. II, capitulo 31.

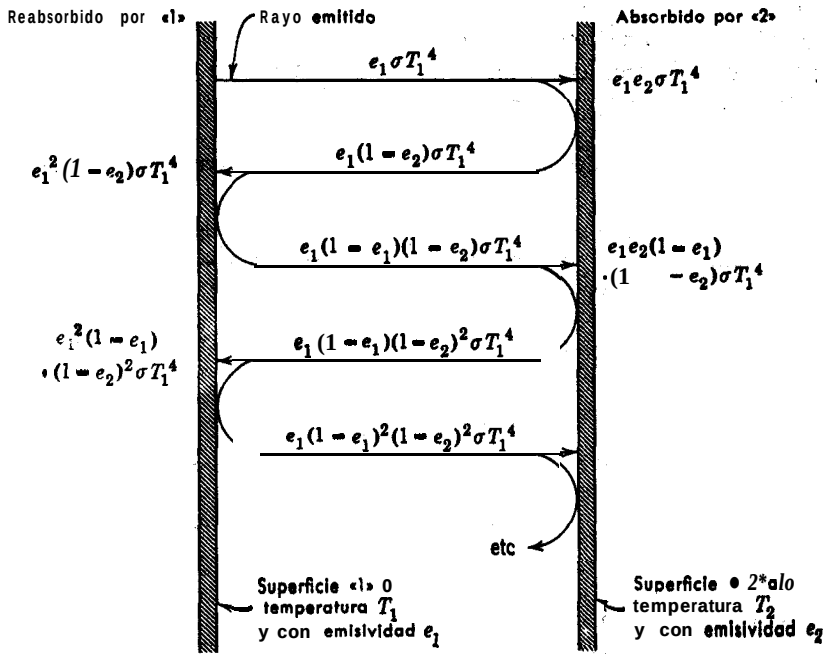


Fig. 14.5-2. Diagrama esquemático en el que se indica lo que le sucede a la radiación emitida por la superficie «1».

(Obsérvese que este resultado es un caso especial de la Ec. 14.5-4.) Análogamente,

$$Q_{23} = \frac{A\sigma(T_2^4 - T_3^4)}{\left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - 1\right)} \tag{14.5-9}$$

Eliminando ahora la temperatura T_2 del escudo de -radiación mediante estas dos ecuaciones, se obtiene

$$Q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - 1\right)} \tag{14.5-10}$$

La relación entre la transmisión de energía radiante con escudo y sin él es

$$\frac{Q_{12}}{Q_{13}} = \frac{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_3} - 1\right)}{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - 1\right)} \tag{14.5-11}$$

Si la emisividad de las tres superficies es la misma, el valor de esta fracción es un medio. La utilización de escudos múltiples es todavía más efectiva (véase problema 14.H), y se utilizan frecuentemente para el aislamiento a temperatura elevada y para la protección de termopares.

Ejemplo 14.5-2. Pérdidas de calor por radiación y convección libre en una tubería horizontal

Predecir la velocidad total de perdida de calor, por radiación y convección libre, en una unidad de longitud de una tubería horizontal recubierta con cartón de amianto. El diámetro externo del aislamiento es 15 cm. La superficie exterior del aislamiento está a 38° C (311" K), y las paredes que la rodean y el aire ambiente están a 27° C (300° K).

Solución. Se toma la superficie externa del aislamiento como superficie «1» y las paredes de la habitación como superficie «2». Se aplica la Ec. 14.5-3

$$Q_{12} = \sigma A_1 F_{12}(e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \tag{14.5-12}$$

Puesto que la superficie es convexa y está totalmente cubierta por «2», F_{12} es la unidad. En la Tabla 14.2-1 se encuentra que $e_1 = 0{,}93$ y $a_1 = 0{,}93$. Substituyendo los valores numéricos en la Ec. 14.5-12 se obtiene para 1 m de tubería

$$Q_{12} = (4{,}878 \times 10^{-8})(\pi)(0{,}15)(1{,}0)[0{,}93(311)^4 - 0{,}93(300)^4]$$
$$= 27 \text{ kcal hr}^{-1} \tag{14.5-13}$$

Sumando las perdidas de calor por convección que se han obtenido en el ejemplo 13.5-1, se obtienen las perdidas totales de calor en la tubería:

$$Q = Q^{(c)} + Q^{(r)} = 17 + 27 = 44 \text{ kcal hr}^{-1} \tag{14.5-14}$$

Obsérvese que en este caso la radiación es responsable de más de la mitad de las pérdidas de calor. Si el fluido no es transparente, los procesos de convección y radiación no son independientes entre sí y $Q^{(c)}$ y $Q^{(r)}$ no pueden sumarse directamente. El cálculo efectuado aquí resulta casi siempre adecuado para gases; en la mayor parte de los problemas en los que intervienen líquidos, $Q^{(r)}$ puede despreciarse.

Ejemplo 14.5-3. Convección y radiación combiidas

Un cuerpo directamente expuesto al firmamento durante la noche se enfriará por debajo de la temperatura ambiente debido a la radiación al espacio exterior. Este efecto puede utilizarse para congelar agua en bandejas poco profundas bien aisladas del suelo. Estimar la temperatura máxima del aire para la que pueda tener lugar la congelación, despreciando la evaporación.

Solución. Como primera aproximación se supone lo siguiente:

a. Todo el calor que recibe el agua se debe a la convección libre desde el aire ambiente, que se supone en reposo

b. El efecto calorífico de la evaporación o condensación de agua es despreciable

c. Se ha alcanzado el estado estacionario.

d. La bandeja que contiene el agua es de sección cuadrada.

e. La radiación procedente de la atmósfera es despreciable.

La máxima temperatura que puede tener el aire en la superficie del agua es 273° K. La velocidad de ***pérdida de calor por radiación es***

$$Q^{(r)} = e_1 A_1 \sigma T_1^4 = (0{,}95)(4{,}878 \times 10^{-8})(273)^4 L^2$$
$$= 257 L^2 \text{ kcal hr}^{-1} \qquad (14.5\text{–}15)$$

siendo L la longitud de un borde de la bandeja, expresada en m.

Para hallar la ***ganancia de calor por convección*** se utiliza la relación

$$Q^{(\text{conv})} = hL^2(T_{\text{aire}} - T_{\text{agua}}) \qquad (14.5\text{-}16)$$

siendo h el coeficiente de transmisión de calor por convección libre'. El coeficiente de transmisión de calor, para el enfriamiento del aire a temperaturas ordinarias mediante la cara superior de una superficie horizontal cuadrada, viene dada por[3]

$$h = 1{,}13(T_{\text{aire}} - T_{\text{agua}})^{1/4} \qquad (14.5\text{-}17)$$

en la que h está expresado en kcal $\text{hr}^{-1}\ \text{m}^{-2}\ °\text{C}^{-1}$ y la temperatura en grados Kelvin.

Si las anteriores expresiones para la pérdida de calor por radiación y la ganancia de calor por convección libre resultan adecuadas, se obtiene

$$1{,}13L^2(T_{\text{aire}} - 273)^{5/4} = 257\ L^2 \qquad (14.5\text{-}18)$$

De esta ecuacibn se encuentra que la máxima temperatura del aire ambiente es 350° K o 77° C. Excepto en condiciones desérticas, la radiación procedente de la atmósfera y la condensación de humedad del aire hacen que la temperatura necesaria del aire disminuya considerablemente.

§ 14.6 TRANSPORTE DE ENERGÍA RADIANTE EN MEDIOS ABSORBENTES[1]

Los métodos que se han expuesto en las secciones precedentes, solamente son aplicables a materiales totalmente transparentes o totalmente opacos. Para describir el transporte de energía en medios no transparentes, se expresan las ecuaciones diferenciales de la velocidad local de variación de energía, consideradas desde el punto de vista del material y de la radiación. Es decir, que se considera un medio material atravesado por una radiación electromagnética, en el que coexisten dos «fases»: una «fase material» formad por la masa total del sistema, y una «fase de fotón» constituida por la radiación electromagnética.

En el Capítulo 10 se ha indicado ya una ecuación del balance de energía para un sistema en el que no existe radiación. Aquí vamos a ampliar la Ec. Q de la Tabla

---

[3] W. H. MCADAMS, en *Chemical Engineers' Handbook* (J. H. Perry, Ed.), McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición, p. 474.

[1] S. CHANDRASEKHAR presenta un amplio tratamiento, de la teoría de la radiación en medios absorbentes, en *Radiative Transfer,* Oxford University Press (1950).

10.4-1 para la fase material con el fin de tener en cuenta la energía que se intercambia con la fase de fotón debido a los procesos de emisión o absorción:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{U} = -(\nabla\cdot\rho\hat{U}v) - (\nabla\cdot q) - p(\nabla\cdot v) - (\tau:\nabla v) - (\mathscr{E} - \mathscr{A}) \qquad (14.61)$$

En esta expresión $\mathscr{E}$ y $\mathscr{A}$ son las velocidades locales de emisión y absorción de fotones por unidad de volumen. 0 sea, que $\mathscr{E}$ representa la pérdida de energía de la fase material que resulta como consecuencia de la emisión de fotones por las moléculas; análogamente, $\mathscr{A}$ representa la ganancia local de energía de la fase material que resulta como consecuencia de la absorción de fotones pot'ias moléculas. (Véase Fig. 14.6-1.) En la Ec. 14.6-1, q representa la densidad de flujo de calor por conducción, que viene dado por la ley de Fourier.

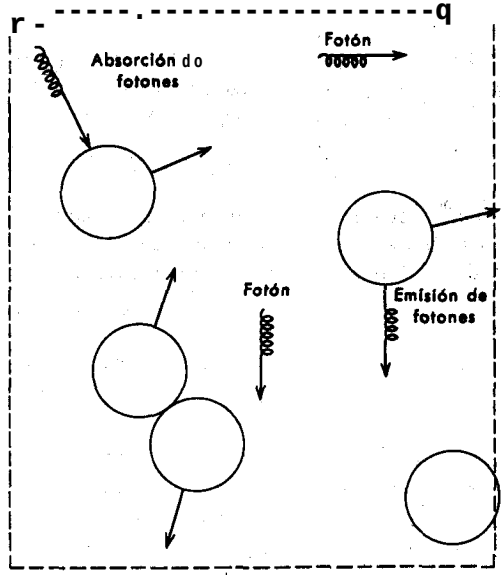


Fig. 14.6-1. Elemento de volumen sobre el que se aplican los, balances de energía; los círculos representan moléculas.

Para la «fase de fotón», se puede plantear una ecuación para la velocidad de variación de la densidad de energía radiante $u^{(r)}$:

$$\frac{\partial}{at}u^{(r)} = -(\nabla\cdot q^{(r)}) + (\mathscr{E} - \mathscr{A}) \qquad (14.6\text{-}2)$$

en la que $q^{(r)}$ es la densidad de flujo de energía radiante. Esta ecuación se obtiene aplicando un balance de energía radiante a una pequeña unidad de volumen fijo

en el espacio. Obsérvese que en la Ec. 14.6—2 no existe término convectivo, puesto que los fotones se mueven independientemente de la velocidad local de la materia. Obsérvese también que en las Ecs. 14.6— 1 y 2 el término $(\mathscr{E} - \mathscr{A})$ interviene con signos opuestos, lo que indica que la ganancia neta de energía radiante se produce a expensas de la energía molecular. La Ec. 14.6-2 puede expresarse también para la energía radiante en un intervalo de frecuencia comprendido entre v y v + *dv:*

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\nu^{(r)} = -(\nabla \cdot q_\nu^{(r)}) = (\mathscr{E}_\nu - \mathscr{A}_\nu) \qquad (14.6\text{–}3)$$

Esta expresión se obtiene diferenciando la Ec. 14.6-2 con respecto a v.

Con el fin de simplificar la discusión, vamos a considerar un sistema no fluyente en estado estacionario, en el que la radiación se desplaza solamente en la dirección + *z.* Un sistema de este tipo' puede conseguirse de forma muy aproximada haciendo pasar un rayo de luz colimado a través de una solución que está a temperatura suficientemente baja, di: forma que la emisión de la solución carece de importancia.[2] Estas condiciones son las que generalmente se presentan en espectrofotometría. Para este,sistema, las Ecs. 14.6-1 y 2 resultan

$$0 = -\frac{d}{dz} q_z + \mathscr{A} \qquad (14.6\text{–}4)$$

$$0 = -\frac{d}{dz} q_z^{(r)} - \mathscr{A} \qquad (14.6\text{–}5)$$

Para utilizar estas ecuaciones es preciso disponer de información acerca de la velocidad volumétrica de absorción $\mathscr{A}$. Una expresión convencional para un rayo unidireccional es

$$\mathscr{A} = m_a q^{(r)} \qquad (14.6\text{-}6)$$

en la que m_a se denomina el «coeficiente de extinción». En esencia, esto establece que la probabilidad de absorción de fotones es proporcional a la concentración de los mismos.

Ejemplo 14.6-1. Absorción de un rayo de radiación monocromática

Un rayo de radiación monocromática de frecuencia ν, enfocado paralelamente al eje z, pasa a través de un fluido absorbente. La velocidad local de absorción de energia viene dada por $m_{a\nu} q_\nu^{(r)}$, siendo $m_{a\nu}$ el «coeficiente de extinción» para la radiación de frecuencia ν. Determinar la distribución de la densidad de flujo radiante $q_\nu^{(r)}$ en el sistema.

Solución. Se desprecia la refracción y la dispersión del rayo incidente. También se

[2] Téngase en cuenta que si la emisión fuese importante, sería preciso considerar la radiación en todas las direcciones.

supone que el líquido se refrigera, de forma que puede despreciarse la radiación que procede de él. Por consiguiente, para estado estacionario la Ec. 14.6-5 resulta

$$0 = -\frac{d}{dz} q_\nu^{(r)} - m_{a\nu} q_\nu^{(r)} \tag{14.6-7}$$

Integrando con respecto a z se obtiene

$$q_\nu^{(r)} = q_\nu^{(r)}|_{z=0} \exp(-m_{a\nu} z) \tag{14.6-8}$$

Ésta es la ***ley de Lambert*** que tiene una gran aplicación en espectrofotometría. Para un determinado material puro, $m_{a\nu}$ depende de ν según una forma característica. Por consiguiente, la forma del espectro de absorción constituye un medio muy útil para el análisis cualitativo.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Cuál es la ley de Stefan-Baltzmann y en qué condiciones es aplicable? Indicar un ejemplo de un sistema físico en el que pueden tener realidad estas condiciones. ¿Cómo está relacionada con la ley de Planck?

2. ¿Qué es un cuerpo negro? ¿Existen tales cuerpos? ¿Por que es útil el concepto de un cuerpo negro?

3. ¿Qué es un cuerpo gris? ¿Qué utilidad tiene este concepto? ¿Un cuerpo negro puede considerarse como gris?

4. Para la reflexión en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. ¿Cómo están relacionados estos ángulos para la reflexión difusa?

5. ¿Cuál es el significado físico del factor de visión F_{12} y del factor F_{12}?

6. ¿En qué condiciones puede expresarse totalmente en función de F_{12} el efecto de la geometría sobre el intercambio de calor radiante entre dos superficies? ¿Y en función de F_{12}?

7. ¿Qué ecuaciones de este capítulo demuestran que el resplandor aparente de un cuerpo negro, cuya temperatura en la superficie es uniforme, es independiente de la posición (distancia y dirección) desde la que se observa?

8. ¿Puede una capa muy delgada de un gas luminoso radiar con mayor intensidad que un cuerpo negro a la misma temperatura?

9. ¿Cuál es la relación análoga a la Ec. 14.3-2 para un gas ideal monoatómico?

10. ¿Cuáles son las unidades de $q^{(e)}$, $q_\nu^{(e)}$ y $q_\lambda^{(e)}$?

11. Comprobar el valor numérico y las unidades de σ que se indican a continuación de la Ec. 14.3-8, calculando σ a partir de las constantes universales.

12. ¿Cuál es la ley del desplazamiento de Wien? ¿Y la ley de Lambert?

PROBLEMAS

14.A$_1$ Aproximación de un cuerpo negro medidte un orificio en una esfera

Una delgada esfera de cobre, cuya superficie interior está altamente oxidada, tiene un diámetro de 15 cm. ¿Cuál ha de ser el diámetro del orificio practicado en la esfera para que el coeficiente de absorción del orificio sea 0,99?

Respuesta: Radio = 1,75 cm.

14.B$_1$ Eficacia de una máquina solar

Abbot[1] desarrolló una máquina para la utilización de la energía solar, consistente en un espejo parabólico que concentra la radiación solar sobre un tubo de vidrio Pyrex conteniendo un liquido prácticamente negro de elevado punto de ebullición. El líquido se hace circular a través de un cambiador de calor en el que se transmite la energía calorífica a agua a 25 atm, generando vapor de agua que puede utilizarse en una máquina. El dispositivo más eficaz requiere un espejo de 3 m de diámetro para generar 2 hp, cuando el eje del espejo está directamente dirigido al Sol. ¿Cuál es la eficacia total del aparato?

Respuesta: 15,7 por ciento.

14.C$_1$ Requerimiento de calefacción por radiación

Una barraca de forma paralelepipédica tiene 4.5 m por 9 m de planta, y el techo está a 2,5 m del suelo. El suelo se calienta mediante la circulación de agua caliente a través de tubos. En los días fríos de invierno la temperatura de las paredes y del techo es del orden de -23° C. ¿A qué velocidad debe de comunicarse calor al suelo con el fin de quela temperatura del mismo sea de 24° C? (Supóngase que todas las paredes son negras.)

14.D$_1$ Temperatura de una azotea en estado estacionario

Estimar la máxima temperatura que alcanza, con tiempo despejado el día 21 de junio, una azotea horizontal situada a 45° de latitud Norte. Se supone que la única radiación existente es la del Sol y que el coeficiente de transmisión de calor por convección es .de 9,75 kcal hr^{-1} m-z $^{\circ}$ C-t. Se admite que la temperatura del aire ambiente es de 38°C.

a. La ázotea es perfectamente negra.
b. La azotea está recubierta de aluminio, cuyo coeficiente de absorción para la radiación solar es 0,3, y la emisividad a la temperatura de la azotea es 0,07.

Utilizar la constante solar del ejemplo 14.4— 1, y despreciar la absorción y dispersión de los rayos solares por la atmósfera.

14.E$_1$ Errores en las medidas de temperatura a causa de la radiación

La temperatura de una corriente de aire en una conducción se mide mediante un termopar. Los cables del termopar y la unión son cilíndricos, de 1,3 mm de diámetro, y se introducen perpendicularmente al flujo, estando la unión situada en el centro de la conducción. Estimar la temperatura de la corriente gaseosa, a partir de los siguientes datos obtenidos en condiciones estacionarias:

Temperatura de la unión del termopar	= 260 °C
Temperatura de la pared de la conducción	= 149 °C
Emisividad de los cables del termopar	= 0,8
Coeficiente de transmisión de calor por convección del cable al aire	= 245 kcal hr^{-1}m^{-2} °C^{-1}

El valor que se indica de la temperatura de la pared permanece constante para 20 diámetros de la conducción aguas arriba y abajo del punto donde se instala el termopar. El termopar está instalado de forma que es despreciable el efecto que las pérdidas por conducción ejercen sobre la temperatura de la unión.

---

[1] C. G. ABBOT, en Solar *Energy Kesearch* (F. Danielr y J. A. Duffie, Eds.), Uhiversity of Wisconsin Press, Madison (1955), pp. 91-95; véase también U.S. Patent n.º 2460.482 (1 febrero 1945).

14.F$_2$ Temperatura media para la emisividad efectiva

Demostrar que si la emisividad aumenta linealmente con la temperatura, la Ec. 14.5-3 puede expresarse así

$$Q_{12} = e_1^\circ A_1 F_{12}(T_1^4 - T_2^4) \qquad (14.F\text{-}1)$$

en la que e_1° es la emisividad de la superficie «1» evaluada a la temperatura de referencia T°, que viene dada por

$$T^\circ = \frac{T_1^5 - T_2^5}{T_1^4 - T_2^4} \qquad (14.F\text{-}2)$$

14.G$_2$ Radiación en un anillo

Deducir una expresión para la velocidad de transmisión de calor radiante entre dos largos cilindros grises coaxiales considerando reflexiones múltiples, como en el ejemplo 14.5 - 1. Demostrar que el resultado satisface la Ec. 14.5−5.

Respuesta: $Q_{12} = \dfrac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left[\dfrac{1}{A_1 e_1} + \dfrac{1}{A_2}\left(\dfrac{1}{e_2} - 1\right)\right]}$

siendo A_1 *el* área de la superficie del cilindro, interior.

14.H$_2$ Escudos múltiples de radiación

a. Deducir una ecuación para la velocidad de transmisión de energía radiante a través de una serie de n láminas metálicas, muy delgadas, planas y paralelas, cada una de las cuales posee una emisividad e diferente, cuando la primera lámina esta a la temperatura T_1 y la lamina n a la temperatura T_n. Expresar el resultado en función de los factores $\mathcal{F}$ para las sucesivas parejas de planos. Los efectos de los bordes y de la conducción a través del espacio de aire comprendido *entre* las laminas pueden despreciarse.

b. Determinar la relación entre la velocidad de transmisión de calor. por radiación para un conjunto de n laminas idénticas, y la que tiene lugar para dos láminas idénticas.

c. Comparar el resultado para el caso de tres láminas, con el que se ha obtenido en el ejemplo 14.5-1.

Teniendo en cuenta la notable disminución de las velocidades de transmisión de calor que se consiguen con los escudos de radiación, se utilizan numerosas laminas delgadas de un metal para el aislamiento a temperatura elevada.

14.I$_2$ Radiación y conducción a través de medios absorbentes

Una plancha de vidrio se extiende desde $z = 0$ hasta $z = 6$, y es infinita en las direcciones x e y. Las temperaturas de las superficies situadas en $z = 0$ y $z = \delta$ se mantienen a T_0 y T_δ, respectivamente. Sobre la cara situada en z = 0 incide un rayo monocromático dirigido según la dirección z, y cuya intensidad es $q_0^{(r)}$. Tanto la emisión en el interior de la lamina como la radiación incidente en la dirección z pueden considerarse despreciables.

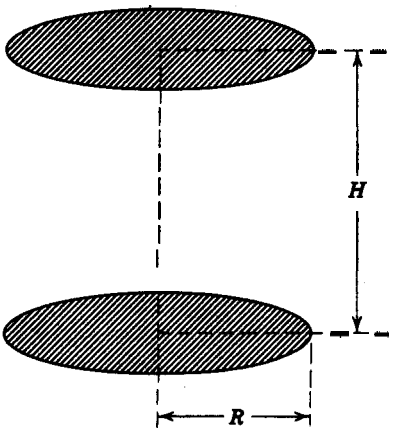
a. Determinar la distribución de temperatura en la plancha, suponiendo que m y k son constantes.

b. ¿Cómo varía con m la distribución de la densidad de flujo de energía por conducción q.?

14.J$_3$ Enfriamiento de un cuerpo negro en el vacío

Un pequeño cuerpo negro de conductividad calorifica muy elevada tiene un volumen V, un área At, una densidad ρ, y un calor específico $\hat{C}_p$. En el instante $t = 0$ se coloca este cuerpo, cuya

temperatura es T_1, en el interior de un recinto negro cuyas paredes se. mantienen permanentemente a la temperatura T_2 ($T_2 < T_1$). Deducir una expresión de la temperatura T del cuerpo negro en función del tiempo.



Flg. 14.K. Dos discos perfectamente negros.

14.K$_3$ Resolución de la integral del factor de visión para un probleína concreto

Dos discos idénticos, perfectamente negros, están situados a una distancia H y su radio es R, tal como se indica en la Fig. 14.K. Resolver las integrales del factor de visión para este caso y demostrar que

$$F_{11} = F_{21} = \frac{1 + 2B^2 - \sqrt{1 + 4B^2}}{2B^2} \qquad (14.K\text{–}1)$$

siendo $B = R/H$. Este resultado ha sido obtenido por Christiansen.[2]

14.4 Pérdidas de calor en un alambre por el que circula una corriente eléctrica[3]

Un alambre de longitud L, calentado eléctricamente, cede calor a los alrededores debido a la transmisión de calor por radiación. Si los extremos del alambre se mantienen a la temperatura constante T_0, obtener una expresión para la variación axial de la temperatura del alambre. Puede considerarse que el alambre radia a un recinto negro de temperatura T_0.

---

2 C. CHRISTIANSEN, *Wiedemann's Ann.*, 19,267 (1883); véase también M. JAKOB, *Heat Transfer*, Wiley, Nueva York (1957), vol. II, p. 14.

3 H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), segunda edición, pp. 154-156.

CAPÍTULO 15

BALANCES MACROSCÓPICOS EN SISTEMAS NO ISOTÉRMICOS

En el Capítulo 7 se han estudiado los balances macroscópicos de materia, energía mecánica y cantidad de movimiento, para el caso de sistemas que están a temperatura constante. En realidad, esta restricción es un poco artificial, puesto que en los sistemas reales de flujo siempre se convierte algo de energía mecánica en energía calorífica. Lo que realmente se supone en el Capítulo 7 es que, o bien el calor que se produce es demasiado pequeño para dar lugar a una-variación apreciable de las propiedades del fluido, o que se elimina inmediatamente a través de las paredes del sistema que limitan el fluido. En este capítulo se generalizan los anteriores resultados con el fin de describir el comportamiento general de los sistemas macroscópicos de flujo no isotérmico.

Para el caso de un sistema no isotérmico, existen cuatro balances macroscópicos que describen las relaciones entre las condiciones de la corriente a la entrada y a la salida:

a) El balance macroscópico de ***materia*** correspondiente a la Ec. 7.1-2, obtenido mediante la integración de la ecuación de continuidad extendida al volumen del sistema de flujo (o bien deducido en la forma que se indica en § 7.1).

b) El balance macroscópico de ***cantidad de movimiento,*** Ec. 7.2-2, obtenido por integración de la ecuación de movimiento sobre el volumen del sistema de flujo (o bien deducido en la forma que se indica en § 7.2).

c) El balance macroscópico de ***energfa,*** Ec. 15.1-3, obtenido al integrar la ecuación de energía sobre el volumen del sistema de flujo (o deducido según se indica en § 15.1).

d) El «balance» macroscópico de ***energía mecánica,*** del que las Ecs. 15.2-1 y 2 representan casos especiales, se obtiene formando el producto de punto de la velocidad local de la corriente con la ecuación de movimiento, e integrando sobre el volumen del sistema de flujo.

Estas cuatro relaciones comprenden los postulados de conservación de materia, cantidad de movimiento y energía (constituyendo esta última el primer principio de termodinámica), y una cuarta relación, que corresponde en esencia a las restricciones impuestas por el segundo principio de termodinámica. La denominación de

«balance de energía mecánica» no es del todo correcta, si bien es cierto que la ecuación considera las diversas formas de energía mecánica del sistema.

Los balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento para sistemas no isotérmicos son los mismos que para sistemas isotérmicos, y por consiguiente, no se insistirá de nuevo en ellos. En § 15.1 se estudia el balance macroscópico de energía, y en § 15.2 el «balance» de energía mecánica. Én § 15.3 se presenta un pequeño resumen de todos los balances de energía, y las dos últimas secciones se dedican a describir las aplicaciones para estado estacionario y no estacionario. Estas últimas tienen gran interés en el estudio teórico del control de procesos.

§ 15.1 EL BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGIA

Consideremos el sistema de la Fig. 7.0 — 1, y supongamos, tal como se ha hecho en el Capítulo 7, que las velocidades de tiempo ajustado en «1» y «2» son paralelas a las paredes de la conducción y que las propiedades del fluido no varían a través de la sección.

Vamos a aplicar primeramente al sistema el principio de conservación de la energía. Para ello se podría utilizar la Ec. 10. 1 — 1, incluyendo en el último término el trabajo que el fluido realiza contra la gravedad. Sin embargo, es más frecuente introducir el concepto de energía potencial (véase Ec. 10.1 — 14), y excluir el referido trabajo del último término de la Ec. 10.1-1. Es decir, que ‘es preferible utilizar el principio de conservación de la energía representado por la Ec. *N* de la Tabla 10.4— 1, que viene a decir lo siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de acumulación de energía interna, cinética y potencial}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de entrada de energía interna, cinética y potencial por convección}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de salida de energía interna, cinética y potencial, por convección}\end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad neta de adición de calor } \textit{al} \text{ sistema procedente de los alrededores}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad neta de trabajo producido } \textit{por} \text{ el sistema sobre los alrededores}\end{array}\right\} \quad (15.1-1)$$

Este planteamiento incluye la suposición tácita de que la fuerza externa (de gravedad) no varía con el tiempo, y que puede deducirse a partir de una energía potencial; en caso contrario, debería de utilizarse la Ec. lO.l- 1.

Se aplica ahora la Ec. 15.1— 1 para un sistema macroscópico de flujo, incluyendo en el último término el trabajo W transmitido mediante partes móviles (una turbina o un compresor, por ejemplo), y el trabajo que se necesita para introducir nuevo material por «1» y retirarlo por «2». En Q se incluye toda la energía calorífica que llega al fluido a través de las superficies sólidas del sistema por conducción o radiación a la entrada y a la salida:

$$\frac{d}{dt}(U_{tot} + K_{tot} + \Phi_{tot}) = \rho_1\langle\bar{v}_1\rangle\hat{U}_1S_1 - \rho_2\langle\bar{v}_2\rangle\hat{U}_2S_2 + \tfrac{1}{2}\rho_1\langle\bar{v}_1^3\rangle S_1 - \tfrac{1}{2}\rho_2\langle\bar{v}_2^3\rangle S_2 + \rho_1\langle\bar{v}_1\rangle\hat{\Phi}_1S_1 - \rho_2\langle\bar{v}_2\rangle\hat{\Phi}_2S_2 + Q - W + p_1\langle\bar{v}_1\rangle S_1 - p_2\langle\bar{v}_2\rangle S_2 \qquad (15.1\text{-}2)$$

En esta expresión, U_{tot}, K_{tot} y Φ_{tot}, son las energías interna, cinética y potencial, totales del sistema[1]. Esta ecuación puede expresarse en una forma mas compacta introduciendo las velocidades másicas de flujo $w_1 = \rho_1\langle\bar{v}_1\rangle S_1$ y $w_2 = \rho_2\langle\bar{v}_2\rangle S_2$ y la energía total $E_{tot} = U_{tot} + K_{tot} + \Phi_{tot}$, con lo que resulta para el ***balance macroscópico de energk en estado no estacionario***

$$\frac{d}{dt}E_{tot} = -\left[\left(\hat{U} + p\hat{V}\frac{1}{2}\frac{\langle\bar{v}^3\rangle}{\langle\bar{v}\rangle} + \hat{\Phi}\right)w\right] + Q - W \qquad (15.1\text{-}3)$$

que es justamente el planteamiento del primer principio de termodinámica aplicado a un sistema de flujo. Obsérvese que el signo convencional que se aplica a Q y W corresponde al que utilizan la mayor parte de los termodinámicos. La Ec. 15.1-3 puede obtenerse también integrando la ecuación del balance de energía (Ec. *N* de la Tabla 10.4-1) sobre el volumen del sistema de flujo. (Véase problema 15.0.).

Si el sistema de flujo está en estado estacionario, dE_{tot}/dt es igual a cero, y $w_1 = w_2 = w$. Dividiendo la Ec. 15.1-3 por w se obtiene el ***balance macroscópico de energía en estado estacionario***

$$\Delta\left(\hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2}\frac{\langle\bar{v}^3\rangle}{\langle\bar{v}\rangle} + \hat{\Phi}\right) = \hat{Q} - \hat{W} \qquad (15.1\text{-}4)$$

siendo $\hat{Q}$ el calor suministrado por unidad de masa de fluido que circula a través del sistema, y $\hat{W}$ es el trabajo producido por la unidad de masa del fluido al pasar de «1» a «2».

La magnitud $\hat{U} + p\hat{V}$, que interviene en las ecuaciones anteriores, corresponde a la entalpia (por unidad de masa) y se designa mediante el símbolo $\hat{H}$. En los cálculos ingenieriles resulta útil el uso de dos formas límite de $\Delta\hat{H}$:

gases ideales: ($p\hat{V} = RT$ y $\hat{C}_p - \hat{C}_v = R$)

$$\Delta\hat{H} = \int_{T_1}^{T_2}\hat{C}_p\,dT = \frac{R}{M}\int_{T_1}^{T_2}\frac{\gamma}{\gamma - 1}\,dT \qquad (15.15)$$

[1] Estas magnitudes están definidas en la siguiente forma

$$U_{tot} = \int_V \rho\hat{U}\,dV; \quad K_{tot} = \int_V \tfrac{1}{2}\rho v^2\,dV; \quad \Phi_{tot} = \int_V \hat{\Phi}\,dV \qquad (15.1\text{-}2a,b,c)$$

líquidos incompresibles:

(ρ = constante y $\hat{C}_p = \hat{C}_v$)

$$\Delta\hat{H} = \int_{T_1}^{T_2} \hat{C}_p \, dT + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \qquad (15.16)$$

Para completar la evaluación de $\Delta\hat{H}$ en las Ecs. 15.1-5, 6, es preciso disponer de información acerca de la variación de $\hat{C}_p$ con la temperatura.

Para muchos sistemas de la industria química, los efectos de la energía cinética, la energía potencial y del trabajo, son pequeños, de forma que un gran número de sistemas que tienen interés en ingeniería vienen descritos por la relación

$$\Delta\hat{H} = \hat{Q} \qquad (15.14$$

En las obras de ingeniería química sobre balances de materia y energía2 se estudia detalladamente este tipo de problemas.

Por lo que respecta a los términos en los que interviene $^1/_2\langle\bar{v}^3\rangle/\langle\bar{v}\rangle$, se pueden aplicar en este caso las mismas consideraciones que se han hecho en § 7.3 (justamente después de la Ec. 7.3-2). Como los términos de energía cinética son pequeños, constituye una excelente aproximación, especialmente si el flujo es turbulento, tomar $^1/_2\langle\bar{v}\rangle^2$ en vez de la expresión exacta.

El término $\Delta\hat{\Phi}$ se substituye generalmente por $g\Delta h$, siendo Δh la diferencia de alturas entre los planos «1» y «2».

Es preciso distinguir con claridad las magnitudes de los dos miembros de la Ec. 15.1-4. Las del primer miembro solo dependen de las condiciones de los planos de referencia «1» y «2»; o sea, que son «funciones de punto». Por el contrario, las del segundo dependen del camino termodinámico que sigue el fluido. Por lo tanto, la evaluación de $\hat{Q}$ y $\hat{W}$ presenta una especial dificultad. En aquellos problemas en los que se conoce $\hat{Q}$ o bien $\hat{Q}$ es la única incógnita, se puede utilizar directamente la Ec. 15.1-4. Sin embargo, cuando $\hat{Q}$ ha de calcularse en función del coeficiente local de transmisión de calor y de las diferencias locales de temperatura, resulta más conveniente expresar la Ec. 15.1-4 para un elemento de volumen, para dar lugar a una ecuación diferencial, que se integra entre los planos «1» y «2». Este procedimiento proporciona alguna información acerca de la distribución de temperatura en la dirección de flujo, tal como se indica en el ejemplo 15.4-2. Así como el calor se comunica a través de superficies ampliamente extendidas en el sistema, la producción de trabajo está generalmente localizada. Por esta razón se acostumbra considerar que el trabajo se produce en una determinada sección de flujo.

§ 15.2 EL BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA MECÁNICA (Ecuación de Bernoulli)

Al integrar la Ec. 3.3-2 sobre el volumen del sistema de flujo de la Fig. 7.0-1, se obtiene una ecuación que describe las variaciones de energía mecánica entre la

2 O. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, *Chemical Process Principles*, Wiley, Nueva York (1954), Part 1, pp. 247 y siguientes.

entrada y la salida del sístema. Este resultado tiene dos importantes formas límite: ***flujo isotérmico*** (que ***se*** ha visto ya en la Ec. 7.3—1), y ***flujo isentrópico.*** A continuación se expresan ambos como formas especiales del ***balance de energía mecánica en estado no estacionario:1***

flujo isotérmico:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + A_{tot}) = -A\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}^3 \rangle}{\langle \bar{v} \rangle} + \hat{\Phi} + \hat{G}\right)w\right] - w - E_v \quad \textbf{(15.2-1)}$$

flujo isentrópico:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + U_{tot}) = -A\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}^3 \rangle}{\langle \bar{v} \rangle} + \hat{\Phi} + \hat{H}\right)w\right] - w - E_v \quad \textbf{(15.2–2)}$$

siendo E_v la integral de la Ec. 7.4— 1, que representa la velocidad total de conversión irreversible de energía mecánica en energía interna. Estas ecuaciones límite resultan útiles, ya que muchos procesos físicos son, aproximadamente, isotérmicos o ísentrópicos. Es instructivo observar que las Ecs. 15.1-3 y 15.2-2 son casi iguales. En efecto, combinándolas se encuentra que para un proceso isentrópico — Q = E_v: es decir, que la velocidad de producción de energía calorífica por disipación viscosa es igual a la velocidad de eliminación de calor a través de las paredes del sistema. Téngase en cuenta que la restricción de que — Q = E_v no implica que el comportamiento haya de ser ísotérmico.

Para aquellos sistemas en los que el comportamiento de flujo es independiente del tiempo, tanto las dos relaciones anteriores como la ecuación más general a partir de la cual se han deducido, se reducen a una relación única, que expresa el ***balance de energía mecánica en estado estacionario:***

$$\Delta\frac{1}{2}\frac{\langle \bar{v}^3 \rangle}{\langle \bar{v} \rangle} + \Delta\hat{\Phi} + \int_1^2 \frac{1}{\rho}dp + \hat{W} + \hat{E}_v = 0 \quad \textbf{(15.2–3)}$$

Esta expresión, que a veces se denomina ***ecuación de Bernoulli,*** se ha estudiado ya en § 7.3 para el caso de sistemas isotérmicos. Los únicos términos que es preciso estudiar aquí con mayor amplitud son $\hat{E}_v$ y la integral.

La integral debe de evaluarse siguiendo una «línea de corriente» representativa del sistema. Para ello es preciso conocer la ecuación de estado $p = \rho(p, T)$, así como también la forma en que varía T con p a lo largo de la línea de corriente. En la Fig. 15.2— 1 se representa la superficie $\hat{V}(p, T)$ para un gas ideal. En el plano pT se ha representado una curva que comienza en p_1, T_1 (las condiciones de la corriente de entrada) y termina en p_2, T_2 (las condiciones a la salida). La curva del plano pT

---

[1] **R. B. Bird,** *Chem. Eng. Sci.*, **6, 123-131 (1957).**

representa los sucesivos estados que sigue el gas al pasar del estado inicial al estado final. La integral $\int_1^2 (1/\rho)\,dp$ o $\int_{J1}^{2} \hat{V}\,dp$ corresponde a la proyección sobre el plano $p\hat{V}$ del área sombreada en la Fig. 15.2— 1. Es evidente que el valor de esta integral varía cuando se modifica el «camino termodinámico» del proceso entre «1» y «2». Si se conoce el camino y la ecuación de estado se puede calcular $\int_1^2 \hat{V}\,dp$.

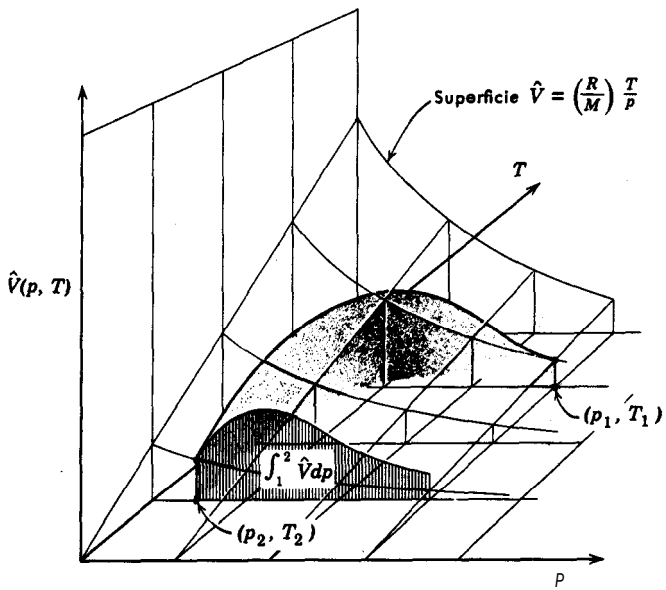


Fig. 15.2-1. Representación gráfica de la integral de la Ec. 15.2-3. El brea rayada es $\int_1^2 \hat{V}\,dp$. **Obsérvese** que en este caso el valor de la integral es negativo debido a que se integra de derecha a izquierda.

La evaluación de la integral resulta sencilla para dos casos especiales:

a. Para ***sistemas isotérmicos,*** la integral se resuelve expresando la ecuación isotérmica de estado (es decir, mediante una ecuación de ρ en función de p). Por ejemplo, para gases ideales $p = pM/RT$, y

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{RT}{M}\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{P}\,dp = \frac{RT}{M}\ln\frac{p_2}{p_1} \qquad \text{(gases ideales)} \quad (15.2\text{-}4)$$

Para líquidos incompresibles p es constante, de forma que

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) \qquad \text{(líquidos incompresibles)} \quad (15.2\text{-}5)$$

b. Para el ***flujo adiabático de gases ideales*** de calor especifico constante, si no existe fricción, p y ρ están relacionadas mediante la expresión $p\rho^{-\gamma}$ = constante, siendo $\gamma = \hat{C}_p/\hat{C}_v$, tal como se ha indicado en el Ejemplo 10.5-6. Según esto, la integral resulta

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p^{1/\gamma}}$$

$$= \frac{p_1}{\rho_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

$$= \frac{p_1}{\rho_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \qquad (15.2\text{-}6)$$

Por consiguiente, la integral puede resolverse analíticamente para este caso especial de flujo no isotérmico.

Por lo que respecta al término $\hat{E}_v$, debido a la falta de suficiente información, las dificultades que se presentan para su evaluación son mayores. Recuérdese que en el Capitulo 7 se han dado fórmulas para las contribuciones a $\hat{E}_v$ correspondientes a las perdidas en accesorios (Ec. 7.4-5) y en conducciones (Ec. 7.4-9). A continuación vamos a considerar $\hat{E}_v$ en función de estas fórmulas para dos tipos especiales de flujo no isotérmico:

a. Para líquidos, en un tubo de sección constante, la velocidad media de flujo es prácticamente constante. Sin embargo, la viscosidad puede variar considerablemente en la dirección de flujo, de forma que en la Ec. 7.4-9 f varia con la distancia. Por lo tanto, no puede utilizarse la Ec. 7.4-9 aplicada a toda la conducción.

b. Para gases, las variaciones de viscosidad son, generalmente, pequeñas, de forma que el número de Reynolds local y el factor de fricción local son prácticamente constantes para conducciones de sección uniforme. En cambio, la velocidad media puede variar considerablemente a lo largo de la conducción como consecuencia de las variaciones de densidad, y por consiguiente tampoco puede utilizarse la Ec. 7.4-9 aplicada a toda la conducción.

Por esta razón, en aquellos sistemas en los que μ o ρ varian considerablemente en la dirección del flujo, se expresa la Ec. 15.2-3 en forma diferencial con el fin de poder tener en cuenta la variación del factor de fricción o de la velocidad media local. Esto permite describir el flujo no isotérmico en conducciones. (Véase ejemplo 15.4-3).

Las pérdidas de energía en accesorios pueden obtenerse en el caso de líquidos a partir de la Ec. 7.4-5. Siempre que el flujo sea subsónico, se puede utilizar la misma fórmula para gases.

§ 15.3 RESUMEN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA FLUIDOS PUROS

Para la descripción de las relaciones existentes entre las condiciones de la corriente de entrada y salida de un sistema de flujo, se utilizan las cuatro relaciones que se han discutido anteriormente: las leyes de conservación de la materia, cantidad de movimiento y energía y la ecuación de Bernoulli. Se precisa también información acerca de la ecuación térmica de estado [$\rho = \rho(p, T)$] y la ecuación calórica de estado [generalmente expresada en la forma $\hat{C}_p = \hat{C}_p(p, T)$]. Los cuatro balances macroscópicos se resumen en la Tabla 15.3—1.

§ 15.4 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTADO ESTACIONARIO

En § 10.5 se ha visto como se obtienen diversos perfiles de temperatura en estado estacionario mediante la resolución de formas simplificadas de las ecuaciones generales de variación. En esta sección se indica cómo se utilizan las formas simplificadas de los balances macroscópicos generales para plantear relaciones que describen las condiciones de entrada y salida en un sistema de flujo en estado estacionario. Teniendo en cuenta los términos que se descartan se pueden conocer exactamente las restricciones que afectan a los resultados obtenidos.

En los ejemplos que siguen se demuestra la utilidad de los balances macroscópicos al mismo tiempo que se indica el significado de los distintos términos que intervienen en ellos. En los ejemplos 15.4-2 y 3 se aplican los balances macroscópicos a un sistema comprendido entre superficies de análisis que están separadas por una distancia infinitesimal.

Ejemplo 15.4-1. Enfriamiento de un gas ideal

Por el tubo interior del cambiador de calor que se indica en la Fig. 15.4—1 se introducen 100 kg. por hora de aire seco a 158 C, 2 atm de presión absoluta, y con una velocidad de 30 m seg^{-1}. El aire sale del cambiador a — 18° C, 1 atm y 3 m por encima del punto de entrada al cambiador.

Calcular la velocidad de eliminación de energía a través de la pared del tubo. Supóngase que el flujo es turbulento, que el gas se comporta como ideal y utilícese la siguiente expresión para el calor específico del aire:

$$\hat{C}_p = 6{,}39 + (1{,}76 \times 10^{-3})T - (2{,}65 \times 10^{-7})T^2 \qquad (15.4\text{-}1)$$

donde $\hat{C}_p$ está en kcal $kg\text{-}mol^{-1}\,°K^{-1}$ y T en ° K.

Solución. Para este sistema, el balance macroscópico de energía, Ec. 15.1-4, es

$$(\hat{H}_2 - \hat{H}_1) + \tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + (\Phi_2 - \Phi_1) = \hat{Q} \qquad (15.4\text{-}2)$$

Para gases ideales, la entalpia se puede expresar de acuerdo con la Ec. 15.1—5, y la velocidad se puede poner en función de la temperatura y la presión utilizando el balance ma

TABLA 15.3–1

RESUMEN DE BALANCES MACROSCÓPICOS PARA SISTEMAS ISOTÉRMICOS DE FLUJO CONTENIENDO UNA SOLA ESPECIE QUÍMICA

Balance	Forma especial	Estado no estacionario	Estado estacionario
Materia	–	$\frac{dm_{tot}}{dt} = -\Delta w$ (A)	$\Delta w = 0$ (F)
Cantidad de movimiento	–	$\frac{dP_{tot}}{dt} = -\Delta\left(\frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle} w + pS\right) - F + m_{tot}g$ (B)	$F = -\Delta\left(\frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle} w + pS\right) + m_{tot}g$ (G)
Energía	–	$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\Delta\left[\left(\hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi}\right)w\right] + Q - W$ (C)	$\Delta\left(\hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi}\right) = \hat{Q} - \hat{W}$ (H)
Energía mecánica	Isotérmico	$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + A_{tot}) = -\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi} + \hat{G}\right)w\right] - W - E_v$ (D)	$\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi} + \hat{G}\right) + \hat{W} + \hat{E}_v = 0$ (I)
	Isentrópico	$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + U_{tot}) = -\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi} + \hat{H}\right)w\right] - W - E_v$ (E)	$\Delta\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi} + \hat{H}\right) + \hat{W} + \hat{E}_v = 0$ (J)

Nota: Las Ecs. 15.1–5 y 6 representan formas especiales de $\Delta\hat{H} = \Delta(\hat{U} + p\hat{V})$, mientras que las Ecs. 15.2-4, 5 y 6 son formas especiales de $\int_1 (1/\rho)\, dp$.

croscópico de materia $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ y la ley del gas ideal $p = \rho RT/M$. Por consiguiente, la Ec. 15.4-2 se puede expresar así:

$$\frac{1}{M}\int_1^2 \tilde{C}_p\, dT + \frac{1}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right)^2 - 1 \right] + (\Phi_2 - \Phi_1) = \hat{Q} \qquad (15.4\text{-}3)$$

La integral se puede resolver introduciendo la expresión de $\tilde{C}_p$ de la Ec. 15.4-1.

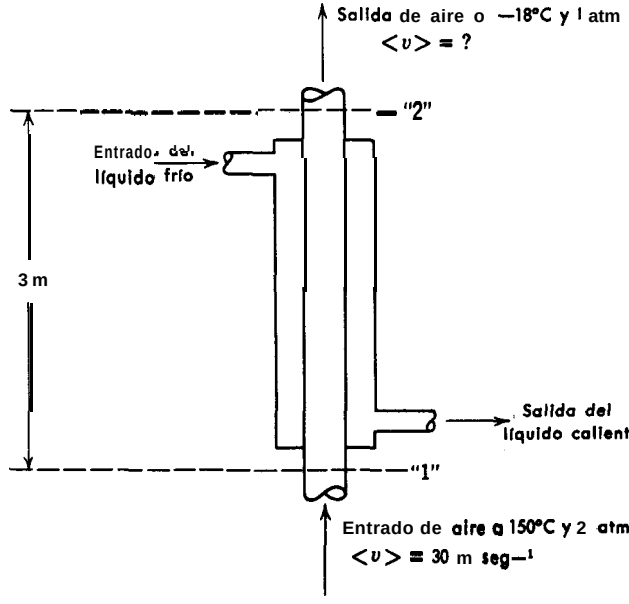


Fig. 15.4-1. Enfriamiento de aire en un cambiador de calor.

Sustituyendo los valores numéricos en la Ec. 15.4-3 se obtiene la eliminación de calor por kilogramo de fluido que pasa a través del cambiador:

$$\begin{aligned} -\hat{Q} &= (1/29)\,[(6{,}39)\,(168) + \tfrac{1}{2}(1{,}76\times 10^{-3})\,(1{,}79 - 0{,}65)\,(10^5) \\ &\quad - 1/3\,(2{,}65\times 10^{-7})\,(7{,}57 - 1{,}66)\ \text{(lo')}] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{9\times 10^2}{9{,}81\times 427}\right)\left[1 - (1{,}21)^2\right] - \left(\frac{3}{427}\right) \\ &= 40{,}3 - 0{,}04 - 0{,}007 \\ &= 40{,}2\ \text{kcal kg}^{-1} \end{aligned} \qquad (15.4\text{-}4)$$

La velocidad con que se retira calor en el cambiador es por lo tanto,

$$-\hat{Q}w = 4.020\ \text{kcal hr}^{-1}$$

Obsérvese en la Ec. 15.4-4 que las contribuciones de la energia cinética y la energía potencial son despreciables en comparación con la variación de entalpia.

Ejemplo 15.4-2. Cambiadores de calor de corrientes paralelas y en contracorriente

Se desea describir el funcionamiento del sencillo cambiador de calor de doble tubo que se representa en la Fig. 15.4-2, en función de los coeficientes de transmisión de calor de las dos corrientes y de la resistencia calorífica de la pared del tubo. El cambiador de calor está constituido por dos tubos coaxiales, circulando uno de los fluidos por el tubo interior y el otro por el espacio anular. El calor se transmite a través de la pared del tubo interior. Las corrientes pueden circular en la misma dirección, tal como se indica en la figura, pero normalmente es más conveniente utilizar el flujo en contracorriente, es decir, invertir el sentido de flujo de una de las corrientes, de forma que uno cualquiera de los dos, w_h o w_c, es negativo. Se supondrá flujo turbulento en estado estacionario y que las pérdidas de calor a los alrededores son despreciables.

Solución.

a. Balance macroscópico de energía para cada una de las corrientes consideradas en su totalidad. Las magnitudes correspondientes al fluido caliente se representan con el subíndice h y las correspondientes al frío con el subíndice c.

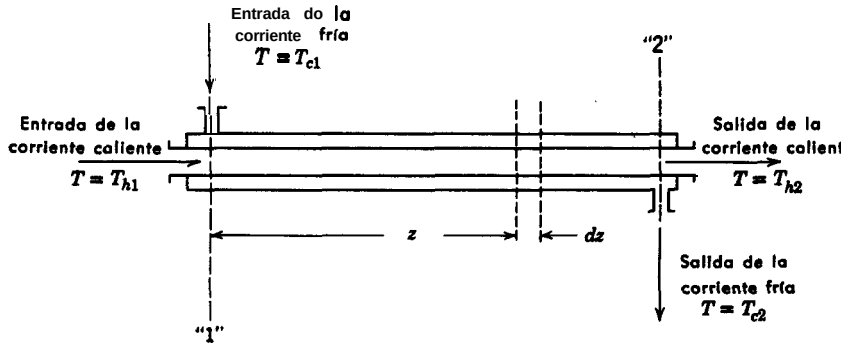


Fig. 15.4-2. Cambiador de calor de tubos concéntricos.

El balance de energia en estado estacionario de la Ec. 15.1-4 (para variaciones despreciables de la energía cinética y potencial) conduce a

$$w_h \Delta \hat{H}_h = Q_h \tag{15.4-6}$$

$$w_c \Delta \hat{H}_c = Q_c \tag{15.4-7}$$

Como no hay pérdidas de calor a los alrededores $Q_h = -Q_c$. Para líquidos incompresibles que circulan bajo una diferencia de presión no excesivamente elevada, o para gases ideales, tomando $\hat{C}_p$ constante, las Ecs. 15.1–5 y 6 conducen a la relación $\Delta \hat{H} = \hat{C}_p \Delta T$. Por consiguiente, las Ecs. 15.4-6 y 7 pueden expresarse así

$$w_h \hat{C}_{ph}(T_{h2} - T_{h1}) = Q_h \tag{15.4-8}$$

$$w_c \hat{C}_{pc}(T_{c2} - T_{c1}) = Q_c \tag{15.4-9}$$

b. Balance macroscópico de energía aplicado en forma diferencial. Aplicando la Ec. 15.1-4 a un segmento dz de la corriente del fluido caliente en el cambiador (véase Fig. 15.4−2), se obtiene

$$w_h \hat{C}_{ph}\, dT_h = dQ_h \tag{15.4-10}$$

De acuerdo con la Ec. 9.6-30 (o Fc. 13.1−8), dQ_h se puede substituir por $U_0(2\pi r_0 dz) \times (T_c - T_h)$, siendo U_0 el coeficiente global de transmisión de calor que viene dado por la Ec. 9.6-31 (o la Fc. 13.1-9). Para el fluido caliente resulta por consiguiente

$$\frac{dT_h}{T_c - T_h} = U_0 \frac{2\pi r_0\, dz}{w_h \hat{C}_{ph}} \tag{15.4-11}$$

La ecuación correspondiente para el fluido frío es

$$-\frac{dT_c}{T_c - T_h} = U_0 \frac{2\pi r_0\, dz}{w_c \hat{C}_{pc}} \tag{15.4-12}$$

Sumando las Ecs. 15.4−11 y 12 se obtiene una expresión de la diferencia de temperatura entre los dos fluidos para cualquier sección del cambiador:

$$\frac{d(T_h - T_c)}{(T_h - T_c)} = U_0\left(\frac{1}{w_h \hat{C}_{ph}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{pc}}\right)(2\pi r_0\, dz) \tag{15.4-13}$$

Suponiendo que U_0 es independiente[1] de z, e integrando los dos miembros de esta ecuación entre los planos 1 y 2, se obtiene

$$\ln\left(\frac{T_{h1} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{c2}}\right) = U_0\left(\frac{1}{w_h \hat{C}_{ph}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{pc}}\right)(2\pi r_0 L) \tag{15.4-14}$$

Esta expresión relaciona la variación de temperatura de cada una de las corrientes con las velocidades de las mismas y las dimensiones del cambiador y por lo tanto, puede utilizarse para describir el funcionamiento del cambiador. Sin embargo, se acostumbra expresar la Ec. 15.4− 14 teniendo en cuenta los balances de energía en estado estacionario de las Ecs. 15.4-8 y 9. Despejando $w\hat{C}_p$ de cada una de estas dos relaciones y substituyendo sus valores en la Ec. 15.4-14, se obtiene

$$Q_c = U_0(2\pi r_0 L)\left\{\frac{(T_{h2} - T_{c2}) - (T_{h1} - T_{c1})}{\ln\left(\frac{T_{h2} - T_{c2}}{T_{h1} - T_{c1}}\right)}\right\} \tag{15.4-15}$$

o

$$Q_c = U_0 A_0 (T_h - T_c)_{\ln} \tag{15.4-16}$$

siendo A_0 el área total de la superficie externa del tubo interior, y $(T_h - T_c)_{\ln}$ la «media logarítmica de la diferencia de temperaturas». Las Ecs. 15.4− 15 y 16 describen la veloci-

[1] El caso de coeficientes variables se trata brevemente en el problema 15.E. Es preciso tener mucho cuidado al aplicar los resultados de este ejemplo al flujo laminar, ya que la variación de U_0 con la posición puede ser bastante grande.

dad de intercambio de calor entre las dos corrientes y encuentran gran aplicación en la práctica ingenieril. Obsérvese que en estas ecuaciones no aparecen de forma explícita las velocidades de las corrientes y que son válidas tanto para corrientes paralelas como para contracorriente. (Véase problema 15.A).

Si se desea, se puede obtener también a partir de las Ecs. 15.4−11 y 12 la temperatura en función de z.

Ejemplo 15.4-3. Potencia necesaria para bombear un fluido compresible a través de una tubería de grandes dimensiones

A través de una larga tubería lisa de 60 cm de diámetro interno se bombea un gas natural que puede considerarse como metano puro. El gas entra en la conducción con una presión absoluta de 6,8 atm, una velocidad de 12,2 m seg^{-1} y a la temperatura ambiente de 21° C. Cada 16 km a lo largo de la línea se instalan estaciones de bombeo, en cada una de las cuales el gas se comprime y enfría hasta la presión y temperatura iniciales. (Véase Fig. 15.4−3). Estimar la potencia que es preciso comunicar al gas en cada estación de bombeo, suponiendo que se comporta como ideal, que los perfiles de velocidad son planos y que las diferencias de altura son despreciables.

Solución. Es conveniente considerar separadamente la tubería y el compresor. Primeramente se aplica la Ec. 15.2−3 en forma diferencial a una longitud dz de la tubería

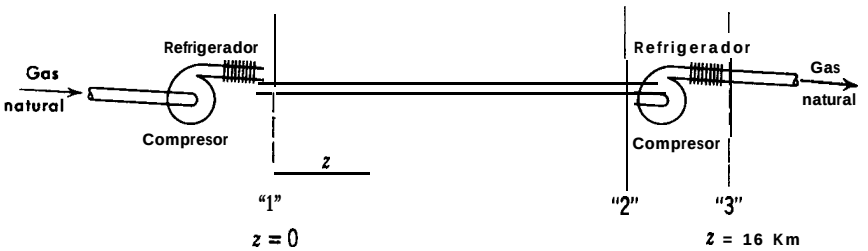


Fig. 15.4-3. Bombeo de un fluido compresible a través de un gasoducto.

y se integra entre los planos «1» y «2» con el fin de hallar la presión desconocida p_2. Una vez que se conoce p_2, se aplica la Ec. 15.2−3 al sistema comprendido entre los planos «2» y «3» para hallar el trabajo realizado por la bomba.

a. Flujo a través de la tubería. Para esta parte del sistema, la Ec. 15.2-3 puede expresarse así:

$$v\,dv + \frac{1}{\rho}\,dp + \frac{2v^2 f}{D}\,dz = 0 \tag{15.4-17}$$

Como la tubería es muy larga se admite que el flujo es isotérmico a la temperatura de 21° C. Se pueden eliminar v y ρ de la Ec. 15.4− 17 utilizando la ecuación de estado, $p = \rho RT/M$, y el balance macroscópico de materia. que puede expresarse como $\rho v = \rho_1 v_1$. Expresando ρ y v en función de la presión, la Ec. 15.4− 17 se transforma en

$$-\frac{1}{\rho}d\rho + \frac{RT_1}{M}\frac{\rho_1 d\rho}{(p_1v_1)^2} + \frac{2f\,dz}{D} = 0 \qquad (15.4\text{–}18)$$

En §1.3 se ha demostrado que la viscosidad de los gases ideales es independiente de la presión, de lo que se deduce que el número de Reynolds del gas, Re = $Dw/S\mu$ y por consiguiente el factor de fricción f, ha de ser constante. Integrando la Fc. 15.5–18 se obtiene

$$-\ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1\right]\frac{RT_1}{Mv_1^2} + \frac{2fL}{D} = 0 \qquad (15.4\text{–}19)$$

Esta ecuación expresa p_2 en función de magnitudes conocidas, excepto f que puede calcularse fácilmente. La viscosidad cinemática del metano a 6,8 atm y 21° C es aproximadamente $2{,}42 \times 10^{-6}$ m^2 seg^{-1}, y por consiguiente Re = (0,60 m) (12,2 m seg^{-1})/($2{,}42 \times 10^{-6}$ m^2 seg^{-1})$=3{,}02 \times 10^6$. El factor de fricción, obtenido a partir de la Fig. 6.2-2, es 0,0025. Sustituyendo los valores numéricos en la Ec. 15.4-19, se obtiene

$$-\ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1\right]\frac{(8314)(294)}{(16{,}04)(148{,}8)} + \frac{2(0{,}0025)(16.000)}{(0{,}60)} = 0 \qquad (15.4\text{–}20)$$

o

$$-\ln\frac{p_2}{p_1} + 512\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1\right] + 133 = 0 \qquad (15.4\text{–}21)$$

Resolviendo esta ecuación para p_1 = 6,8 atm., se obtiene p_2 = 5,85 atm. Ahora se puede aplicar ya fácilmente el balance de energla mecánica al compresor.

b. Flujo a través del compresor. En este caso la Ec. 15.2-3 puede ponerse en esta forma

$$-\hat{W} = \tfrac{1}{2}(v_3^2 - v_2^2) + \int_2^3 \frac{1}{\rho}dp + \hat{E}_v \qquad (15.4\text{–}22)$$

Para evaluar la integral se supone[2] que la compresión es adiabática y se desprecia $\hat{E}_v$ entre los planos «2» y «3». Utilizando los resultados del Ejemplo 10.5-6, la Fc. 15.4–22 puede expresarse así

$$-\hat{W}' = \tfrac{1}{2}(v_3^2 - v_2^2) + \frac{p_2^{1/\gamma}}{\rho_2}\int_{p_2}^{p_3} p^{-1/\gamma}\,dp$$

$$= \frac{v_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\right] + \frac{RT_2}{M}\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \qquad (15.4\text{–}23)$$

---

2 Estas suposiciones se admiten generalmente en el diseño de compresores-refrigeradores. Obsérvese que la energía necesaria para accionar el compresor es mayor que al trabajo calculado $-\hat{W}'$, debido a (i) $\hat{E}_v$ entre «2» y «3», (ii) pérdidas mecánicas en el compresor mismo, y (iii) errores debido al camino p-ρ supuesto. Normalmente, la energía necesaria para accionar la bomba es, por lo menos, de 10 a 15 por ciento superior a $-\hat{W}'$.

en la *que* $-\hat{W}'$ *es* la energía *calculada* que se precisa para accionar el compresor. Substituyendo los valores numéricos en la **Ec.** 15.4-23, se obtiene

$$-\hat{W}' = \frac{148,8}{2 \times 9,81}(1 - 1,35) + \frac{(8314)(294)}{(16,04)(9,81)}\frac{(1,3)}{(0,4)}\left[(1,16)^{\frac{0,3}{1,3}} - 1\right]$$

$$= -2,7 + 235,5 = 232,8 \text{ kg}_f\text{m kg}_m^{-1} \qquad (15.4\text{-}24)$$

La potencia necesaria para comprimir el fluido es

$$-w\hat{W}' = -\frac{\pi D^2}{4}\frac{p_1 M}{RT_1} v_1 \hat{W}'$$

$$\frac{\pi(0,36)\,(6,8)\,(16,04)}{4(0,082)\,(294)}(12,2)(232,8) \text{ kg}_f\text{m seg}^{-1}$$

$$= 3630 \text{ kg}_f\text{m seg}^{-1} \text{ o bien } 478 \text{ hp} \qquad (15.4\text{-}25)$$

La potencia necesaria para el caso de flujo adiabático, tanto en el compresor como en la conducción, concuerda satisfactoriamente con el resultado anterior. (**Véase** el problema 15.B).

Ejemplo 15.4-4. Mezcla de dos corrientes de gases ideales

Dos corrientes turbulentas de un mismo gas ideal que **circulan** en **régimen** estacionario con distinta velocidad, temperatura y presión, se mezclan en la forma que se indica en la Fig. 15.4-4. Calcular la velocidad, temperatura y presión de la corriente que resulta.

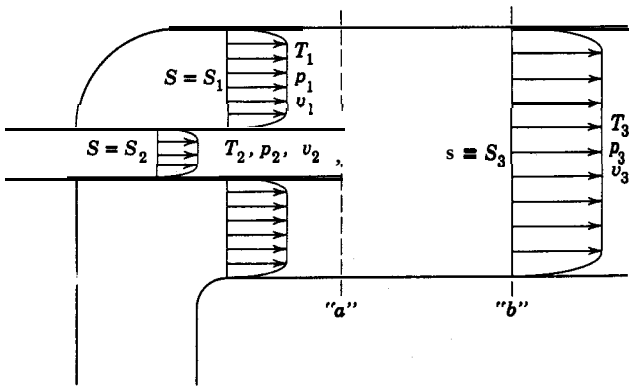


Fig. 15.4-4. **Mezcla** de dos corrientes de gases ideales.

Solución. El comportamiento ea en **este** caso más complejo que en el ejemplo 7.5-2 (fluidos **isotérmicos** no compresibles), debido a que las variaciones de densidad y temperatura pueden ser considerables. Por esta razón, ademas de los balances de materia y **can-**

tidad de movimiento, habrá que utilizar el balance macroscópico de energía en estado estacionario, Ec. 15.1-4 y la ecuación de estado de los gases ideales. Teniendo en cuenta estas excepciones, se procede de igual forma que en el ejemplo 7.5-2.

Como planos de referencia se toman las secciones en que las corrientes comienzan a mezclarse (plano «*a*») y otra suficientemente alejada aguas abajo, de forma que se haya efectuado la mezcla completa (plano «*b*»). Se supone, como en el Ejemplo 7.5-2, que los perfiles de velocidad son planos, que no existen variaciones de energía potencial y que los esfuerzos cortantes sobre la pared del tubo son despreciables. Se desprecian también las variaciones del calor específico del fluido y se supone que la operación es adiabática. Según esto, resulta:

(materia) $$w_3 = w_1 + w_2 \qquad (15.4-26)$$

(cantidad de movimiento) $$w_3 v_3 + p_3 S_3 = w_1 v_1 + p_1 S_1 + w_2 v_2 + p_2 S_2 \qquad (15.4-27)$$

(energía) $$w_3[\hat{C}_p(T_3 - T^\circ) + \tfrac{1}{2}v_3^2] = w_1[\hat{C}_p(T_1 - T^\circ) + \tfrac{1}{2}v_1^2] + w_2[\hat{C}_p(T_2 - T^\circ) + \tfrac{1}{2}v_2^2] \qquad (15.4\text{-}28)$$

(ecuación de estado) $$p_3 = \frac{\rho_3 R T_3}{M} \qquad (15.4-28a)$$

Las incógnitas en estas ecuaciones son $w_3 = \rho_3 v_3 S_3$, p_3, T_3 y ρ_3, siendo T° *la* temperatura de referencia para la entalpia. Multiplicando el balance de materia por $\hat{C}_p T^\circ$ y combinando el resultado con la Ec. 15.4-28, se obtiene

(energía) $$w_3(\hat{C}_p T_3 + \tfrac{1}{2}v_3^2) = w_1(\hat{C}_p T_1 + \tfrac{1}{2}v_1^2) + w_2(\hat{C}_p T_2 + \tfrac{1}{2}v_2^2) \qquad (15.4\text{-}29)$$

Los segundos miembros de las Ecs. 15.4-27 y 29 son conocidos y se designan por w, P y E, respectivamente.

Utilizando la ley de los gases ideales se puede eliminar de la Ec. 15.4-27 la presión p_3 y el área de la sección S_3:

(cantidad de movimiento) $$v_3 + \frac{R T_3}{M v_3} = \frac{P}{w} \qquad (15.4\text{-}30)$$

Eliminando T_3 entre las Ecs. 15.4-29 y 30 se obtiene

$$v_3^2 - \left[2\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{P}{w}\right]v_3 + 2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\frac{E}{w} = 0 \qquad (15.4\text{-}31)$$

en la que $\gamma = \hat{C}_p/\hat{C}_v$. Resulta así una ecuación de segundo grado de v_3 en función de w, P, E y γ, que son conocidos. Las soluciones son

$$v_3 = \frac{P}{w}\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)\frac{wE}{P^2}}\right] \qquad (15.4\text{-}32)$$

Se puede demostrar (véase problema 15.G) que cuando el término entre paréntesis es la unidad, la velocidad de la corriente final es sónica. Por consiguiente, una de las soluciones

de v_3 es generalmente supersónica y la otra subsónica. En el proceso de mezcla que estamos considerando solamente se puede obtener la solución menor (subsónica), puesto que, como se ha demostrado en el ejemplo **10.5–5,** el flujo supersónico es inestable en presencia de cualquier perturbación de cierta consideración.

Una vez que se conoce la velocidad v_3, pueden calcularse la presión y la temperatura a partir de las **Ecs.** 15.4-27 y 30.

Es interesante tener en cuenta que $\hat{E}_v$ no se puede calcular con exactitud a partir de la Fc. 15.2-3, puesto que no se. conocen los caminos termodinámicos que siguen las corrientes de los fluidos.

Ejemplo 15.4-5. Flujo de fluidos compresibles a través de orificios

Extender la deducción del ejemplo 7.5-4 al caso de flujo de fluidos compresibles a **través** de medidores de orificio y venturímetros.

Solución. Se comienza, igual que en el ejemplo 7.5-4, por expresar los balances de materia y **energía** mecánica en estado estacionario entre los planos de referencia «1» y «2» de los dos medidores de flujo que se indican en la Fig. 15.4-5. Para el caso de fluidos compresibles, dichos balances vienen dados por

(materia) $$w = \rho_1\langle v_1\rangle S_1 = \rho_2\langle v_2\rangle S_2 \tag{15.4-33}$$

(energía mecánica) $$\frac{\langle v_1\rangle^2}{2\alpha_2} - \frac{\langle v_1\rangle^2}{2\alpha_1} + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp + \tfrac{1}{2}\langle v_2\rangle^2 e_v = 0 \tag{15.4-34}$$

Eliminando $\langle v_1\rangle$ y $\langle v_2\rangle$ entre estas ecuaciones se obtiene una expresión para la velocidad de flujo de materia:

$$w = \rho_2 S_2 \sqrt{\frac{-2\alpha_2\int_1^2 (1/\rho)\,dp}{1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\dfrac{\rho_2 S_2}{\rho_1 S_1}\right)^2 + \alpha_2 e_v}} \tag{15.4-35}$$

Teniendo en cuenta las suposiciones del ejemplo 7.5 -4: (i) $e_v = 0$, **(ii)** $\alpha_1 = 1$, (iii) $\alpha_2 = (S_2/S_0)^2$, la **Ec.** 15.4-35 se puede escribir así:

$$w = C_d\rho_2 S_0 \sqrt{\frac{-2\int_1^2 (1/\rho)\,dp}{1 - \left(\dfrac{\rho_2 S_0}{\rho_1 S_1}\right)^2}} \tag{15.4–36}$$

El **coeficiente** de descarga C_d **de** la Fc. 15.4-36 se utiliza para corregir los errores introducidos por las tres anteriores suposiciones, y es preciso determinarlo experimentalmente. Para tubos de Venturi es conveniente situar el plano «2» en el punto de mínima sección, de forma que S_2 = Se. Por lo tanto, α_2 es muy aproximadamente igual a la unidad y experimentalmente se ha comprobado que C_d es casi igual para fluidos compresibles e incompresibles, siendo su valor **0,98** para tubos de Venturi bien construidos. Para **medi-**

dores de orificio, la contracción de la corriente de fluido en el plano «2» es algo mayor en el caso de fluidos no compresibles y es preciso utilizar un coeficiente de descarga distinto.3

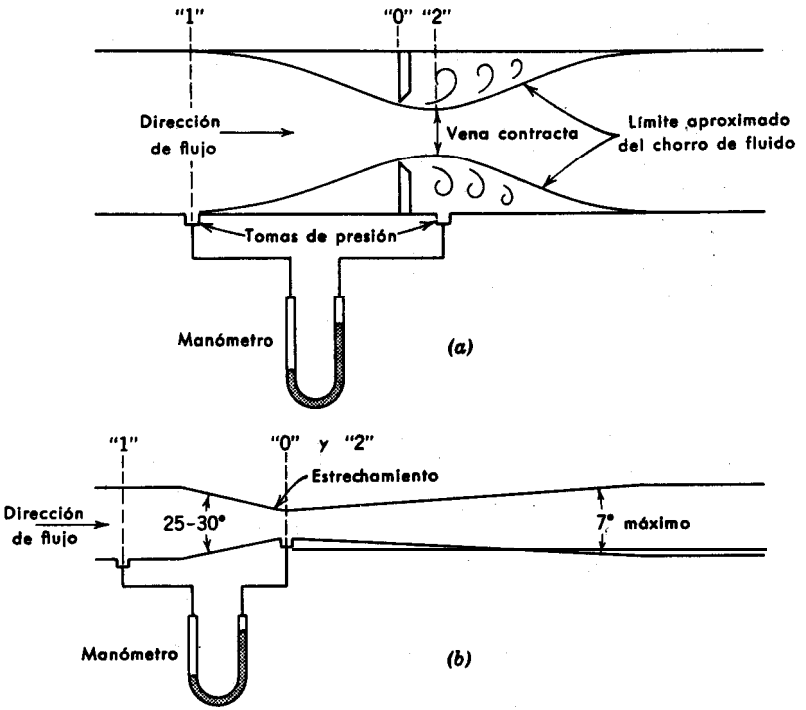


Fig. 15.4-5. (*a*) Medidor de orificio, (*b*) tubo de Venturi

Para utilizar la Ec. 15.4-36 hay que conocer la densidad del fluido en función de la presión; es decir, que es preciso conocer el camino termodinámico de la expansión y la ecuación de estado del fluido. En la mayor parte de los casos resulta aceptable suponer un comportamiento adiabático sin fricción. Para el caso de gases ideales $p\rho^{-\gamma}$ = constante, siendo $\gamma = \hat{C}_p/\hat{C}_v$ (véase ejemplo 10.5-6); según esto, la Fc. 15.4-36 resulta

$$\left[\begin{array}{l}\text{flujo adiabático de}\\ \text{gases ideales sin}\\ \text{fricción}\end{array}\right] \quad w = C_d\rho_2 S_0 \sqrt{\frac{2\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}{1-\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}}}} \qquad (15.4-37)$$

Esta formula expresa la velocidad de flujo de materia en función del coeficiente de descarga y de magnitudes que se Pueden medir directamente; los valores del coeficiente de descarga se pueden encontrar en los libros de ingeniería.[3]

§ 15.5 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTADO NO ESTACIONARIO

En § 15.4 se han estudiado problemas de estado estacionario. En esta sección se aborda la descripción del comportamiento no estacionario de los sistemas de flujo no isotérmico. Se presta especial atención a los fenómenos de transmisión de calor que dependen del tiempo, y que pueden describirse mediante el balance macroscópico de energía en estado no estacionario. Estos problemas son importantes para la estimación de diversas operaciones de calentamiento en la industria así como también para los procesos de instrumentación y control.

Ejemplo 15.5-1. Calentamiento de un líquido en un tanque agitado[1]

Un tanque cilíndrico capaz para 28 m^3 de líquido, está provisto de un agitador de potencia suficiente para mantener el líquido a temperatura uniforme. (Véase Fig. 15.5—1). Se transmite calor al líquido mediante un serpentín dispuesto de tal forma que el área disponible para la transmisión de calor es proporcional a la cantidad de líquido existente en el tanque. El serpentín de calefacción consta de 10 espiras de 125 cm de diámetro, construidas con un tubo de 2,5 cm de diámetro externo. El tanque se alimenta de forma continua con 10 kg min^{-1} de agua a 20° C, comenzando con el tanque vacío en el instante $t = 0$. Por el interior del tubo se introduce vapor de agua a 105° C y el coeficiente global de transmisión de calor es 500 $kcal\ hr^{-1}$ m-z ^{o} C^{-1}. ¿Cuál es la temperatura del agua cuando se llena el tanque?

Solución. Este tipo de problemas se resuelve mejor utilizando símbolos e introduciendo los valores numéricos al final. Para ello se utiliza la siguiente notación:

A_0 = área total disponible para la transmisión de calor
A(t)'= área de transmisión de calor en un instante
V_0 = volumen de líquido a tanque lleno
V(r) = volumen de liquido eh el tanque en un instante
T = temperatura del líquido en un instante
T_1 = temperatura del líquido a la entrada
T_0 = temperatura del líquido cuando el tanque esta lleno
T_s = temperatura del vapor de agua
U_0 = coeficiente global de transmisión de calor
t = tiempo transcurrido a partir del momento en que comienza a llegar agua
$t_0 = \rho V_0/w$ = tiempo necesario para llenar el tanque
w = velocidad de flujo del agua que entra en el tanque
ρ = densidad del liquido

---

3 Véase, por ejemplo, J. H. PERRY, *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición, pp. 402-403.

1 Este problema está tomado, en una forma modificada, de W. R. MARSHALL, Jr. y R. L. PIGFORD, *Applications of Differential Equations to Chemical Engineering Problems*, University of Delaware Press, Newark (1947), pp. 16-18.

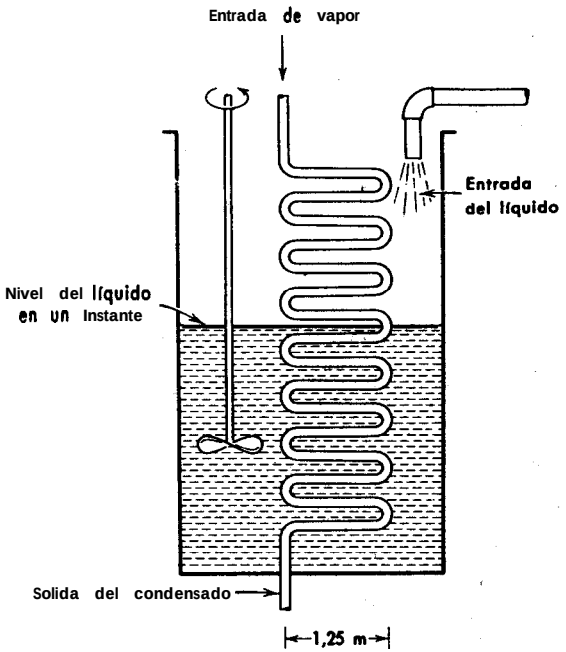


Fig. 15.5-1. Calentamiento de un líquido en un tanque con nivel de líquido variable.

Para el planteamiento del problema se hacen las siguientes suposiciones:

a. La temperatura del vapor en el serpentín es constante
b. La densidad y el calor específico del agua no varían mucho con la temperatura.
c. Como el fluido es aproximadamente no compresible, $\hat{C}_p = \hat{C}_v$.
d. El agitador mantiene la temperatura uniforme en toda la masa.
e. El coeficiente de trasmisión de calor es independiente de la posición y del tiempo.
f. Las paredes del tanque son adiabáticas.

Se toma como sistema el fluido contenido en el tanque. La Ec. 15.1-3 describe la forma en que varía con el tiempo la energía del sistema. El término E_{tot} del primer miembro comprende la energía interna, cinética y potencial, pudiendo en este problema despreciarse las dos últimas. En el segundo miembro se pueden omitir el término de trabajo W y los términos de energía cinética y potencial, (que serán pequeños en comparación de los demás). Puesto que no hay corriente de salida, $w_2 = 0$. Por lo tanto, para el sistema que estamos considerando,

$$\frac{d}{dt} U_{tot} = w\hat{H}_1 + Q \qquad (15.5\text{–}1)$$

lo que indica que la energía interna del sistema aumenta debido a la adición de fluido de entalpia $\hat{H}_1$ y a la adición de calor mediante el serpentín de vapor.

Como no se pueden establecer valores absolutos-para U_{tot} y $\hat{H}_1$, se elige la temperatura T_1 como plano de referencia térmica. Según esto, $H_1 = 0$ y $U_{tot} = \rho\hat{C}_v V(T - T_1) = \rho\hat{C}_p V(T - T_1)$. Además, la velocidad de adición de calor Q al sistema viene dada por $Q = U_0 A(T_s - T)$. Por lo tanto, la Ec. 15.5-1, resulta

$$\rho\hat{C}_p \frac{d}{dt} V(T - T_1) = U_0 A(T_s - T) \qquad (15.5\text{–}2)$$

El área y el volumen en un instante están relacionados de una forma sencilla con el área y el volumen totales, de acuerdo con las ecuaciones

$$V(t) = \frac{wt}{\rho}; \qquad A(t) = \frac{wt}{\rho V_0} A_0 \qquad (15.5\text{–}3,4)$$

Substituyendo estas expresiones en la Ec. 15.5-2, se obtiene

$$U_0 A_0 \frac{wt}{\rho V_0}(T_s - T) = w\hat{C}_p(T - T_1) + w\hat{C}_p t\left(\frac{d(T - T_1)}{dt}\right) \qquad (15.5\text{–}5)$$

que se resuelve con la condición inicial de que para $t = 0$, $T = T_1$.

La Ec. 15.5-5, juntamente con la condición inicial, constituye el planteamiento analítico del problema de acuerdo con las suposiciones que se han indicado más arriba. Podría resolverse la ecuación diferencial 15.5 -5 tal como se ha planteado, pero es preferible utilizar las variables reducidas:

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_s - T_1} = \text{temperatura reducida} \qquad (15.5\text{-}6)$$

$$\tau = \frac{t}{t_0} = \frac{wt}{\rho V_0} = \text{tiempo reducido} \qquad (15.5\text{-}7)$$

La temperatura reducida representa la fracción del acercamiento de la temperatura del fluido a la temperatura del vapor. El tiempo reducido representa el tiempo con relación al que se requiere para llenar totalmente el tanque. Para expresar la Ec. 15.5 -5 en función de las anteriores variables adimensionales, se multiplica toda la ecuación por $[1/w\hat{C}_p(T_s - T_1)]$ para obtener

$$\left(\frac{U_0 A_0}{w\hat{C}_p}\right)\left(\frac{wt}{\rho V_0}\right)\left(1 - \frac{T - T_1}{T_s - T_1}\right) = \left(\frac{T - T_1}{T_s - T_1}\right) + t\frac{d}{dt}\left(\frac{T - T_1}{T_s - T_1}\right) \qquad (15.5\text{–}8)$$

o bien

$$N\tau(1 - \Theta) = \Theta + \tau\frac{d\Theta}{d\tau} \qquad (15.5\text{–}9)$$

siendo $N = U_0 A_0 / w\hat{C}_p$ un grupo adimensional que aparece en la ecuación diferencial. La ecuación puede simplificarse todavía más teniendo en cuenta que si el último término se multiplica por N/N, la variable de tiempo reducido aparece siempre en la combinación Nt, que se designa por η. El planteamiento analítico final del problema es

ecuación diferencial

$$\frac{d\Theta}{d\eta} + \left(1 + \frac{1}{\eta}\right)\Theta = 1 \qquad (15.5-10)$$

condición inicial

$$\Theta = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \qquad (15.5\text{-}11)$$

Se ve en seguida que Θ ha de ser una función exclusiva de η. Resulta mas sencillo operar con la Fc. 15.5−10, expresada en función de variables adimensionales, que con la Ec. 15.5-5. La Fc. 15.5-10 es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución es

$$\Theta = 1 - \frac{1}{\eta} + \frac{C}{\eta \exp \eta} \qquad (15.5\text{-}12)$$

La constante de integración puede determinarse a partir de la condición inicial, multiplicando la Fc. 15.5-12 por η y tomando η = 0; de esta forma se encuentra que C = 1, con lo que la solución final de la ecuación diferencial es

$$\Theta = 1 - \frac{1 - \exp(-\eta)}{\eta} \qquad (15.5\text{–}13)$$

En la Fig. 15.5 -12 se representa gráficamente esta función. Finalmente, la temperatura del liquido cuando el tanque está lleno, viene dada por la Fc. 15.5-13 cuando τ = 1 (o bien η = N); en función de las variables originales el resultado es

$$\frac{T_0 - T_2}{T_s - T_1} = 1 - \frac{1 - \exp(-U_0A_0/w\hat{C}_p)}{(U_0A_0/w\hat{C}_p)} \qquad (15.5\text{-}14)$$

Cálculo numérico. Es fácil comprobar que para los datos del problema el grupo adimensional $N = U_0A_0/w\,\hat{C}_p$ tiene el valor de 2,57. Para este valor, la Fc. 15.5 14 conduce a $(T_0 - T_1)/(T_s - T_1)$ = 0,640, de donde T_0 = 74,5° C.

Ejemplo 15.5-2. Operación de un sistema sencillo de control de temperatura

Se desea controlar la temperatura de un liquido que fluye a través del tanque agitado perfectamente aislado, que se indica en la Fig. 15.5-3. El volumen V_l de líquido contenido en el tanque y la velocidad másica de flujo del líquido w son constantes, pero en cambio puede variar con el tiempo la temperatura a la que entra el líquido. Para realizar el control que se desea, se introduce en el líquido una resistencia eléctrica de calefacción de área A, y se coloca un elemento sensible a la temperatura en la corriente de salida, que puede suponerse que está a la misma temperatura que el líquido en el interior del tanque. Estos dos dispositivos se conectan a un controlador de temperatura que suministra energía a la resistencia de calefacción a razón de $Q_e = b(T_{máx} - T)$, siendo T la temperatura del líquido del tanque, y b y $T_{máx}$ dos constantes previamente determinadas. $T_{máx}$ es la temperatura máxima de operación para la que se ha diseñado el controlador. Se puede suponer que en marcha normal T es siempre menor que $T_{máx}$. La resistencia de calefacción comunica energía al líquido del tanque a razón de $Q_c = UA(T_c - T)$, siendo U el coeficiente global de transmisión de calor entre la resistencia y el líquido y T_c la temperatura de la resistencia, que puede considerarse uniforme en cualquier instante.

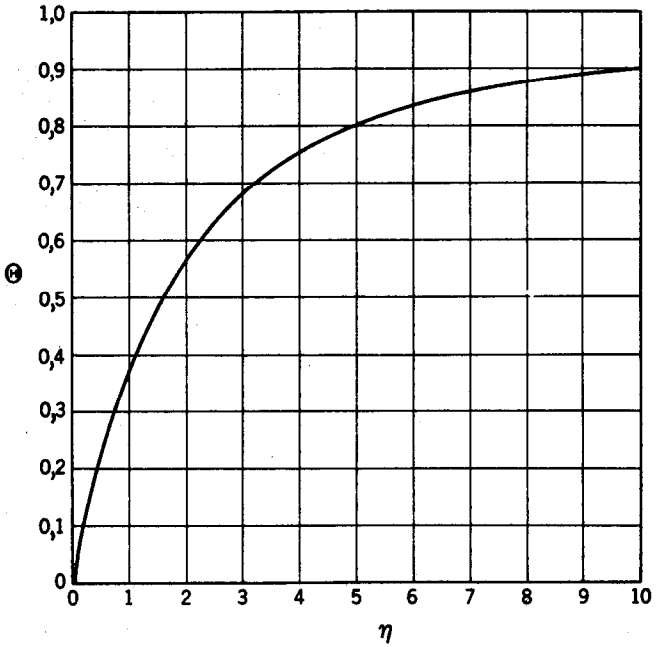


Fig. 15.5-2. Representación de la temperatura adimensional frente a $\eta = N_T$, de acuerdo con la **Ec.** 15.5-13. [W. R. **MARSHALL,** Jr. y R. L. **PIGFORD,** ***Application of Differential Equations to Chemical Engineering,*** University of Delaware **Press,** Newark (1947) p. **18.]**

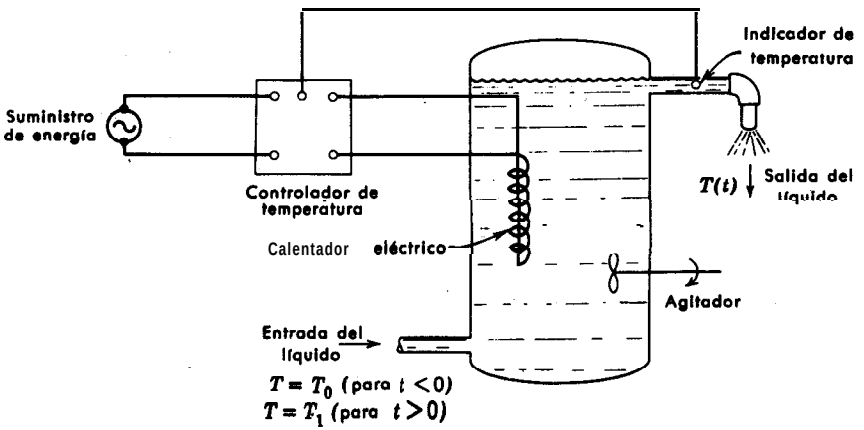


Fig. 15.5-3. **Operación** de un sistema sencillo de control de temperatura.

Hasta el instante $t = 0$ el sistema ha estado operando en estado estacionario, siendo la temperatura del líquido $T_i = T_0$. La temperatura del líquido en el interior del tanque y a la salida del mismo era $T(O)$.

En el instante $t = 0$ la temperatura de la corriente de entrada pasa bruscamente a ser $T_i = T_1$. Como consecuencia de esta perturbación, la temperatura del tanque comienza a aumentar y el indicador de temperatura situado en la corriente de salida envía una señal al controlador que hace disminuir la potencia comunicada a la resistencia de calefacción. De esta forma, la temperatura del líquido del tanque alcanzará un nuevo valor de estado estacionario, $T(\infty)$. ge desea describir el comportamiento de la temperatura del líquido del tanque con el tiempo.

En este ejemplo se utiliza la siguiente nomenclatura:

$T(t)$ = temperatura instantánea del líquido en el interior del tanque y en la corriente de salida.
T_c = temperatura instantánea de la resistencia
T_i = temperatura instantánea de la corriente de entrada.
$\hat{C}_c$, $\hat{C}_l$ = calores específicos de la resistencia y del líquido, respectivamente.
V_c, V_l = volúmenes de la resistencia y del líquido respectivamente.
ρ_c, ρ_l = densidades de la resistencia y del líquido, respectivamente.
A = área de la resistencia.
U = coeficiente de transmisión de calor entre la resistencia y el líquido
Q_c = velocidad de transmisión de calor desde la resistencia al líquido
Q_e = velocidad de transmisión de calor desde el controlador a la resistencia.

Solución. Se describe en primer lugar el balance macroscópico de energía en estado no estacionario, Ec. 15.1-3, para el líquido contenido en el interior del tanque y para la resistencia de calefacción:

(liquido)
$$\rho_l V_l \hat{C}_l \frac{dT}{dt} = UA(T_c - T) + w\hat{C}_l(T_i - T) \qquad (15.5-15)$$

(resistencia)
$$\rho_c V_c \hat{C}_c \frac{dT_c}{dt} = -UA(T_c - T) + b(T_{máx} - T) \qquad (15.5\text{-}16)$$

Obsérvese que al escribir la Ec. 15.5 − 15 se han despreciado las variaciones de energía cinética y energía potencial, así como también la potencia comunicada al agitador.

a. Comportamiento de estado estacionario para $t < 0$. Tomando iguales a cero las derivadas con respecto al tiempo de las Ecs. 15.5-15 y 16 y sumándolas, se obtiene para $t < 0$ (cuando $T_i = T_0$)

$$T(O) = \frac{w\hat{C}_l T_0 + bT_{máx}}{w\hat{C}_l + b} \qquad (15.5\text{-}17)$$

La forma de estado estacionario de la Ec. 15.5-16 resulta

$$T_c(0) = \frac{bT_{máx}}{UA} + \left(1 - \frac{b}{UA}\right)T(0) \qquad (15.5\text{-}18)$$

b. Comportamiento de estado estacionario para $t \gg 0$. Cuando semejantes operaciones se efectúan con $T_i = T_1$ obtenemos para $t \gg 0$

$$T(\infty) = \frac{w\hat{C}_l T_1 + bT_{máx}}{w\hat{C}_l + b} \tag{15.5–19}$$

y

$$T_c(\infty) = \frac{bT_{máx}}{UA} + \left(1 - \frac{b}{UA}\right) T(\infty) \tag{15.540}$$

c. Comportamiento de estado no estacionario para $t > 0$. Es conveniente definir variables adimensionales utilizando las magnitudes de estado estacionario para $t < 0$ y $t \gg 0$.

$$\Theta = \frac{T - T(\infty)}{T(0) - T(\infty)} = \text{temperatura adimensional del líquido} \tag{15.5-21}$$

$$\Theta_c = \frac{T_c - T_c(\infty)}{T_c(0) - T_c(\infty)} = \text{temperatura adimensional de la resistencia} \tag{15.5-22}$$

$$\tau = \frac{UAt}{\rho_l V_l \hat{C}_l} = \text{tiempo adimensional} \tag{15.5-23}$$

También se definen los siguientes parámetros adimensionales :

$$R = \frac{\rho_l V_l \hat{C}_l}{\rho_0 V_c \hat{C}_c} = \text{relación de capacidades térmicas} \tag{15.5-24}$$

$$F = \frac{w\hat{C}_l}{UA} = \text{parámetro de velocidad de flujo} \tag{15.5-25}$$

$$B = \frac{b}{UA} = \text{parámetro del controlador} \tag{15.5-26}$$

En función de estos términos, los balances de estado estacionario de las Ecs. 15.5– 15 y 16 resultan

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = (1 - B)\,\Theta_c - \Theta(1 + F) \tag{15.5-27}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d\Theta_c}{d\tau} = -\Theta_c + \Theta \tag{15.5–28}$$

Eliminando Θ_c entre estas dos ecuaciones se obtiene una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden para la temperatura del líquido en función del tiempo:

$$\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + (1 + F + R)\frac{d\Theta}{d\tau} + R(B + F)\Theta = 0 \tag{15.5–29}$$

Es interesante observar que esta ecuación diferencial es la misma que se ha obtenido para el manómetro amortiguado, Ec. 7.6-21. La solución general tiene por lo tanto la forma de una cualquiera de las Ecs. 7.6-23 6 24:

$$\Theta = C_+ e^{m_+\tau} + C_- e^{m_-\tau} \qquad (m_+ \neq m_-) \tag{15.5-30}$$

o

$$\Theta = C_1 e^{m\tau} + C_2 \tau e^{m\tau} \qquad (m_+ = m_- = m) \tag{15.5-31}$$

siendo

$$m_\pm = \tfrac{1}{2}[-(1 + F + R) \pm \sqrt{(1 + F + R)^2 - 4R(B + F)}] \tag{15.5-32}$$

Las variaciones de temperatura del fluido son análogas a las fluctuaciones del manómetro amortiguado del ejemplo 7.6-2. Es decir, que la temperatura del fluido se aproxima a su valor final $T(\infty)$ con o sin oscilación. Los parametros del sistema intervienen en la va-

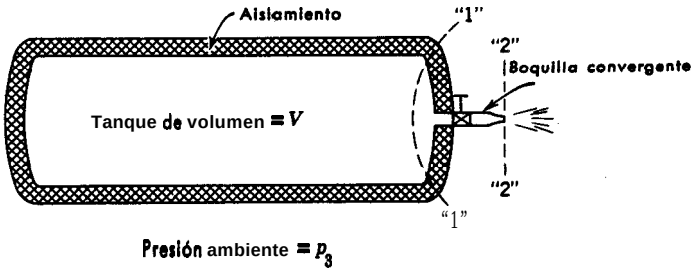


Fig. 15.5-4. Expansión libre de una carga de un fluido compresible.

riable de tiempo τ y en las constantes B, F y R. Por consiguiente, es preciso realizar cálculos numéricos para poder establecer las ventajas relativas del super e infra-amortiguamiento en el sistema.

Ejemplo 15.5-3. Expansión libre de una carga de un fluido compresible

Un fluido que inicialmente esta a $T = T_0$, $p = p_0$, y $\rho = \rho_0$, se descarga de un gran tanque inmóvil y térmicamente aislado, a través de una pequeña boquilla convergente, tal como se indica en la Fig. 15.5-4. Demostrar como se puede determinar en función del tiempo la fracción de masa del fluido que queda en. el tanque ρ/ρ_0. Deducir las ecuaciones de operación para el caso específico de un gas ideal.

Solución. Consideremos, por conveniencia, que el tanque esta dividido en dos partes separadas por la superficie «1». (Véase Fig.15.5 -4). Se supone que la superficie «1» está lo bastante cerca de la salida del tanque como para que toda la masa de fluido esté a su izquierda, pero suficientemente lejos de la salida de forma que la velocidad en la superficie «1» sea despreciable. Se supone también que las propiedades medias del fluido situado a la izquierda de «1» son idénticas que en dicha superficie «1». Vamos a considerar separadamente el comportamiento de estas dos partes del sistema.

a. Fluido contenido en el tanque. El balance de energía en estado no estacionario aplicado a la región situada a la izquierda de «1», Fc. 15.1-3, conduce a

$$\frac{d}{dt}[\rho_1 V(\hat{U}_1 + \Phi_1)] = -w_1\left(\hat{U}_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \Phi_1\right) \tag{15.5-33}$$

siendo V el volumen total del sistema considerado, y w_1 la velocidad **másica** de flujo procedente del sistema. Al expresar esta ecuación se ha despreciado la energía cinética del fluido.

El balance de materia para la parte del sistema situada a la izquierda de «1» es

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V) = -w_1 \tag{15.5-34}$$

Combinando los balances de materia y energía se obtiene

$$\rho_1\left(\frac{d\hat{U}_1}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}_1}{dt}\right) = \frac{p_1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} \tag{15.5-35}$$

Para un sistema en reposo sobre el que no actúa ninguna otra fuerza externa distinta de la de gravedad, $d\hat{\Phi}_1/dt = 0$, de forma que

$$\frac{d\hat{U}_1}{d\rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1^2} \tag{15.5-36}$$

Combinando esta ecuación con las ecuaciones térmica y calórica de estado del fluido, se puede obtener $p_1(\rho_1)$ y $T_1(\rho_1)$. Resulta, por consiguiente, que las condiciones del fluido contenido en el tanque dependen solamente del grado de vaciado del mismo y no de la velocidad de descarga. Para el caso especial de un gas ideal de $\hat{C}_v$ constante, para el que $d\hat{U} = \hat{C}_v dT$ y $p = \rho RT/M$, la integración de la **Ec. 15.5−36** conduce a

$$p_1\rho_1^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma} \tag{15.5-37}$$

siendo $\gamma = C_p/C_v$.

b. Descarga del fluido a través de la boquilla. Para simplificar supondremos que el flujo entre las superficies «1» y «2» es adiabático y sin fricción. Por lo tanto, el comportamiento de esta parte del sistema viene descrito por el balance isentrópico de energía mecánica en estado no estacionario, **Ec.** 15.2-2. Sin embargo, para el caso de orificios relativamente pequeños, como el que se considera aquí, $(d\hat{E}_{tot}/dt)$ es pequeño y w_1 es aproximadamente igual a w_2. Por esta razón, se supone un comportamiento de «estado cuasi-estacionario» y se utiliza la ecuación de Bernoulli para obtener una descripción aproximada del sistema :

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\,dp = 0 \tag{15.5-38}$$

Para el caso específico de gases ideales, se pueden utilizar los resultados del ejemplo 15 4-5 para expresar la velodidad instantánea de descarga:

$$w_2 = -V\frac{d\rho_1}{dt} = S_2\sqrt{2p_1\rho_1\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(2/\gamma)} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)}\right]} \tag{15.5-39}$$

siendo S_2 el área del orificio de la boquilla. Mediante la **Ec.** 15.5-37 se puede eliminar

p_1 de la Ec. 15.5 -39 y obtener una expresión para la fracción de la masa original del fluido, ρ_1/ρ_0, que queda en el tanque en un instante cualquiera t:

$$t = \frac{V/S_2}{\sqrt{2\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)}} \int_{\frac{\rho_1}{\rho_0}}^{1} \frac{d\eta}{\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{2/\gamma}\eta^{\gamma-1} - \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1+(1/\gamma)}}} \qquad (15.5\text{–}40)$$

La presión p_2 en el orificio de la boquilla debe de evaluarse con todo cuidado. Para bajas velocidades de flujo, p_2 es igual a la presión ambiente, análogamente al caso de un fluido incompresible. (Véase problema 15.C.) Sin embargo, el análisis de la Ec. 15.5 -39 indica que al reducir la presión ambiente, la velocidad másica de flujo que se obtiene alcanza un valor máximo para una relación crítica de presiones:

$$r = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{crit}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (15.5\text{–}41)$$

Para el aire ($\gamma = 1{,}4$) esta relación crítica de presiones es 0,53. Si la presión ambiente se reduce más, la presión del lado de dentro de la boquilla seguirá teniendo el valor p_2, calculado a partir de la Ec. 15.5-41, y la velocidad másica de flujo será independiente de la presión ambiente. Se puede demostrar fácilmente que la velocidad de descarga en estas condiciones es

$$w_{\text{máx}} = S_2\sqrt{\gamma p_1 \rho_1 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \qquad (15.5\text{–}42)$$

Por consiguiente, para $p_3/p_1 < r$, la Ec. 15.5−40 puede expresarse en esta forma más sencilla

$$t = \frac{V/S_2}{\sqrt{\gamma\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}} \int_{\frac{\rho_1}{\rho_0}}^{1} \frac{d\eta}{\eta^{(\gamma+1)/2\gamma}} \qquad (15.543)$$

o bien

$$t = \frac{V/S_2}{\sqrt{\gamma\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}} \cdot \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right] \quad (p_3/p_1 < r) \qquad (15.5\text{–}44)$$

Si inicialmente p_3/p_1 es menor que r, se pueden utilizar las Ecs. 15.5 -44 y 40 para calcular el tiempo total de descarga.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Indicar el significado físico de cada uno de los términos de los cuatro balances macroscópicos.
2. ¿Cómo están relacionadas las tres ecuaciones de variación con los cuatro balances macroscópicos?

3. ¿Cada uno de los cuatro términos de la Ec. 15.1-3 que están entre paréntesis representa una forma de energia? Explíquese.

4. Comprobar las expresiones de $\Delta\hat{H}$ en las Ecs. 15.1−5 y 6.

5. ¿Cuánto vale $\Delta\hat{H}$ para un gas monoatómico a baja densidad?

6. Comparar las distintas clases de velocidades medias que intervienen en los cuatro balances macroscópicos.

7. Discutir la evaluación de $\int(1/\rho)\,dp$ de acuerdo con la Fig. 15.2-1.

8. ¿Qué información se puede obtener de la Ec. 15.2-3 para un fluido en reposo?

9. ¿Qué información se obtiene para un fluido incompresible combinando las Ecs. 15.1-4 y 15.2−3?

PROBLEMAS

15.A$_1$ Velocidades de transmisión de calor en un cambiador de tubos concéntricos

a. A través de la superficie «2» del cambiador de calor del ejemplo 15.4-2 se introduce aceite caliente que ha de enfriarse con agua que entra por la superficie «1»; es decir, que el cambiador opera *en contracorriente.*

Calcular el área A del cambiador que se necesita si el coeficiente de transmisión de calor U es 1000 kcal $hr^{-1}\,m^{-2}\,°C^{-1}$, y las propiedades de las corrientes de los dos fluidos son las siguientes:

	Velocidad de flujo	Calor especifico	Temperatura	
	kg_m hr^{-1}	kcal kg_m^{-1} $°C^{-1}$	Entrada	Salida
Aceite	5000	0,60	95 °C	38 °C
Agua	2500	1,00	15 °C	

b. Repetir el cálculo de la parte (*a*) si U_1 = 250 y U_2 = 1750 kcal $hr^{-1}\,m^{-2}\,°C^{-1}$. Supóngase que U varía lineatmente con la temperatura del agua, y utilícese el resultado del problema 15.E.

c. ¿Cuál es la cantidad minima de agua que se puede utilizar en los apartados (*a*) y (*b*) para obtener la variación de la temperatura del aceite que se indica? ¿Cuál es la cantidad mínima de agua que se puede utilizar para el flujo en corrientes paralelas?

d. Calcular el área de cambiador que se requiere para la operación en corrientes paralelas si la velocidad de flujo de agua es 7750 kg_m hr^{-1} y U es constante e igual a 1000 kcal $hr^{-1}\,m^{-2}\,°$C-t.

Respuesta: *a.* 10.3 m^2
b. 12,0 m^2
c. 2138 kg_m hr^{-1}, 7435 kg_m hr^{-1}
d. 9,6 m^2

15.B$_1$ Flojo adiabático de gas natural en una tubería

Recalcular la potencia − w W' del ejemplo 15.4−3, si el flujo es adiabático en vez de isotérmico:

a. Utilizar el resultado del problema 15.F*d* para determinar la densidad del gas en el plano «2»

b. Utilizar el resultado del apartado (a) y el resultado del problema 15.F*e* para obtener p_2.

c. Calcular, de igual forma que en el ejemplo 15.4-3, la potencia necesaria.

Respuesta: *a.* 3.89 kg_m m^{-3}
b. 6.06 kg_f cm-2
c. 478 hp.

15.C$_1$ Mezcla de dos corrientes de gases ideales

a. Calcular la velocidad, temperatura y presión, que resultan cuando se mezclan las dos corrientes de aire siguientes, en un aparato como el descrito en el ejemplo 15.4-4. El calor específico del aire puede considerarse constante e igual a 7,0 kcal kg-mol^{-1} °C^{-1}.

	w (kg hr^{-1})	v (m seg^{-1})	T(°C)	p (atm)
Corriente 1:	454	305	26,7	1,00
Corriente 2:	*4.540*	30,5	26,7	1,00
Respuesta:	4.994	33,5	31,7	1,00

b. ¿Qué velocidad se obtendría si se considerase el flujo como isotérmico e incompresible?

c. Estimar $\hat{E}_v$ para esta operación, tomando como base de cálculo los resultados del apartado *(b).*

Respuesta: a. En la tabla anterior
b. 33,2 m seg^{-1}
c. 4,3 x 10^2 kg$_f$m/kg$_m$

15.D$_1$ Flujo en un tubo de Venturi

Un tubo de Venturi, cuyo diámetro del estrechamiento es de 3 in (7.62 cm) está instalado en una tubería circular de 1 ft (30,48 cm) de diámetro que conduce aire seco. El coeficiente de descarga C_d es 0,98. Calcular la velocidad de flujo de aire sabiendo que entra al tubo de Venturi a 21 °C y 1 atm, y que la presión en el estrechamiento es de 0.75 atm:

a. Suponiendo flujo adiabático sin fricción y $\gamma = 1{,}4$.
b. Suponiendo flujo isotérmico.
c. Suponiendo flujo incompresible con una densidad igual a la de entrada.

Respuesta: *a.* 0,94 kg seg^{-1}
b. 0,89 kg seg^{-1}
c. 1,10 kg seg^{-1}

15.E$_2$ Funcionamiento de un cambiador de calor de tubos concéntricos cuyo coeficiente global de transmisión de calor es variable

Deducir una expresión para la cantidad de calor transmitido en un cambiador del mismo tipo del que se describe en el ejemplo 15.4-2, si el coeficiente de transmisión de calor U varía linealmente con la temperatura de cualquiera de las dos corrientes:

a. Demostrar que $(T_h - T_c)$ es una función lineal tanto de T_h como de T_c, de forma que $(U - U_1)/(U_2 - U_1) = (\Delta T - \Delta T_1)/(\Delta T_2 - \Delta T_1)$ siendo $\Delta T = T_h - T_c$, y los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones en las superficies «1» y «2».

b. Substituir el resultado anterior de $(T_h - T_c)$ en la Ec. 15.4-13 e integrar sobre la longitud total de cambiador la ecuación que resulta. Demostrar que

$$Q = A\,\frac{(U_1\Delta T_2 - U_2\,\Delta T_1)}{\ln\,(U_1\,\Delta T_2/U_2\,\Delta T_1)} \qquad (15.E\text{-}1)$$

Esta expresión fue sugerida por primera vez por A. P. Colburn, *Ind. Eng. Chem.*, 25, *873 (1933).*

15.F$_2$ Flujo estacionario de gases ideales en conducciones de sección constante

a. Demostrar que para el flujo horizontal de cualquier fluido en una conducción de sección constante, la ecuación de Bernoulli, Ec. 15.2-3, puede expresarse así

$$v\,dv + \hat{V}\,dp + \tfrac{1}{2}v^2\,de_v = 0 \qquad (15.F\text{-}1)$$

en la que $de_v = (4f/D)dL$. Se supone que el perfil de velocidad es plano.

b. Demostrar que la Ec. 15.F–1 puede ponerse de esta forma

$$v\,dv + d(p\hat{V}) - p\hat{V}\frac{d\hat{V}}{\hat{V}} + \tfrac{1}{2}v^2\,de_v = 0 \qquad \textbf{(15.F–2)}$$

c. Demostrar que para el flujo isotermico de gases ideales la Ec. 15.F–2 puede expresarse así

$$de_v = 2RT\frac{dv}{v^2} - 2\frac{dv}{v} \qquad \textbf{(15.F–3)}$$

Integrar esta expresión entre dos secciones «1» y «2», que limitan una longitud L de tubería, para obtener

$$G = \frac{v_1}{\hat{V}_1} = \left\{\frac{(p_1/\hat{V}_1)[1 - (p_2/p_1)^2]}{e_v - \ln (p_2/p_1)^2}\right\}^{1/2} \quad \text{(flujo isotérmico de gases ideales)} \qquad \textbf{(15.F–4)}$$

Demostrar que para cualesquiera valores dados de e_v y de las condiciones en «1», G alcanza su valor máximo posible para un valor crítico de $(p_2/p_1)^2 = r$, definido por $e_v - \ln r = (1 - r)/r$. (Véase también el problema 15.H.)

d. Utilizar el balance macroscópico de energía en estado estacionario, Ec. 15.1-4, con el fin de demostrar que para el flujo adiabático de gases ideales de $\hat{C}_p$ constante en conducciones de sección constante, se cumple

$$p\hat{V} + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{1}{2}v^2 = \text{constante} \qquad \textbf{(15.F–5)}$$

Utilizar la expresión anterior y el resultado del apartado (c) para obtener

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma}\frac{dv}{v} - \left(2p_1\hat{V}_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}v_1^2\right)\frac{dv}{v^2} = -de_v \qquad \textbf{(15.F–6)}$$

Integrar esta ecuación entre dos secciones de tubería «1» y «2» comprendiendo una resistencia adimensional e_v. En esta integración supóngase que γ es constante. Combinar el resultado con el balance macroscópico de materia con el fin de obtener una expresión para la velocidad másica de flujo del gas:

$$G = \frac{v_1}{\hat{V}_1} = \left\{\frac{p_1/\hat{V}_1}{\left[\dfrac{e_v - \left(\dfrac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\ln (\hat{V}_1/\hat{V}_2)^2}{1 - (\hat{V}_1/\hat{V}_2)^2} - \dfrac{\gamma - 1}{2\gamma}\right]}\right\}^{1/2} \quad \text{(flujo adiabático de gases ideales)} \qquad \textbf{(15.F–7)}$$

e. Utilizar los balances macroscópicos de materia y energía con el fin de demostrar que para el flujo adiabático horizontal de gases ideales de γ constante se cumple

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2}\right)\left\{\frac{[1 - (\hat{V}_2/\hat{V}_1)^2]G^2\hat{V}_1}{p_1}\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right) + 1\right\} \qquad \text{(15.F-8)}$$

Esta ecuación puede combinarse con la Ec. 15.F–7 para demostrar, de igual forma que para el flujo isotérmico, que existe una relación crítica de presión (p_2/p_1) correspondiente a la máxima velocidad de flujo posible.

15.G_2 El número de Mach en la mezcla de dos corrientes de fluidos

a. Demostrar que cuando en la Ec. 15.4−32 $(wE/P^2)\,[(\gamma^2 - 1)/\gamma^2]$ es igual a 1/2, el numero de Mach de la corriente final es la unidad. Téngase en cuenta que el número de Mach, Ma, que viene dado por la relación entre la velocidad local del fluido y la velocidad del sonido en las condiciones locales, puede expresarse, para el caso de un gas ideal, de la siguiente forma, $v/v_s = v/\sqrt{\gamma RT/M}$. (Véase problema 10.1.)

b. Demostrar cómo pueden utilizarse los resultados del ejemplo 15.4-4 para predecir el comportamiento de un gas al pasar por un ensanchamiento brusco de la sección de una conducción.

15.H_2 Velocidades límite de descarga en tubos de Venturi

a. Demostrar, partiendo de la Ec. 15.4-37, que al disminuir la presión en el estrechamiento de un tubo de Venturi, la velocidad de descarga alcanza un máximo cuando la relación entre la presión en el estrechamiento y la presión a la entrada, $r = (p_2/p_1)$, viene dada por la expresión

$$\frac{\gamma + 1}{r^{2/\gamma}} - \frac{2}{r\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)} - \frac{\gamma - 1}{(S_1/S_0)^2} = 0 \qquad (15.H\text{–}1)$$

b. Demostrar que para $S_1 \gg S_0$ la velocidad de flujo en estas condiciones límite es

$$w = C_d p_1 S_1 \sqrt{\frac{\gamma M}{RT_1}\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)}} \qquad (15.H\text{–}2)$$

c. Obtener las expresiones correspondientes a las anteriores para el caso de flujo isotérmico.

15.12 Flujo de un fluido compresible a través de una boquilla convergente-divergente

En muchas aplicaciones, tales como turbinas de vapor o cohetes, los gases comprimidos y

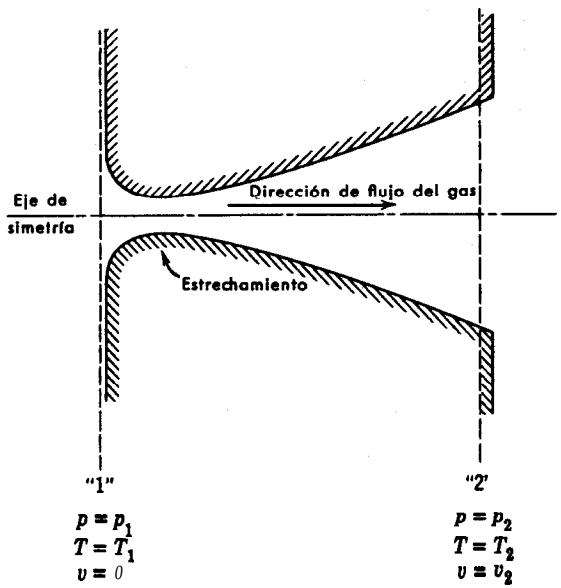


Fig. 15.1. Corte esquemático de una boquilla convergente-divergente.

calientes se expansionan a través de boquillas del tipo que se indica en la Fig. 15.I, con el fin de convertir la entalpia del gas en energía cinética. Esta operación es, en muchos aspectos, semejante al flujo de gases a través de orificios. Sin embargo, en este caso el objeto de la expansión es producir energía para mover la turbina o impulsar el cohete.

Con el fin de explicar el comportamiento de estos sistemas y justificar la forma general de la boquilla descrita, se sigue el camino de la expansión de un gas ideal. Se supone que el gas está inicialmente contenido en un gran, recipiente de velocidad cero, y que se expansiona a través de una boquilla adiabática sin fricción hasta la presión cero. Se supone también que los perfiles de velocidad son planos y que las variaciones de altura son despreciables..

a. Demostrar, aplicando la ecuación de Bernoulli entre los planos «1» y «2» de la Fig. 15.1, que

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{RT_1}{M}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}\right] \qquad (15.1\text{-}1)$$

b. Demostrar, mediante la ley de los gases ideales, el balance macroscópico de materia en estado estacionario, y la Ec. 15.I − 1, que la sección S de la corriente que se expansiona pasa por un valor mínimo para una presión crítica:

$$p_{2,\,crit} = p_1\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} \qquad (15.I\text{–}2)$$

c. Demostrar que el número de Mach del fluido para esta sección mínima es la unidad. (Véase problema 10.L.) ¿Cómo se comparan los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) con los del problema 15.H?

d. Calcular la velocidad v y la temperatura T del fluido, así como la sección transversal S de la corriente en función de la presión local p para la descarga de 4,54 kg-mol de aire por segundo desde 311 °K y 10 atm hasta la presión cero.

Respuesta:

p, atm	10	9	8	7	6	5,3	5	4	3	2	1	0
v, m seg^{-1}	0	135	194	242	311	320	333	377	424	475	546	785
T, °K	312	303	292	281	269	260	256	241	222	197	162	0
S, cm^2	∞	920	692	609	576	569	576	590	644	799	1098	∞

15.5, Cambiadores de calor de corrientes paralelas-contracorriente

En el cambiador de calor que se indica en la Fig. 15.J el «fluido del tubo», que es el fluido A, entra y sale por el mismo extremo del cambiador, mientras que el «fluido de la carcasa», el *B*, circula siempre en la misma dirección; de esta forma, existe en el mismo aparato flujo en corrientes paralelas y en contracorriente. Esta disposición del flujo es uno de los ejemplos mas sencillos del «flujo mixto», que se utiliza frecuentemente en la practica,, con el fin de reducir la longitud de los cambiadores de calor.1 El comportamiento de un aparato de este tipo puede analizarse fácilmente teniendo en cuenta las siguientes suposiciones: *(i)* que existen condiciones de estado estacionario; (ii) el coeficiente global de transmisión de calor U y los calores específicos de los dos fluidos son constantes; (iii) la temperatura del fluido de la carcasa T_B es constante para cualquier sección per-

1 Véase D. Q. KERN, *Process Heat Transfer*, McGraw-Hill, Nueva York, pp. 127-189; J. H. PERRY, *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición, pp. 464-465.

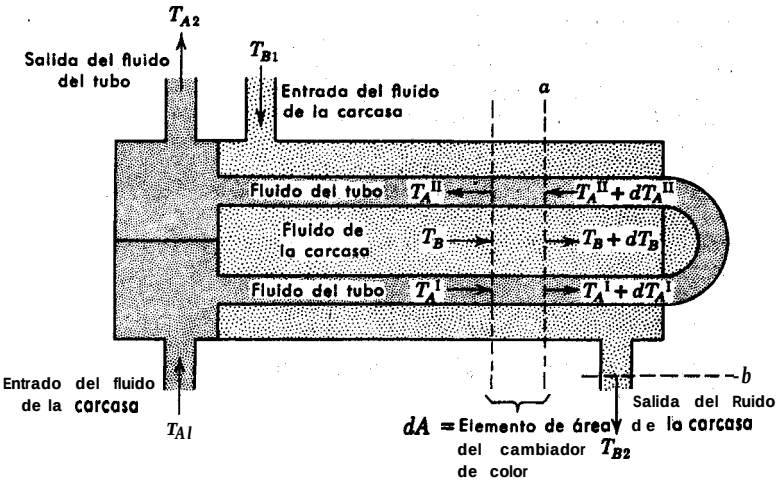


Fig. 15.J. Cambiador de calor 1-2 de corrientes paralelas-contracorriente.

pendicular a la dirección de flujo; y (iv) que el área de calefacción en cada «paso» es la misma, es decir, para las corrientes del fluido que circulan por el interior de los., tubos señalados con 1 y II en la figura.

a. Demostrar, mediante un balance de energia aplicado a la parte del sistema comprendida entre los planos «*a*» y «*b*», que

$$(T_B - T_{B2}) = R(T_A^{II} - T_A^{I}) \text{ siendo } R = |w_A \hat{C}_{pA}/w_B \hat{C}_{pB}|$$

b. Demostrar que para una sección diferencial del cambiador, que comprende una superficie total de intercambio de calor dA, se cumple

$$\frac{dT_A^{I}}{d\alpha} = \frac{1}{2}(T_B - T_A^{I}) \qquad (15.J\text{-}1)$$

$$\frac{dT_A^{II}}{d\alpha} = \frac{1}{2}(T_A^{II} - T_B) \qquad (15.J\text{-}2)$$

$$\frac{1}{R}\frac{dT_B}{d\alpha} = -[T_B - \tfrac{1}{2}(T_A^{I} + T_A^{II})] \qquad (15.J\text{-}3)$$

en las que $d\alpha = (U/w_A \hat{C}_{pA})dA$, y w_A, y $\hat{C}_{pA}$, están definidos de igual forma que en el ejemplo 15.4 -2.

c. Demostrar que eliminando T_A^{I} y T_A^{II} entre estas tres ecuaciones se puede obtener una ecuación diferencial para la distribución de temperatura del fluido de la carcasa:

$$\frac{d^2\Theta}{d\alpha^2} + \frac{R\,d\Theta}{d\alpha} - \frac{\Theta}{4} = 0 \qquad (15.J\text{-}4)$$

siendo $\Theta = (T_B - T_{B2})/(T_{B1} - T_{B2})$. Resolver esta ecuación con las siguientes condiciones limite

$$\text{para } \alpha = 0 \qquad \Theta = 1 \quad . \tag{15.J-5}$$

$$\text{para } \alpha = \frac{UA_T}{w_A \hat{C}_{pA}} \qquad \Theta = 0 \tag{15.J-6}$$

siendo A_T la superficie total de transmisión de calor del cambiador.

d. Utilizar el resultado del apartado (c) con el fin de obtener una expresión para $dT_B/d\alpha$. Eliminar $dT_B/d\alpha$ de, esta expresión, valiéndose de la Ec. 15.J−3, y evaluar la ecuación que resulta para a = 0 con el fin de obtener la siguiente relación para el funcionamiento del cambiador:

$$\alpha_T = \frac{UA_T}{w_A \hat{C}_{pA}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \ln \left[\frac{2 - \Psi(R+1-\sqrt{R^2+1})}{2 - \Psi(R+1+\sqrt{R^2+1})} \right] \tag{15.J-7}$$

en la que

$$\Psi = \frac{T_{A2} - T_{A1}}{T_{B1} - T_{A1}} \tag{15.J-8}$$

e. Utilizar este resultado con el fin de obtener la siguiente expresión para la velocidad de transmisión de calor en el cambiador:

$$Q = UA(\Delta T)_{ln} \cdot Y \tag{15.J-9}$$

siendo

$$(\Delta T)_{ln} = \frac{[(T_{B1} - T_{A2}) - (T_{B2} - T_{A1})]}{\ln \left[\dfrac{(T_{B1} - T_{A2})}{(T_{B2} - T_{A1})} \right]} \tag{15.J-10}$$

$$Y = \frac{\sqrt{R^2+1} \ln [(1-\Psi)/(1-R\Psi)]}{(R-1) \ln \left[\dfrac{2 - \Psi(R+1-\sqrt{R^2+1})}{2 - \Psi(R+1+\sqrt{R^2+1})} \right]} \tag{15.J-11}$$

Obsérvese que Y representa la relación entre el calor transmitido en un cambiador de calor 1-2 de corrientes paralelas-contracorriente, y el transmitido en un cambiador de la misma superficie e iguales temperaturas extremas de los fluidos, que opera en contracorriente verdadera. Los valores de $Y(R, \Psi)$ se representan gráficamente en la obra de Perry *(op. cit.)* y en la mayor parte de los libros de operaciones básicas de ingeniería química. Como puede verse, Y es siempre menor que la unidad.

15.K$_3$ Descarga de aire desde un tanque de gran capacidad

Se desea retirar 2,27 $Kg_m seg^{-1}$ de aire contenido en un gran tanque de almacenamiento, mediante una tubería de acero de 5,25 cm. de diámetro interno y cuya longitud equivalente es de 16.8 m. El aire sufre una contracción brusca a la entrada de la tubería, pero las pérdidas debidas a esta contracción no están incluidas en la longitud equivalente de la tubería que se ha indicado anteriormente. ¿Se puede obtener la velocidad de flujo de aire que se desea si el aire del tanque está a la presión manométrica de 10,2 atm y 21 °C, y la presión manométrica al final de la tubería es de 3,4 atm? (El efecto de la contracción brusca puede estimarse con bastante exactitudsconsiderando que la entrada consiste en una boquilla ideal que converge hasta una sección igual a la de la tubería seguida de un tramo de tubería para el que e_v = 0,5. (Véase Tabla 7.4 — 1.) El comportamiento de

2 Véase C. E. LAPPLE, *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., 39, 385 (1943).*

la boquilla puede determinarse a partir de la Fc. 15.4-37 suponiendo que el área de la sección transversal es infinita y que C_d es igual a la unidad).

Respuestas: *Sí.* La velocidad de descarga que se obtiene es del orden de 2,7 $kg_m\ seg^{-1}$ para el flujo isotérmico (véase el problema 15.F) y aproximadamente igual a 2,85 $kg_m\ seg^{-1}$ para el flujo adiabático. La velocidad real estaría comprendida entre estos dos limites para una temperatura ambiente de 21 °C.

15.L$_3$ Temperatura de estancamiento

La «sonda de temperatura total» que se indica en la Fig. 15.L esta introducida en una corriente estacionaria de un gas ideal a la temperatura T_1 que se mueve con una velocidad v_1. Parte del gas llega al terminal de la sonda y es decelerado hasta una velocidad prácticamente cero ante de salir lentamente por los orificios de sangria. Esta deceleración da lugar a un aumento de temperatura que se mide con el termopar. Como la deceleración es rápida, resulta prácticamente adiabática.

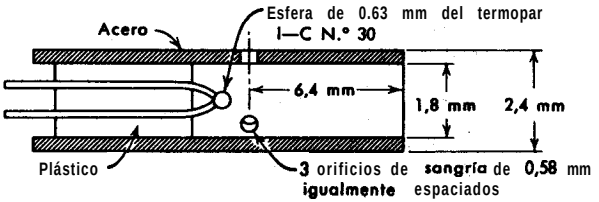


Fig. 15.L. Sonda de temperatura total. [H. C. HOTTEL y A. KALITINSKY, *J. Appl. Mech.*, 12, A25 (1945).]

a. Deducir una expresión para la temperatura registrada por el termopar en función de v_1 y T_1 utilizando el balance macroscópico de energía en estado estacionario, Ec. 15.1-4. Utilizar como sistema una corriente representativa del fluido que llega a la sonda. El plano de referencia «1» se toma suficientemente alejado aguas arriba de forma que se puede suponer que las condiciones no son afectadas por la sondá, y el plano «2» se sitúa en la sonda misma. Se supone que la velocidad en el plano «2» es cero, y se desprecia la radiación así como la conducción de calor desde el fluido al pasar entre los planos de referencia.

b. ¿Cuál es la misión de los orificios de sangría?

Respuesta: a. $(T_2 - T_1) = v_1^2/2\hat{C}_p$. Con sondas bien diseñadas se pueden obtener aumentos de temperatura que concuerdan con un 2 por ciento con los que se obtienen mediante esta expresión.

15.M$_3$ Calentamiento continuo de una suspensión en un tanque agitado

Una suspensión se calienta haciéndola pasar a través de un tanque de calefacción perfectamente agitado, tal como se indica en la Fig. J5.M. La temperatura de entrada de la suspensión es T_i, y la temperatura de la superficie externa del serpentin de vapor es T_s. Se utilizan también los siguientes símbolos:

V = volumen de la suspensión contenida en el tanque
ρ = densidad de la suspensión
w = velocidad másica de flujo de la suspensión a través del tanque
$\hat{C}_p$ = calor específico de la suspensión
U = coeficiente global de transmisión de calor del serpentín de vapor
A = superficie total de transmisión de calor del serpentin
t = tiempo contado a partir del momento en que se inicia el calentamiento
$T(t)$ = temperatura de la suspensión contenida en el tanque.

La agitación es suficientemente intensa, de forma que la temperatura del fluido en el interior del tanque es uniforme e igual a la temperatura de salida.

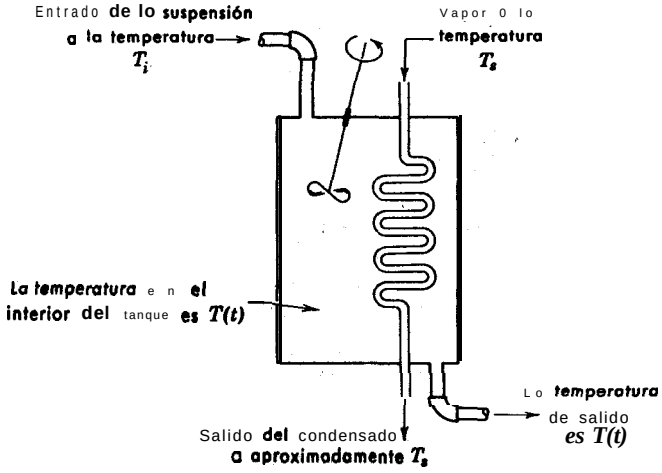


Fig. 15.M. Calentamiento de una suspensión en un tanque agitado.

a. Demostrar, mediante un balance de energía, que la temperatura de la suspensión está descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{UA}{\rho \hat{C}_p V}\right)(T_s - T) - \left(\frac{w}{\rho V}\right)(T - T_i) \qquad (15.M\text{–}1)$$

b. Expresar esta ecuación diferencial en función de las variables adimensionales

$$\tau = \frac{wt}{\rho V} \qquad (15.M\text{–}2)$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \qquad (15.M\text{–}3)$$

siendo

$$T_\infty = \frac{\left(\frac{UA}{w\hat{C}_p}\right)T_s + T_i}{1 + \left(\frac{UA}{w\hat{C}_p}\right)} \qquad (15.M\text{–}4)$$

¿Cuál es el significado físico de τ, Θ y T_∞?

c. Resolver la ecuación adimensional obtenida en el apartado *(b)* para la condición límite de que para $t = 0$, $T = T_i$.

d. Comprobar la solución. ¿Se cumplen la ecuación diferencial y la condición inicial? ¿Cómo se comporta el sistema para un tiempo grande? ¿Está de acuerdo este comportamiento límite con lo que cabe esperar intuitivamente?

e. ¿Cómo viene afectada la temperatura a tiempo infinito por la velocidad de flujo? ¿Es razonable esto?

Respuesta: c. $\dfrac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\dfrac{UA}{\rho V \hat{C}_p} + \dfrac{w}{\rho V}\right)t\right]$

15.N$_4$ Descarga de un gas desde un tanque en movimiento

La Ec. 15.5 -36 del ejemplo 15.5 -3 se ha obtenído tomando $d\hat{\Phi}/dt$ igual acero, pero este procedimiento sólo está justificado porque el tanque en consideración estaba en reposo. Sin embargo, la Ec. 15.5-36 es también correcta cuando el tanque se mueve. Esta afirmación puede demostrarse de la siguiente forma:

a. Considerar un tanque como el de la Fig. 15.5-4, pero que se mueve con una velocidad v que es mucho mayor que la velocidad relativa del fluido con respecto al tanque en la región situada a la izquierda de la superficie «1». Demostrar que el balance macroscópico de cantidad de movimiento para esta región del tanque es

$$-\left(F + \int_{S_1} p_1 \, dS_1\right) = m_{tot}\left(\frac{dv}{dt} - g\right) \qquad (15.N\text{–}1)$$

donde se. ha supuesto que la velocidad del fluido es uniforme e igual a v. Efectuar el producto de punto de los dos miembros de la Ec. 15.N−1 con v para obtener

$$-W = m_{tot}\left(\frac{d\hat{K}}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}}{dt}\right) \qquad (15.N\text{–}2)$$

habiéndose despreciado $\partial\hat{\Phi}/\partial t$.

b. Substituir este resultado en el balance macroscópico de energia y seguir como en el ejemplo 15.5-3.

15.O$_4$ Deducción del balance macroscópico de energía

'Integrar la Ec. N de la Tabla 10.4−1 para el sistema de flujo representado en la Fig. 7.0−1 con el fin de obtener la Ec. 15.1-3. Téngase en cuenta que es preciso utilizar la fórmula tridimensional de Leibnitz (véase Apéndice A, § A.5) para efectuar la integración del primer miembro de la ecuación. Utilizar el teorema de divergencia de Gauss en el segundo miembro, con el fin de transformar las integrales de volumen en integrales de superficie.

15.P$_4$ Otra forma del balance macroscópico de energía

Repetir el problema 15.0 para la Ec. 0 de la Tabla 10.4−1 y demostrar que se puede expresar un balance macroscópico de energía en esta forma

$$\frac{d}{dt}(U_{tot} + \Phi_{tot} + K_{tot}) = -\Delta[(\hat{U} + \hat{K} + \hat{\Phi})w] + Q - W + \int_V \rho \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}\, dV \qquad (15.P\text{–}1)$$

Nora: Puede resultar útil la Ec. 10.1-14. Obsérvese también que para $\partial\hat{\Phi}/\partial t = 0$ esta expresión se transforma en la Ec. 15.1-3.

TERCERA PARTE

Transporte de materia

CAPÍTULO 16

DIFUSIVIDAD Y MECANISMOS DEL TRANSPORTE DE MATERIA

En el Capítulo 1 hemos comenzado por establecer la ley de la, viscosidad, y en el Capítulo 8 la ley de Fourier de la conducción del calor. En éste vamos a presentar la ley de Fick de la difusión, que describe el movimiento de una substancia, tal como *A,* a través de una mezcla de *A* y *B,* merced al gradiente de concentración de *A.*

El movimiento de una especie química desde una región de concentración elevada hacia otra de baja concentración puede observarse a simple vista colocando un pequeño cristal de permanganato potásico en un vaso de agua. El $KMnO_4$ comienza a disolverse en el agua, y en las inmediaciones del cristal se forma un intenso color violeta correspondiente a la solución concentrada de permanganato. Debido al gradiente de concentración que se establece, el $KMnO_4$ difunde alejándose del cristal. La marcha de la difusión puede seguirse observando el crecimiento de la región de color violeta intenso cuando la concentración de permanganato es elevada y débil coloración para bajas concentraciones.

La difusión es más compleja que el flujo viscoso o la conducción del calor, debido a la innovación de tener que operar con mezclas. En una mezcla que difunde las velocidades de los componentes individuales son distintas, y existen varios métodos adecuados para promediar las velocidades de los componentes con el fin de obtener la velocidad local de la mezcla. La elección de esta velocidad local es necesaria para poder definir las velocidades de difusión. Por lo tanto, hemos creído conveniente tratar con algún detalle en § 16.1 las definiciones de concentraciones, velocidades y densidades de flujo. En dicha sección no se exponen conceptos físicos nuevos, pero es muy importante familiarizarse con estas definiciones para estudiar las materias que se abordarán después.

En § 16.2 se establece la ley de Fick de la difusión, y con ello se define la difusividad binaria $\mathscr{D}_{AB}$. En § 16.3 se estudia la variación de $\mathscr{D}_{AB}$ con la temperatura y la presión. En $16.4 y § 16.5 se tratan las difusividades binarias de mezclas gaseosas y líquidas desde un punto de vista molecular.

Como actualmente se carece de datos de difusividad para la mayor parte de la mezclas que tienen interés en ingeniería, es preciso utilizar en casi todos los cálculos valores estimados o extrapolados de $\mathscr{D}_{AB}$. Deberán de utilizarse, a ser posible, valores experimentales, ya que generalmente (aunque no siempre) son más seguros.

Ya hemos indicado que la difusión de ***A*** en un sistema de ***A*** y ***B*** tiene lugar debido a la existencia de un gradiente de concentración de ***A.*** Este fenómeno se denomina a ***veces difusión ordinaria*** para distinguirla de la ***difusión de presión*** (el movimiento de ***A*** se debe a un gradiente de presión), de la ***difusión térmica*** (el movimiento de ***A*** se produce merced a un gradiente térmico), y de la ***difusión forzada*** (el movimiento de ***A*** se debe a una desigualdad de las fuerzas externas que actúan sobre ***A y B).*** Estos efectos adicionales, así como la difusión en sistemas de varios componentes se tratan brevemente en el Capítulo 18.

Nota: En este capítulo y en los siguientes se ha adoptado una determinada regla de notación. Cuando se consideran ***sistemas de dos componentes*** se especifican las especies ***A y B.*** En ***sistemas de varios componentes*** se especifican las especies **1, 2, 3,** etcétera, o bien, en las discusiones generales, se utiliza un índice supuesto, tal como ***i, j*** o ***k,*** para referir las distintas especies. Las fórmulas cuya validez se limita a sistemas binarios se distinguen fácilmente porque intervienen los subíndices ***A y B.***

§ 16.1 DEFINICIONES DE CONCENTRACIONES, VELOCIDADES Y DENSIDADES DE FLUJO DE MATERIA[1]

La concentración de las especies en un sistema de varios componentes puede expresarse de diversas formas. Nosotros consideraremos solamente las cuatro siguientes: la ***concentración de masa,*** ρ_i, que es la masa de la especie ***i*** por unidad de volumen de solución; la ***concentración molar,*** $c_i = \rho_i/M_i$, que es el número de moles de la especie ***i*** por unidad de volumen de solución; la ***fracción de masa,*** $\omega_i = \rho_i/\rho$, que es la concentración de masa de la especie ***i*** dividida por la densidad total de la solución; ***y*** la ***fracción molar,*** $x_i = c_i/c$, que es la concentración molar de la especie ***i*** dividida por la densidad molar total de la solución. (Mediante la palabra «solución» se designa aquí una mezcla gaseosa, líquida, o sólida, que forma una sola fase.) En la Tabla 16.1— 1 se da un resumen de estas unidades de concentración y su mutua relación para el caso de sistemas binarios.

En una mezcla que difunde las distintas especies químicas se mueven con velocidades diferentes. Llamamos v_i a la velocidad de la especie ***i*** con respecto a ejes coordenados estacionarios? Por lo tanto, la ***velocidad media de masa*** para una mezcla de n componentes se define de la siguiente forma:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i} \qquad (16.1\text{-}1)$$

---

[1] R. B. BIRD, «Theory of Diffusion», en *Advances in Chemical Engineering*, vol. I, Academic Press, Nueva York (1956), pp. 170 y siguientes.

[2] La palabra «velocidad» *no* expresa aquí la velocidad de una molécula individual de la especie *i* sino la suma de las velocidades de *las* moléculas de esta especie comprendidas en un pequeño elemento de volumen, dividida por el número de dichas moléculas.

Obsérvese que ρv es la velocidad local con que la masa atraviesa una sección unidad colocada perpendicularmente a la velocidad v. Esta velocidad local es la que se mediría con un tubo de Pitot, y corresponde a la v que se ha utilizado en los capítulos anteriores para **fluidos** puros. De igual forma, se puede definir una ***velocidad media molar*** local v^*

$$v^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \qquad (14.1\text{-}2)$$

Obsérvese que cv^* es la velocidad local con la que los moles atraviesan una sección unidad colocada perpendicularmente a la velocidad v^*. Estas dos velocidades medias las utilizaremos con frecuencia. A veces se utilizan también otras velocidades medias, como la ***velocidad media de volumen*** v. (Véase problema 16.K.)

En sistemas de flujo tiene, generalmente, más interés la velocidad de una determinada especie con respecto a v o v^* que con respecto a un eje de coordenadas estacionario, y con este **propósito** se definen las «velocidades de difusión»:

$v_i - v$ = velocidad de difusión de i con respecto a v (16.1-3)

$v_i - v^*$ = velocidad de difusión de i con respecto a v^* **(16.1—4)**

Estas velocidades de difusión representan el movimiento del componente i **con** relación al movimiento local de la corriente del fluido.

En la Tabla 16.1-2 se hace un resumen de la notación de las velocidades en sistemas binarios, y se indican algunas relaciones útiles entre las distintas velocidades.

Es muy importante que el lector comprenda perfectamente el significado de las distintas clases de velocidades. Con este fin vamos a estudiar un sistema concreto, siguiendo gráficamente su comportamiento. En la Fig. 16.1—1 se analiza lo que ocurre cuando un líquido A se evapora y difunde hacia arriba a través de un tubo largo que inicialmente está lleno del vapor B. Al evaporarse A, empuja al vapor B hacia arriba. Sin embargo, no existe una línea neta de separación entre los vapores A y B puros, tal como se indica en la Fig. 16.1 -la, sino que el desplazamiento ascendente del vapor B va acompañado de una mezcla mutua de los dos vapores (Fig. 16.1—1*b*). Por lo tanto, debido a la difusión, en un punto cualquiera del tubo, A se mueve hacia arriba más rápidamente de lo que corresponde al movimiento medio global, y en cambio B se mueve más lentamente. En la Fig. 16.1— 1*b* se indican los distintos vectores velocidad para el caso de que $x_{A1} = \frac{1}{6}$, $v^* = 12$, $v_{A1} - v^* = 3$, y $M_A = 5M_B$. El lector deberá de comprobar los demás vectores velocidad.

Una vez que se han visto ya las velocidades y concentraciones, podemos definir las densidades de flujo de masa y molar. La densidad de flujo de masa (o molar) de la especie i es una magnitud vectorial que representa la masa (o moles) de la especie i

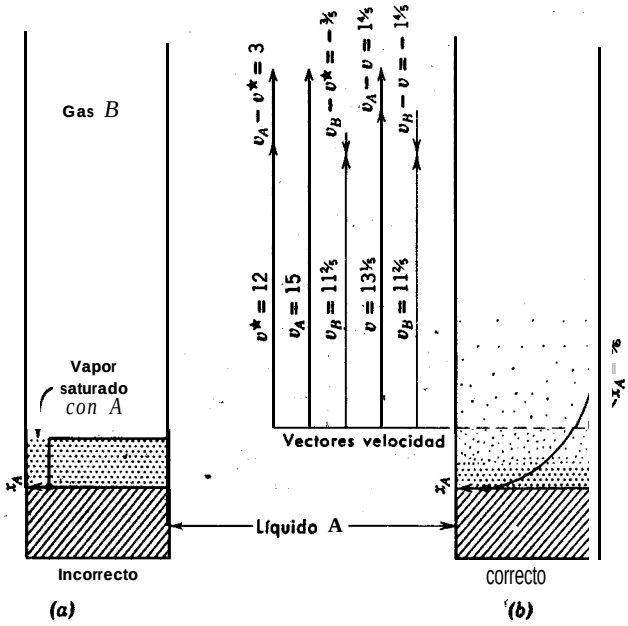


Fig. 16.1-1. Distribución de concentración en un determinado instante en un sistema de difusión.

que cruzan la unidad de área por unidad de tiempo. El movimiento puede estar referido a unas coordenadas estacionarias, a la velocidad media 'molar local v^*, o a la velocidad media de masa v. Por lo tanto, las densidades-de flujo de masa y molar ***relativas a coordenadas estacionarias*** son

$$n_i = \rho_i v_i \quad \text{de masa} \quad (16.1\text{-}5)$$

$$N_i = c_i v_i \quad \text{molar} \quad (16.1\text{-}6)$$

Las densidades de flujo de masa y molar ***relativas a la velocidad media de masa v,*** son

$$j_i = \rho_i(v_i - v) \quad \text{de mesa} \quad (16.1\text{-}7)$$

$$J_i = c_i(v_i - v) \quad \text{molar} \quad (16.1\text{-}8)$$

y las densidades de flujo de masa y molar ***relativas a la velocidad media molar*** v^*, son

$$j_i^* = \rho_i(v_i - v^*) \quad \text{de masa} \quad (16.1\text{-}9)$$

$$J_i^* = c_i(v_i - v^*) \quad \text{molar} \quad (16.1\text{-}10)$$

TABLA 16.1-1

NOTACIÓN DE CONCENTRACIONES EN SISTEMAS BINARIOS

Definiciones básicas

$\rho = \rho_A + \rho_B$ = densidad de la solución (g/cm³) (A)

$\rho_A = c_A M_A$ = concentración de masa de A (g de A/cm³ de solución) (B)

$\omega_A = \frac{\rho_A}{\rho}$ = fracción de masa de A (C)

$c = c_A + c_B$ = densidad molar de la solución (g-mol/cm³) (D)

$c_A = \frac{\rho_A}{M_A}$ = concentración molar de A (g-mol de A/cm³ de solución) (E)

$x_A = \frac{c_A}{c}$ = fracción molar de A (F)

$M = \frac{\rho}{c}$ = peso molecular medio de la mezcla (G)

Relaciones adicionales, a título de información solamente

$x_A + x_B = 1$ (H)

$\omega_A + \omega_B = 1$ (I)

$x_A M_A + x_B M_B = M$ (J)

$\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} = \frac{1}{M}$ (K)

$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}}$ (L)

$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$ (M)

$dx_A = \frac{d\omega_A}{M_A M_B \left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}\right)^2}$ (N)

$d\omega_A = \frac{M_A M_B dx_A}{(x_A M_A + x_B M_B)^2}$ (O)

TABLA 16.1-2

NOTACIÓN DE VELOCIDADES EN SISTEMAS BINARIOS

Definiciones básicas

v_A = velocidad de la especie A relativa a coordenadas estacionarias (A)

$v_A - v$ = velocidad de difusión de la especie A relativa a v (B)

$v_A - v^*$ = velocidad de difusión de la especie A relativa a v^* (C)

$v = (1/\rho)(\rho_A v_A + \rho_B v_B) = \omega_A v_A + \omega_B v_B$ = velocidad media de masa (D)

$v^* = (1/c)(c_A v_A + c_B v_B) = x_A v_A + x_B v_B$ = velocidad media molar (E)

Relaciones adicionales

$v - v^* = \omega_A(v_A - v^*) + \omega_B(v_B - v^*)$ (F)

$v^* - v = x_A(v_A - v) + x_B(v_B - v)$ (G)

TABLA 16.1-3

DENSIDADES DE FLUJO DE MASA Y MOLAR EN SISTEMAS BINARIOS

	Magnitud	Con respecto a ejes estacionarios	Con respecto a v	Con respecto a v^*
Definiciones básicas	Velocidad de la especie A (cm seg^{-1})	v_A (A)	$v_A - v$ (B)	$v_A - v^*$ (C)
	Densidad de flujo de masa de la especie A (g cm^{-2} seg^{-1})	$n_A = \rho_A v_A$ (D)	$j_A = \rho_A(v_A - v)$ (E)	$j_A^* = \rho_A(v_A - v^*)$ (F)
	Densidad de flujo molar de la especie A (g-mol cm^{-2} seg^{-1})	$N_A = c_A v_A$ (G)	$J_A = c_A(v_A - v)$ (H)	$J_A^* = c_A(v_A - v^*)$ (I)
Relaciones entre las densidades de flujo a título informativo	Suma de las densidades de flujo de masa (g cm^{-2} seg^{-1})	$n_A + n_B = \rho v$ (J)	$j_A + j_B = 0$ (K)	$j_A^* + j_B^* = \rho(v - v^*)$ (L)
	Suma de las densidades de flujo molares (g-mol cm^{-2} seg^{-1})	$N_A + N_B = cv^*$ (M)	$J_A + J_B = c(v^* - v)$ (N)	$J_A^* + J_B^* = 0$ (O)
	Densidades de flujo en función de n_A y n_B	$N_A = \frac{n_A}{M_A}$ (P)	$j_A = n_A - \omega_A(n_A + n_B)$ (Q)	$j_A^* = n_A - x_A\left(n_A + \frac{M_A}{M_B} n_B\right)$ (R)
	Densidades de flujo en función de N_A y N_B	$n_A = N_A M_A$ (S)	$J_A = N_A - \omega_A\left(N_A + \frac{M_B}{M_A} N_B\right)$ (T)	$J_A^* = N_A - x_A(N_A + N_B)$ (U)
	Densidades de flujo en función de j_A y v	$n_A = j_A + \rho_A v$ (V)	$J_A = \frac{j_A}{M_A}$ (W)	$j_A^* = \frac{M}{M_B} j_A$ (X)
	Densidades de flujo en función de J_A^* y v^*	$N_A = J_A^* + c_A v^*$ (Y)	$J_A = \frac{M_B}{M} J_A^*$ (Z)	$j_A^* = J_A^* M_A$ (AA)

En la Tabla 16.1-3 se hace un resumen de la notación de la densidades de flujo en sistemas binarios, y se indican algunas relaciones entre las distintas densidades de flujo. Es preciso resaltar que una densidad de flujo de masa no queda completamente definida mientras no se especifiquen las ***unidades y el sistema coordenado.***

Desde el punto de vista matemático, ***cualquiera*** de las seis notaciones anteriores de la densidad de flujo sirve para tratar todos los problemas de difusión, pero cada una de ellas tiene ciertas ventajas y de hecho se encuentran todas ellas en la bibliografía. La densidad de flujo N_i (y menos frecuentemente n_i) se utiliza ampliamente en ingeniería, debido a que en los cálculos de los procesos resulta en general conveniente referirse a un sistema coordenado establecido en los aparatos. Las densidades de flujo j_i y J_i^* se utilizan habitualmente para medir las velocidades de difusión y resultan adecuadas para formular las ecuaciones de variación en sistemas de varios componentes. Las densidades de flujo J_i y j_i^* apenas si se utilizan, pero las hemos incluido para dar una visión completa. En la mayor parte de los casos utilizaremos N_i.

Ejemplo 16.1-1. Relaciones entre las densidades de flujo molares

a. ¿Cómo están relacionadas J_i^* y N_i en un sistema de n componentes?

b. Demostrar que la suma de las densidades de flujo J_i^* *es cero.*

Solución. *a.* Combinando las definiciones de v^* y J_i^* (Ecs. 16.1-2 y 10), se llega a

$$J_i^* = c_i(v_i - v^*)$$

$$= c_i v_i - \frac{c_i}{c}\sum_{j=1}^{n} c_j v_j \qquad (16.1\text{-}11)$$

Teniendo en cuenta las definiciones de N_i y x_i se obtiene

$$J_i^* = N_i - x_i \sum_{j=1}^{n} N_j \qquad (16.1\text{-}12)$$

Esto indica que la densidad de flujo molar de difusión J_i^* es sencillamente la diferencia entre la densidad de Rujo molar N_i y la velocidad de transporte (flujo global) de la especie i debido a la densidad de flujo molar local de la mezcla. La Ec. 16.1-10 puede interpretarse de una forma similar.

b. El sumatorio de la Ec. 16.1-12 desde $i = 1$ hasta $i = n$, conduce a

$$\sum_{i=1}^{n} J_i^* = 0 \qquad (16.1\text{-}13)$$

Lo que demuestra que la suma de las densidades de flujo molares de difusión relativas a la velocidad media ***molar*** en cualquier mezcla es cero. Por consiguiente, en una mezcla binaria las densidades de flujo de difusión J_A^* y J_B^* son iguales y de sentido contrario:

$$J_A^* = -J_B^* \qquad (16.1\text{-}14)$$

Este resultado se aplica en el problema 16.1. ,

§ 16.2 LEY DE FICK DE LA DIFUSIÓN

La viscosidad μ se ha definido en la Ec. 1.1-2, como el factor de proporcionalidad entre la densidad de flujo de cantidad de movimiento y el gradiente de velocidad (ley de Newton de la viscosidad). En la Ec. 8.1-6 se ha definido la conductividad calorífica k, como el factor de proporcionalidad entre la densidad de flujo de calor

TABLA 16.2-1

FORMAS EQUIVALENTES DE LA PRIMERA-LEY DE FICK DE LA DIFUSIÓN

Densidad de flujo	Gradiente	Forma de la primera ley de Fick	
n_A	$\nabla\omega_A$	$n_A - \omega_A(n_A + n_B) = -\rho\mathscr{D}_{AB}\nabla\omega_A$	(A)
N_A	∇x_A	$N_A - x_A(N_A + N_B) = -c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A$	(B)
j_A	$\nabla\omega_A$	$j_A = -\rho\mathscr{D}_{AB}\nabla\omega_A$	(C)
J_A^*	∇x_A	$J_A^* = -c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A$	(D)
j_A	∇x_A	$j_A = -\frac{c^2}{0\rho} M_A M_B \mathscr{D}_{AB}\nabla x_A$	(E)
J_A^*	$\nabla\omega_A$	$J_A^* = -\left(\frac{\rho^2}{cM_AM_B}\right)\mathscr{D}_{AB}\nabla\omega_A$	(F)
$c(v_A - v_B)$	∇x_A	$c(v_A - v_B) = -\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{x_A x_B}\nabla x_A$	(G)

y el gradiente de temperatura (ley de Fourier de la conducción del calor). De una forma análoga, vamos a definir ahora la difusividad $\mathscr{D}_{AB} = \mathscr{D}_{BA}$ en un sistema binario :

$$J_A^* = -c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A \quad , \qquad (16.2\text{-}1)$$

que es la ***primera ley de Fick de la difusión,***[1] expresada para la densidad de flujo molar de difusión J_A^*. Esta ecuación establece que la especie A difunde (se mueve con relación a la mezcla) en la dirección decreciente de la fracción molar de A, de la misma forma que el calor fluye por conducción en la dirección de temperatura decreciente. En la bibliografía se utilizan distintas formas, matemáticamente equivalentes, de la primera ley de Fick, algunas de las cuales se resumen, a título de información, en la Tabla 16.2-1. La difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ es idéntica en todas estas ecuaciones.

[1] Los gradientes de temperatura, Los gradientes de presión, y las fuerzas externas, también contribuyen a la densidad de flujo de difusión, si bien sus efectos son generalmente *más* pequeños. En § 18.4 se dan expresiones más completas para la densidad de flujo de difusión.

En los capítulos que siguen tiene una gran importancia la forma de la primera ley de Fick escrita para N_A, la densidad de flujo molar relativa a coordenadas estacionarias :

$$N_A = x_A(N_A + N_B) - c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A \tag{16.2-2}$$

Esta ecuación indica que la densidad de flujo de difusión N_A, con relación a un eje de coordenadas estacionarias,' es la resultante de dos magnitudes vectoriales: el vector $x_A(N_A + N_B)$, que es la densidad de flujo molar de A que resulta del movimiento global del fluido, y el vector $J_A^* = -c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A$, que es la densidad de flujo de A que resulta de la difusión superpuesta al flujo global. Por lo tanto, en la Fig. 16.1—1*b* los términos de flujo global y de difusión de la Ec. 16.2-2 son del mismo sentido para la especie A (puesto que difunde a favor de la corriente) y de sentido contrario para la especie B (debido a que B difunde contra corriente),

Las unidades de la difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ son $cm^2\ seg^{-1}$ o $m^2\ hr^{-1}$. Obsérvese que la viscosidad cinemática ν y la difusividad térmica α también tienen las mismas unidades. La analogía de estas tres magnitudes se deduce de las siguientes ecuaciones para las densidades de flujo de masa, cantidad de movimiento y energía, en sistemas unidimensionales:

$$j_{Ay} = -\mathscr{D}_{AB}\frac{d}{dy}(\rho_A) \quad \text{(ley de Fick para } \rho \text{ constante)} \tag{16.2-3}$$

$$\tau_{yx} = -\nu\frac{d}{dy}(\rho v_x) \quad \text{(ley de Newton para } \rho \text{ constante)} \tag{16.2-4}$$

$$q_y = -\alpha\frac{d}{dy}(\rho\hat{C}_p T) \quad \text{(ley de Fourier para } \rho\hat{C}_p \text{ constante)} \tag{16.2-5}$$

Estas ecuaciones establecen, respectivamente, que (*a*) el transporte de materia tiene lugar a causa de un gradiente de concentración, (b) el transporte de cantidad de movimiento tiene lugar a causa de un gradiente de concentración de cantidad de movimiento, y (c) el transporte de energía tiene lugar a causa de un gradiente de concentración de energía. Estas analogías no pueden aplicarse a los problemas bi y tridimensionales, puesto que τ es una magnitud tensorial con nueve componentes, mientras que j_A y q son vectores con tres componentes.

En las Tablas 16.2-2, 3 y 4 se dan valores de $\mathscr{D}_{AB}$ para algunos sistemas gaseosos, líquidos y sólidos. Las difusividades de gases a baja densidad son casi independientes de la composición, aumentan con la temperatura, y disminuyen con la presión. En las tres secciones próximas haremos un resumen de los medios de que se dispone para la estimación de difusividades.

TABLA 16.2-2

DIFUSIVIDADES EXPERIMENTALES DE ALGUNOS SISTEMAS **BINARIOS** DE GASES DILUIDOS'

Sistema gaseoso	Temperatura (°K)	$\mathscr{D}_{AB}$ (cm^2 seg^{-1})
CO_2-N_2O	273,2	0,096
CO_2-CO	273,2	0,139
CO_2-N_2	273,i	0,144
	288,2	0,158
	298,2	0,165
$Ar-O_2$	293,2	0,20 . .
H_2-SF_6	298,2	0,420
H_2-CH_4	298,2	0,726

[a] Esta Tabla es un extracto tomado de J. 0. **HIRSCHFELDER,** C. F. **CURTISS,** y **R. B. BIRD,** ***Molecular Theory of Gases and Liquids,*** Wiley, Nueva York **(1954), p.** 579. **Los** valores corresponden a una atmósfera de presión.

TABLA 16.2-3

DIFUSIVIDADES **EXPERIMENTALES** EN ESTADO **LÍQUIDO**[a]

A	*B*	*T*(°C)	x_A	$\mathscr{D}_{AB} \times 10^5$ (cm^2 seg^{-1})
Clorobenceno	Bromobenceno	10,01	0,0332	1,007
			0,2642	1,069
			0,5122	1,146
			0,7617	1,226
			0,9652	1,291
		39,97	0,0332	1,584
			0,2642	1,691
			0,5122	1,806
			0,7617	1,902
			0,9652	1,996
Etanol	Agua	25	0,05	1,13
			0,275	0,41
			0,50	0,90
			0,70	1,40
			0,95	2,20
Agua	n-Butano1	30	0,131	1,24
			0,222	0,920
			0,358	0,560
			0,454	0,437
			0,524	0,267

[a] Esta Tabla es un extracto tomado de P. A. JOHNSON y A. L. BABB, «Liquid Diffusion in Non-Electrolytes», ***Chem. Revs.***, 56, 387-453 (1956); en este artículo se da un resumen

de los coeficientes experimentales de difusión de sistemas líquidos, así como una visión global de los métodos de medida. Otro excelente artículo de revista es el de L. J. GOSTING, «Measurement and Interpretation of Diffusion Coefficients» , *Advances in Protein Chemistry*, vol. XI, Academic Press, Nueva York (1956).

TABLA 16.2-4

DIFUSIVIDADES EXPERIMENTALES EN ESTADO SÓLIDO[a]

Sistema	T(°C)	Difusividad, $\mathscr{D}_{AB}$ (cm* seg^{-1})
He en SiO_2	20	$2{,}4 - 5{,}5 \times 10^{-10}$
He en pyrex	20	$4{,}5 \times 10^{-11}$
	500	2×10^{-8}
H_2 en SiO_2	500	$0{,}6 - 2{,}1 \times 10^{-8}$
H_2 en Ni	85	$1{,}16 \times 10^{-8}$
	165	$10{,}5 \times 10^{-8}$
Bi en Pb	20	$1{,}1 \times 10^{-16}$
Hg en Pb	20	$2{,}5 \times 10^{-15}$
Sb en Ag	20	$3{,}5 \times 10^{-21}$
Al en Cu	20	$1{,}3 \times 10^{-30}$
Cd en Cu	20	$2{,}7 \times 10^{-15}$

[a] Valores tomados de R. M. BARRER, *Diffusion in and through Solids*, Macmillan, Nueva York (1941), pp. 141, 222 y 275.

§ 16.3 VARIACIÓN DE LA DIFUSIVIDAD CON LA PRESIÓN Y LA TEMPERATURA

La difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ de un sistema binario es una función de la temperatura, presión y composición, mientras que la viscosidad y la conductividad calorífica k de un fluido puro son solo funciones de la temperatura y la presión. Además, los datos existentes de $\mathscr{D}_{AB}$ para la mayor parte de las mezclas binarias son bastante limitados, tanto en exactitud como en el intervalo conocido. Las correlaciones propuestas para $\mathscr{D}_{AB}$ tienen un campo de aplicación limitado y se basan más en la teoría que en la experiencia.

Para las mezclas gaseosas binarias a baja presión, $\mathscr{D}_{AB}$ es inversamente proporcional a la presión, aumenta con la temperatura, y es casi independiente de la composición, para una mezcla de dos gases determinados. Combinando los principios de

la teoría cinética y de los estados correspondientes se ha obtenido la siguiente **ecuación**[1] para estimar $\mathscr{D}_{AB}$ a ***bajas presiones***

$$\frac{p\mathscr{D}_{AB}}{(p_{cA}p_{cB})^{1/3}(T_{cA}T_{cB})^{5/12}\left(\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_B}\right)^{1/2}} = a\left(\frac{T}{\sqrt{T_{cA}T_{cB}}}\right)^{b} \qquad (16.3\text{-}1)$$

en la que $\mathscr{D}_{AB}[=]$ cm* seg^{-1}, $p[=]$ atm., y $T[=]$ °K. Mediante un análisis de los datos experimentales se han obtenido los siguientes valores para las constantes ***a*** ***y*** ***b:***

Para mezclas binarias de gases no polares

$$a = 2{,}745 \times 10^{-4}$$
$$b = 1{,}823$$

Para H_2O con un gas no polar

$$a = 3{,}640 \times 10^{-4}$$
$$b = 2{,}334$$

La Ec. 16.3-1 concuerda con los datos experimentales a la presión atmosférica con un error del orden del 8 por ciento.[1,2] Si los gases ***A*** y ***B*** son no polares y se conocen sus parámetros de Lennard-Jones, el método de la teoría cinética que se expone en § 16.4 conduce a resultados más exactos.

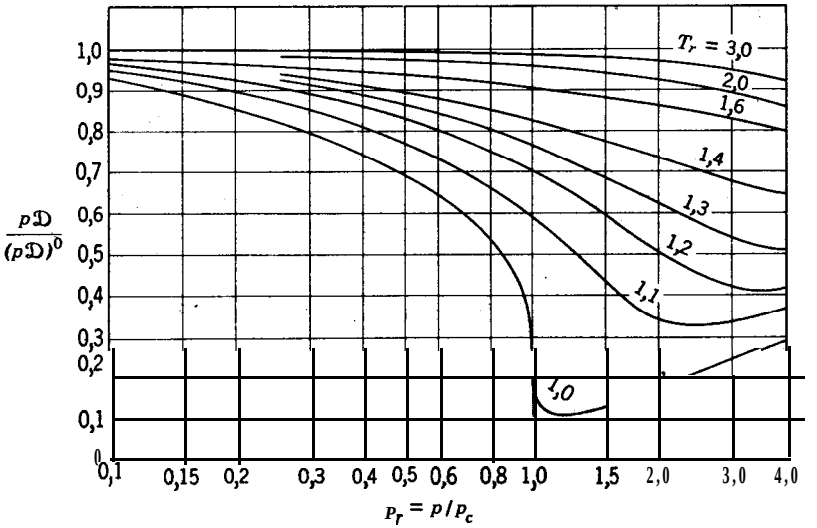


Fig. 16.3-1. Gráfica generalizada para autodifusividades de gases densos. J. C. SLATTERY, *M. S. thesis*, Universidad de Wisconsin (1955); esta gráfica está basada en muy pocos datos.

[1] J. C. SLATTERY y R. B. BIRD, *A. I. Ch. E. Journal*, *4*, 137-142 (1958).

[2] Comparaciones detalladas de este y otros métodos de estimación se dan en R. C. REID y T. K. SHERWOOD, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, Nueva York (1958), pp. 267-276.

A presiones elevadas, $\mathscr{D}_{AB}$ ya no disminuye linealmente con la presión. En realidad, se sabe muy poco acerca de la variación con la presión, excepto en el caso límite de la autodifusión (interdifusión de moléculas idénticas) que se puede investigar muy bien experimentalmente utilizando trazadores isotópicos. Mediante la Fig. 16.3—1 se puede estimar la variación de la autodifusividad, $\mathscr{D}_{AA}$, con la presión. Esta gráfica se ha construido basándose en la teoría cinética de Enskog de los gases densos, utilizando algunos datos experimentales incompletos[1]. La ordenada del gráfico es $p\mathscr{D}_{AA}/(p\mathscr{D}_{AA})^0$, que corresponde a la relación entre el producto presión-difusividad a la presión p y temperatura T, y el producto presión-difusividad a la misma temperatura pero a baja presión. Esta relación se representa en función de la temperatura reducida $T_r = T/T_c$ y la presión reducida $p_r = p/p_c$. La gráfica es análoga a la de las Fig. 1.3-2 y 8.2-2; más adelante se indica, mediante un ejemplo, la forma de utilizarla.

Se ha sugerido que, en ausencia de otra información, puede utilizarse la Fig. 16.3—1 para estimar $\mathscr{D}_{AB}$ reemplazando p_c y T_c por los valores pseudocríticos p'_c y T'_c de las Ecs. 1.3-3 y 4. Este procedimiento debe de considerarse como provisional ya que existen muy pocos datos experimentales para comprobarlo.

Ejemplo 16.3-1. Estimación de la difusividad a baja densidad

Estimar $\mathscr{D}_{AB}$ para el sistema argón-oxigeno a 293,2 °K y 1 atm de presión total.

Solución. Para utilizar la Ec. 16.3—1 se necesitan las siguientes propiedades (véase Tabla B-l):

		M	T_c	p_c
A	(argón)	39,94	151,2	48,0
B	(oxígeno)	32,00	154,4	49,7

Por lo tanto

$$(p_{cA}p_{cB})^{1/3} = (48{,}0 \times 49{,}7)^{1/3} = 13{,}36$$

$$(T_{cA}T_{cB})^{5/12} = (151{,}2 \times 154{,}4)^{5/12} = 54{,}55$$

$$\left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{39{,}94} + \frac{1}{32{,}00}\right)^{1/2} = 0{,}2372$$

$$a\left(\frac{T}{\sqrt{T_{cA}T_{cB}}}\right)^{b} = 2{,}745 \times 10^{-4}\left(\frac{293{,}2}{\sqrt{151{,}2 \times 154{,}4}}\right)^{1{,}823}$$

$$= 9{,}01 \times 10^{-4}$$

Substituyendo estos valores en la Ec. 16.3-1, se. obtiene

$$(1{,}0)\mathscr{D}_{AB} = (9{,}01 \times 10^{-4})(13{,}36)(54{,}55)(0{,}2372)$$

$$\mathscr{D}_{AB} = 0{,}156 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$$

El valor experimental (véase Tabla 16.2—2) es 0,20 cm^2 seg^{-1}. Obsérvese que el método del ejemplo 16.4—1 es más adecuado.

Ejemplo 16.3-2. Estimación de la difusividad a alta densidad

Estímese $\mathscr{D}_{AB}$ para una mezcla constituida por 80 moles por ciento de metano y 20 moles por ciento de etano a 136atm y 313°K. El valor experimental de $(p\mathscr{D}_{AB})^0$ a 293 °K es 0,163 atm $cm^2\ seg^{-1}$.

Solución. Primeramente corregiremos para la temperatura deseada el valor de $(p\mathscr{D}_{AB})^0$ que se indica, utilizando la Ec. 16.3—1 con las constantes no polares:

$$(p\mathscr{D}_{AB})^0 \text{ a } 313\ ^\circ\text{K} = 0{,}163\left(\frac{313}{293}\right)^{1{,}823}$$
$$= 0{,}184 \text{ atm } cm^2\ seg^{-1}$$

Las propiedades críticas, según la Tabla B- 1 del Apéndice, son

metano:	$T_c = 190{,}7\ ^\circ\text{K}$	$p_c = 45{,}8$ atm
etano:	$T_c = 305{,}4\ ^\circ\text{K}$	$p_c = 48{,}2$ atm

Las propiedades pseudocríticas, de acuerdo con las Ecs. 1.3 -4 y 5, son

$$p_c' = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{ci} = (0{,}80 \times 45{,}8) + (0{,}20 \times 48{,}2)$$
$$= 46{,}3 \text{ atm}$$
$$T_c' = \sum_{i-1}^{n} x_i T_{ci} = (0{,}80 \times 190{,}7) + (0{,}20 \times 305{,}4)$$
$$= 213{,}6^\circ \text{ K}$$

La presión y temperatura pseudorreducidas son

$$\frac{P}{PC'} = \frac{136}{46{,}3} = 2{,}94$$
$$\frac{T}{TC'} = \frac{313}{213{,}6} = 1{,}47$$

Para estas condiciones reducidas, de la Fig. 16.3 — 1 se obtiene $p\mathscr{D}_{A\ B}/(p\mathscr{D}_{A\ B})^0 \doteq 0{,}73$. Por lo tanto,

$$\mathscr{D}_{AB} = \frac{(p\mathscr{D}_{A\ B})^0}{p}\frac{p\mathscr{D}_{AB}}{(p\mathscr{D}_{AB})^0} = \frac{0{,}184}{136}(0{,}73)$$
$$= 9{,}9 \times 10^{-4}\ cm^2\ seg^{-1}$$

El valor experimentals en estas condiciones es $\mathscr{D}_{AB} = 8{,}4 \times 10^{-4}\ cm^2\ seg^{-1}$. Si se utiliza para $(p\mathscr{D}_{AB})^0$ el valor que predice la teoría de Chapman-Enskog expuesta en §16.4, el valor estimado para $\mathscr{D}_{AB}$ resulta $8{,}8 \times 10^{-4}\ cm^2\ seg^{-1}$, que de forma inesperada concuerda satisfactoriamente.

§ 16.4 TEORÍA DE LA DIFUSIÓN ORDINARIA EN GASES A BAJA DENSIDAD

La teoría cinética predice la difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ de las mezclas binarias de gases no polares con un error del orden del 5 por ciento. De igual forma que en §§ 1.4 y 8.3,

[3] V. J. BERRY, Jr. y R. C. KOELLER, «Diffusion in Compressed Binary Gaseous Systems», *Preprint* 45, A. I. Ch. E. 40th National Meeting, 1959.

comenzamos por una deducción simplificada con el fin de ilustrar el mecanismo que tiene lugar, para exponer después los resultados más exactos de la teoría de Chapman-Enskog.

Consideremos una gran masa de gas conteniendo las especies moleculares A y A^*, que poseen la misma masa m_A, tamaño y forma. Un sistema que se aproxima mucho a éste es el constituido por una mezcla binaria de moléculas pesadas de dos isótopos distintos, tales como $U^{235}F_6$ y $U^{238}F_6$. Se desea determinar la difusividad $\mathscr{D}_{AA^*}$ en función de las propiedades moleculares, suponiendo que las moléculas son esferas rígidas de diámetro d_A.

Igual que antes, utilizaremos los siguientes resultados de la teoría cinética1 para un gas a baja densidad constituido por esferas rígidas, en el que los gradientes de temperatura, presión y velocidad, son pequeños :

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}} \quad = \text{valor medio de la velocidad molecular con relación a } v \text{ o } v^* \tag{16.4-1}$$

$$Z = 1/4\, n\, \bar{u} \quad = \text{frecuencia de colisión de pared por unidad de área en el gas estacionario} \tag{16.4-2}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad = \text{recorrido libre medio} \tag{16.4-3}$$

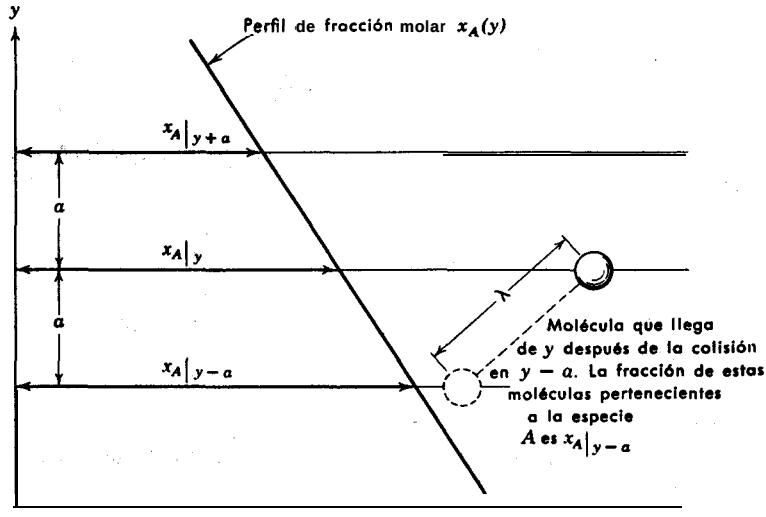


Fig. 16.4-1. Transporte molecular de la especie A desde el plano $(y - a)$ al plano y.

[1] Se pueden utilizar las expresiones correspondientes a un gas puro, ya que las propiedades mecánicas de A y A^* son idénticas.

Las moléculas que llegan a un plano situado en el gas han efectuado, como promedio, su última colisión a una distancia a de dicho plano, siendo

$$a = \tfrac{2}{3}\lambda \tag{16.4-4}$$

Para determinar la difusividad $\mathscr{D}_{AA^*}$, consideremos el movimiento de la especie A en la dirección y debido a un gradiente de concentración dx_A/dy (véase Fig. 16.4— 1); cuando la mezcla en conjunto se mueve con una velocidad finita v_y^*. Se supone que la temperatura T y la concentración molar c permanecen constantes. Se admite también que las Ecs. 16.4-1, 2, 3 y 4 siguen siendo válidas en esta situación de no equilibrio. La densidad de flujo molar N_{Ay} de la especie A a través de un plano situado a una distancia constante y, se halla sumando las moléculas de A que cruzan por unidad de área de plano en la dirección y positiva y restando las que lo cruzan en la dirección y negativa. Por lo tanto,

$$N_{Ay} = \frac{1}{\tilde{N}}\{nx_A v_y^*|_y + \tfrac{1}{4}nx_A\bar{u}|_{y-a} - \tfrac{1}{4}nx_A\bar{u}|_{y+a}\} \tag{16.4-5}$$

Los dos últimos términos de esta ecuación están calculados suponiendo que el perfil de velocidad es lineal en una distancia correspondiente a varias veces el recorrido libre medio. De acuerdo con esta suposición, se puede escribir

$$x_A|_{y-a} = x_A|_y - \frac{2}{3}\lambda\frac{dx_A}{dy} \tag{16.4-6}$$

$$x_A|_{y+a} = x_A|_y + \frac{2}{3}\lambda\frac{dx_A}{dy} \tag{16.4-7}$$

Combinando las Ecs. 16.4-5, 6 y 7, y teniendo en cuenta que $cv^* = N_A + N_A^*$ (véase Tabla 16.1-3, Ec. M), se llega a

$$N_{Ay} = x_A(N_{Ay} + N_{A^*y}) - \frac{1}{3}c\bar{u}\lambda\frac{dx_A}{dy} \tag{16.4-8}$$

Esta ecuación corresponde al componente y de la ley del Fick (Ec. 16.2—2) con el siguiente valor aproximado para $\mathscr{D}_{AB}$:

$$\mathscr{D}_{AB} = \tfrac{1}{3}\bar{u}\lambda \tag{16.4-9}$$

Utilizando $\bar{u}$ y λ de las Ecs. 16.4— 1 y 3, juntamente con la ley de gas ideal, $p = cRT = n\kappa T$, se obtiene

$$\mathscr{D}_{AA^*} = \frac{2}{3}\left(\frac{\kappa^3}{\pi^3 m_A}\right)^{1/2}\frac{T^{3/2}}{p\,d_A^2} \tag{16.4-10}$$

que representa la difusividad de una mezcla de dos componentes cuyas moléculas

son esferas rígidas de idéntica masa y diámetro. El cálculo de $\mathscr{D}_{AB}$ para esferas rígidas de distinta masa y diámetro es mucho más difícil; el resultado[2] que se obtiene es

$$\mathscr{D}_{AB} = \frac{2}{3}\left(\frac{K^3}{\pi^3}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2m_A}+\frac{1}{2m_B}\right)^{1/2}\frac{T^{3/2}}{p\left(\frac{d_A+d_B}{2}\right)^2} \tag{16.4-11}$$

Las Ecs. 16.4— 10 y ll predicen que la difusividad varía 'inversamente con la presión; esta predicción concuerda con los datos experimentales de muchas mezclas para presiones de hasta unas diez atmósferas. (Véase Fig. 16.3-1.) La variación que predicen con la temperatura es bastante deficiente, lo mismo que en el caso de la viscosidad y la conductividad calorífica, pero desde el punto de vista cualitativo es correcta.

El tratamiento que acabamos de exponer resulta útil con fines ilustrativos, pero para obtener resultados exactos hay que utilizar la teoría cinética de Chapman-Enskog. En §§ 1.4 y 8.3 se han visto las fórmulas de Chapman-Enskog para la viscosidad y la conductividad calorífica; la expresión correspondiente de $c\mathscr{D}_{AB}$ para el estado gaseoso a baja densidad es:[3,4]

$$c\mathscr{D}_{AB} = 2{,}2646 \times 10^{-5}\frac{\sqrt{T\left(\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_B}\right)}}{\sigma_{AB}^2\,\Omega_{\mathscr{D},AB}} \tag{16.4-12}$$

Si se toma el valor aproximado de c de acuerdo con la ley del gas ideal se tiene

$$\mathscr{D}_{AB} = 0{,}0018583\frac{\sqrt{T^3\left(\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_B}\right)}}{p\sigma_{AB}^2\,\Omega_{\mathscr{D},AB}} \tag{16.4-13}$$

en la que $\mathscr{D}_{AB}$ [=] $cm^2\ seg^{-1}$, c[=] g-mol cm^{-3}, T[=]° K, p[=] atm, σ_{AB} = unidades Ångström, y $\Omega_{\mathscr{D},AB}$ es una función adimensional de la temperatura y del campo de potencial intermolecular para una molécula de A y otra de B. Este campo de potencial viene dado, aproximadamente, por la función de Lennard-Jones:

$$\varphi_{AB}(r) = 4\epsilon_{AB}\left[\left(\frac{\sigma_{AB}}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma_{AB}}{r}\right)^{6}\right] \tag{16.4-14}$$

---

[2] Un resultado análogo se da en R. D. PRESENT, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, Nueva York (1958) p. 55.

[3] S. CHAPMAN y T. G. COWLING, *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, segunda edici&n, Cambridge University Press (1951), capítulos 10 y 14.

[4] J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954), p. 539.

En la Tabla B-2 se dan valores de $\Omega_{\mathcal{D},AB}$ para este modelo de energía potencial en función de $\kappa T/\epsilon_{AB}$. De estos resultados se deduce que a bajas temperaturas $\mathcal{D}_{AB}$ aumenta aproximadamente con la potencia 2,0 de T, y con la potencia 1,65 de T a temperaturas muy elevadas. (Compárese con la Ec. 16. 3 — 1.) Para el caso de esferas rígidas $\Omega_{\mathcal{D},AB}$ sería la unidad para cualquier temperatura y se obtendría un resultado análogo al de la Ec. 16.4-11.

Los parámetros de Lennard-Jones σ_{AB} y ϵ_{AB} pueden, en principio, determinarse directamente a partir de medidas exactas de $\mathcal{D}_{AB}$ en un amplio intervalo de temperaturas; aunque con alguna mayor dificultad, pueden utilizarse también datos de otras propiedades de las mezclas de A y B. Sin embargo, casi nunca se dispone de datos adecuados, y habitualmente hay que estimar σ_{AB} y ϵ_{AB}. La estimación puede realizarse también satisfactoriamente para moléculas no polares y no reaccionantess, combinando empíricamente los parámetros de Lennard-Jones de las especies A y B:[6]

$$\sigma_{AB} = \tfrac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) \tag{16.4-15}$$

$$\epsilon_{AB} = \sqrt{\epsilon_A \epsilon_B} \tag{16.4-16}$$

De esta forma se pueden predecir los valores de $\mathcal{D}_{AB}$ con una desviación media del 6 por ciento utilizando datos de viscosidad de los componentes A y B puros, o del 10 por ciento si se utilizan para A y B los parámetros de Lennard-Jones estimados mediante las Ecs. 1.4-14 y 15 a partir de datos de la temperatura de ebullición.[7]

Para una mezcla de dos gases isotópicos $\sigma_{AA^*} = \sigma_A = \sigma_{A^*}$ y $\epsilon_{AA^*} = \epsilon_A = \epsilon_{A^*}$; es decir, que los campos de fuerza intermolecular para las distintas parejas A — A, A^* — A^* y A — A^*, son idénticos, y los parámetros σ_A y ϵ_A pueden obtenerse a partir de los datos de viscosidad de A puro. Si además M_A es grande, la Ec. 16.4-12 se simplifica para dar

$$c\mathcal{D}_{AA^*} = 3{,}2027 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{T/M_A}}{\sigma_A^2 \Omega_{\mathcal{D},A}} \tag{16.4-17}$$

Anteriormente se ha deducido una ecuación aproximada para $\mathcal{D}_{AA^*}$. (Compárese con la Ec. 16.4-10.)

Al comparar las Ecs. 16.4— 17 y 1.4— 18 se obtiene que la autodifusividad $\mathcal{D}_{AA^*}$ y la viscosidad μ de una mezcla gaseosa binaria de dos isótopos pesados están relacionadas de la siguiente forma:

$$\frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{AA^*}} = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AA^*}} = \frac{5}{6} \frac{\Omega_{\mathcal{D},A}}{\Omega_\mu} \tag{16.4-18}$$

[5] Mediante las palabras «no reaccionantes» se indica aquí que A y B no reaccionan en una colisión *bimolecular*. Una colisión de este tipo excluye, por supuesto, la presencia de un agente catalítico, de forma que los pares de moléculas que sólo reaccionan catalíticamente serán consideradas a este respecto como no reaccionantes.

[6] J. O. HIRSCHFELDER, R. B. BIRD y E. L. SPOTZ, *Chem. Revs.*, **44, 205-231 (1949).**

[7] R. C. REID y T. K. SHERWOOD, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, Nueva York (1958), pp. 274-5.

en la que $\Omega_{\mathcal{D},A}$ y Ω_μ son dos funciones de $\kappa T/\epsilon_A$ prácticamente iguales. (Véase Tabla B-2.) Por consiguiente, para los ***gases a baja densidad,*** la ***viscosidad cinemática*** ν y la ***autodifusividad*** $\mathcal{D}_{AA}$, son del mismo orden de magnitud. La relación entre ν y la ***difusividad binaria*** $\mathcal{D}_{AB}$ no es tan sencilla debido a que $\nu = \mu/\rho$ puede variar considerablemente con la composición, si bien la relación $\mu/\rho\mathcal{D}_{AB}$ está comprendida entre 0,2 y 5,0 para la mayor parte de los sistema: binarios. El término $\mu/\rho\mathcal{D}_{AB} = \nu/\mathcal{D}_{AB}$ se conoce con el nombre de número ***de Sc :midt;*** lo encontraremos repetidamente en problemas de difusión en sistemas de fluj ›, de la misma forma que aparece el número de Prandtl $\hat{C}_p\mu/k = \nu/\alpha$ en los problemas de conducción del calor en sistemas de flujo.

Las Ecs. 16.4— 12, 13, 17 y 18, se han deducido para gases monoatómicos no polares, pero se ha comprobado que son aplicables también a los gases poliatómicos no polares. Por otra parte, estas ecuaciones pueden utilizarse para predecir $\mathcal{D}_{AB}$ en la interdifusión estacionaria de un gas polar* y otro no polar usando distintas combinaciones de las Ecs. 16.4— 15 y 16.

Ejemplo 16.4-1. Cálculo de la difusividad a baja densidad

Predecir el valor de $\mathcal{D}_{AB}$ para las mezclas de argón *(A)* y oxígeno *(B)* a 293,2 °K y 1 atm de presión total.

Solución. De la Tabla B- 1 se obtienen las siguientes constantes:

$$M_A = 39{,}944; \qquad \sigma_A = 3{,}418\ \text{Å}; \qquad \frac{\epsilon_A}{\kappa} = 124\text{"}\ \text{K}$$

$$M_B = 32{,}000; \qquad \sigma_B = 3{,}433\ \text{A}; \qquad \frac{\epsilon_B}{\kappa} = 113°\text{K}$$

Los parámetros σ_{AB} y ϵ_{AB}/κ para las colisiones de argón con oxígeno pueden estimarse mediante las Ecs. 16.4-15 y 16:

$$\sigma_{AB} = (\tfrac{1}{2})(3{,}418 + 3{,}433) = 3{,}426\ \text{A}$$

$$\frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = \sqrt{(124)(113)} = 118{,}5°\ \text{K}$$

Con lo que $\kappa T/\epsilon_{AB} = 293{,}2/118{,}5 = 2{,}47$, y de la Tabla B -2 se obtiene $\Omega_{\mathcal{D},AB} = 1{,}003$. Substituyendo los anteriores valores en la Ec. 16.4-13, queda

$$\mathcal{D}_{AB} = 0{,}0018583\frac{\sqrt{T^3\left(\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_B}\right)}}{p\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D},AB}}$$

$$= 0{,}0018583\frac{\sqrt{(293{,}2)^3\left(\frac{1}{39{,}944}+\frac{1}{32{,}00}\right)}}{(1{,}00)(3{,}426)^2(1{,}003)}$$

$$= 0{,}188\ \text{cm}^2\ \text{seg}^{-1}$$

---

[8] J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *loc. cit.*, § *8.6 b.*

Lo que está de acuerdo con el valor experimental de $0{,}20\ cm^2\ seg^{-1}$ que se indica en la Tabla 16.2—2.

§ 16.5 TEORÍA DE LA DIFUSIÓN ORDINARIA EN LÍQUIDOS

A falta de una teoría rigurosa para la difusión en líquidos, existen dos aproximadas que resultan útiles para conocer el orden de magnitud de los cálculos: la ***teoría hidrodinámica y*** la ***teoría de Eyring.*** (Anteriormente se han visto ya algunos resultados de las teorías de Eyring y colaboradores en relación con el cálculo de la viscosidad y la conductividad calorifica de líquidos.)

La ***teoría hidrodinámica*** toma como punto de partida la ecuación* de Nernst-Einstein, que establece que la difusividad de una partícula aislada o molécula del soluto ***A*** a través del medio ***B es:***

$$\mathscr{D}_{AB} = \kappa T \frac{u_A}{F_A} \tag{16.5-1}$$

en la que u_A/F_A es la «movilidad» de la partícula A (es decir, la velocidad en estado estacionario que alcanza la partícula cuando se somete a la acción de una unidad de fuerza). Mediante la hidrodinámica se puede obtener una relación entre la fuerza y la velocidad para una esfera rígida que se mueve con «flujo reptante», es decir, $Re \ll 1$. Si se tiene en cuenta la posibilidad de «deslizamiento» en la interfase esfera-fluido[2],

$$F_A = 6\pi\mu_B u_A R_A \left(\frac{2\mu_B + R_A\beta_{AB}}{3\mu_B + R_A\beta_{AB}}\right) \tag{16.5-2}$$

en la que μ_B es la viscosidad del disolvente puro, R_A el radio de la partícula que difunde, ***y*** β_{AB} ***el coeficiente de fricción deslizante.*** Se ha indicado[3] que existen dos casos límite de interés:

a. Si el fluido no tiende a deslizarse en la superficie de la partícula que difunde ($\beta_{AA} = \infty$), la Ec. 16.5-2 se convierte en la ley de Stokes

$$F_A = 6\pi\mu_B u_A R_A \tag{16.5-3}$$

y substituyendo en la Ec. 16.5-1 se obtiene

$$\frac{\mathscr{D}_{AB}\mu_B}{\kappa T} = \frac{1}{6\pi R_A} \tag{16.5-4}$$

que se conoce, generalmente, con el nombre de ***ecuación de Stokes-Einstein.***

---

[1] F. DANIELS y R. A. ALBERTY, *Physical Chemistry*, Wiley, Nueva York (1955). Véase también Ec. 18.4—14*a*.

[2] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover, Nueva York, § 337.

[3] R. FÜRTH, en *Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, Barth, Leipzig (1931), vol. 7, p. 635.

Se ha comprobado que la Ec. 16.5-4 describe muy bien la difusión ***de partículas esféricas grandes o moléculas esféricas grandes,*** en cuyo caso el disolvente es como si fuese un medio continuo para la especie que difunde.[4]

b. Si el fluido no tiene tendencia a adherirse sobre la superficie de la partícula que difunde ($\beta_{AB} = 0$), la Ec. 16.5-2 se transforma en

$$F_A = 4\pi\mu_B u_A R_A \tag{16.5-5}$$

y la Ec. 16.5-1 se hace

$$\frac{\mathscr{D}_{AB}\mu_B}{KT} = \frac{1}{4\pi R_A} \tag{16.56}$$

Si las moléculas son todas iguales (es decir, ***autodifusión***) y se admite que están dispuestas en una red cúbica tocándose entre sí, $2R_A$ puede tomarse igual a $(\tilde{V}_A/\tilde{N})^{1/3}$, y

$$\frac{\mathscr{D}_{AA}\mu_A}{KT} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}_A}\right)^{1/3} \tag{16.5-7}$$

Se ha comprobados que la Ec. 16.5-7 predice los datos experimentales de la autodifusión para numerosos Jíquidos con un error del orden de $\pm$ 12 por ciento. En esta comparación están comprendidos los compuestos polares, substancias asociadas, metales líquidos y azufre fundido.

Como se ve, mediante un tratamiento hidrodinámico sencillo se obtienen expresiones para el coeficiente de difusión de moléculas esféricas en disoluciones diluidas, así como también para el coeficiente de autodifusión. La teoría predice que $\mathscr{D}_{AB}$ debe de variar con el tamaño de la especie que difunde. La teoría hidrodinámica sugiere también que la forma de la especie que difunde puede ser muy importante, puesto que el factor de fricción se hace aproximadamente el doble cuando la relación de la longitud a la anchura de un cuerpo pasa de 1 a 10.

La ***teoría de la velocidad, de Eyring,***[6] trata de explicar los fenómenos de transporte a base de un modelo sencillo para el estado líquido. En esta teoría se supone que existe algún proceso de velocidad unimolecular en función del cual puede describirse el proceso de difusión, y que a su vez en dicho proceso existe alguna configuración que puede identificarse como el ***estado activado.*** A este proceso elemental se le aplica la teoría de las velocidades de reacción de Eyring.

Admitiendo la configuración cúbica de la red, esta teoría conduce a la siguiente relación entre el coeficiente de autodifusión y el coeficiente de viscosidad:

$$\frac{\mathscr{D}_{AA}\mu_A}{KT} = \left(\frac{\tilde{N}}{\tilde{V}_A}\right)^{1/3} \tag{16.5-8}$$

---

[4] W. SUTHERLAND, *Phil. Mag, 9, 781-785* (1905).

[5] J. C. M. LI y P. CHANG, *J. Chem. Phys., 23,* 518-520 (1955).

[6] S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER y H. EYRING, *Theory of Rate Processes,* McGraw-Hill, Nueva York (1941). capítulo IX.

Esta relación se diferencia en el factor 2π de la Ec. 16.5-7, que es la expresión del coeficiente de autodifusión de acuerdo con la teoría hidrodinámica. Sm embargo, la Ec. 16.5-7 se adapta mejor a los datos experimentales que la Ec. 16.5-8.. Li y Chang[7] han sugerido recientemente una modificación de la teoría de Eyring con el fin de tener en cuenta esta discrepancia.

Debido al carácter aproximado de las teorías anteriores, se han propuesto varias *relaciones empíricas,*[8] de las que solamente mencionaremos una de ellas.

Wilke[9] ha desarrollado una correlación para los coeficientes de difusión basada en la ecuación de Stokes-Einstein. Sus resultados pueden resumirse en la siguiente relación analítica de carácter aproximado,[10] que expresa el coeficiente de difusión en $cm^2\ seg^{-1}$ para bajas concentraciones de A y B:

$$\mathscr{D}_{AB} = 7{,}4 \times 10^{-8} \frac{(\psi_B M_B)^{1/2} T}{\mu \tilde{V}_A^{0{,}6}} \qquad (16.5\text{-}9)$$

Siendo $\tilde{V}_A$ el volumen molar del soluto A en cm3 $g\text{-}mol^{-1}$ como líquido a su temperatura normal de ebullición, μ la viscosidad de la solución en centipoises, ψ_B un «parámetro de asociación» para el disolvente B, y T la temperatura absoluta en °K. Los valores de ψ_B que se recomiendan son 2,6 para el agua, 1,9 para el metanol, 1,5 para el etanol, y 1,0 para el benceno, éter, heptano y otros disolventes no asociados. Esta ecuación conduce a buenos resultados sólo para disoluciones diluidas de solutos no disociados, en cuyo caso el error está, generalmente, comprendido entre $\pm$ 10 por ciento.

El lector habrá llegado a la conclusión de que hasta ahora se sabe poco acerca de la predicción de difusividades de líquidos y gases densos. Hay una urgente necesidad de medidas experimentales, tanto para el conocimiento de su verdadero valor como para el desarrollo de futuras teorías.

Ejemplo 16.5-1. Estimación de la difusividad para una mezcla líquida binaria

Estímese $\mathscr{D}_{AB}$ para una disolución diluida de TNT (2,4,6-trinitrotolueno) enbenceno a 15°C.

Solución. Utilícese la ecuación de Wilke y Chang, tomando el TNT como componente A y el benceno como componente B. Los datos necesarios son:

μ = 0,705 cp (para la disolución considerada como benceno puro)
$\tilde{V}_A$ = 140 cc $g\text{-}mol^{-1}$, para el TNT[11]
ψ_B = 1,0 para el benceno
M_B = 78,11 para el benceno

---

[7] Li y Chang, *loc. cit.*

[8] Véase, por ejemplo, R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids*, Mc Graw-Hill, Nueva York (1958), pp. 284-298.

[9] C. R. Wilke, *Chem. Eng. Prog., 45,* 218-224 (1949).

[10] C. R. Wilke y P. Chang, *A. I. Ch. E. Journal*, 1, 264-270, 1955.

[11] Estimado por el método del volumen atómico de Schroeder, tal como se cita por R. C. Reid y T. K. Sherwood, *The Properties of Gases and Liquids,* McGraw-Hill, Nueva York (1958), p. 51.

Substituyendo en la Ec. 16.5-9, se obtiene

$$\mathscr{D}_{AB} = 7{,}4 \times 10^{-8}\frac{(1{,}0 \times 78{,}11)^{1/2}(273 + 15)}{0{,}705(140)^{0{,}6}}$$

$$= 1{,}38 \times 10^{-5}\ \text{cm}^2\ \text{seg}^{-1}$$

El resultado concuerda con el valor experimental de $1{,}39 \times 10^{-5}\ \text{cm}^2\ \text{seg}^{-1}$

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Qué es difusión? ¿Qué factores pueden dar lugar a difusión?

2. ¿Cuándo la fracción de masa es igual a la fracción molar?

3. Compárese la velocidad media de masa v de la Ec. 16.1-1 con la velocidad media definida en § 2.2.

4. Comparese el significado de las densidades de flujo N_i y J_i^*. Hágase lo mismo con n_i y j_i.

5. ¿Por que es necesario especificar una velocidad de referencia al dar datos de velocidad de difusión?

6. Comparar ta ley de Fick de la difusión con la ley de Newton de la viscosidad y la ley de Fourier de la conductividad calorífica. ¿Hasta qué punto son análogas estas tres relaciones?

7. Indíquense las formas especiales de la ley de Fick para la densidad de flujo N_A que han de aplicarse en: (a) interdifusión equimolar $(N_A = -N_B)$, (b) difusión de A a través de B estancado $(N_B = 0)$

8. ¿Cuáles son las dimensiones de $\mathscr{D}_{AB}$, v, y a?

9. Compárese el orden de magnitud de $\mathscr{D}_{AB}$ y $c\mathscr{D}_{AB}$ para gases y líquidos a 1 atm.

10. ¿Qué diferencia de comportamiento presentan las curvas difusividad-concentración para el etanol-agua y el n-butanol-agua, de acuerdo con la Tabla 16.2—3?

11. Comprobar, mediante un pequeño calculo, la afirmación que respecto de la variación de $\mathscr{D}_{AB}$ con la temperatura se ha hecho inmediatamente después de la Ec. 16.4—14.

12. ¿Qué método empírico& adecuado para predecir el campo de fuerza intermolecular entre dos moléculas no polares diferentes?

13. ¿Qué propiedades físicas globales están relacionadas por la ecuación de Stokes-Einstein? Compruébese la consistencia dimensional de esta ecuación.

14. Compárese la relación entre $\mathscr{D}_{AB}$ y μ para gases y líquidos.

15. ¿Qué porcentaje de error afectaría al valor estimado de $\mathscr{D}_{AB}$ a partir de la Ec. 16.4—13 un error del 5 por ciento en σ_{AB}? ¿En T? ¿En ϵ_{AB}/κ?

16. ¿En la difusión binaria, el hecho de que no sea cero el gradiente de fracción molar ∇x_A implica que tampoco lo es la densidad de flujo molar N_A ? Explíquese.

PROBLEMAS

16.A$_1$ Predicción de la difusividad para una mezcla gaseosa binaria a baja densidad

Predecir $\mathscr{D}_{AB}$ para el sistema metano-etano a 40° C y 1 atm utilizando la teoría de Chapman-Enskog. Comparar el resultado con en valor experimental que se da en el ejemplo 16.3 — 1.

Respuesta: 0,166 cm seg^{-1}*

16.B$_1$ Predicción de la difusividad a baja densidad a partir de las propiedades criticas

Predecir $\mathscr{D}_{AB}$ para el mismo caso del problema 16.A, utilizando los dos métodos siguientes:

(a). La ecuación de Slattery, Ec. 16.3-1.

(6). La ecuación teórica de Chapman-Enskog, Ec. 16.4– 13, usando temperaturas y presiones críticas para estimar los parámetros de Lennard-Jones. (Véanse las Ecs. 1.4– Il y 13.)

Respuestas: a. 0,172 cm* seg^{-1}
b. 0,156 cm* seg- ^{1}

16.C$_1$ Corrección de la difusividad a baja densidad por variación de la temperatura

Se conoce[1] el valor de $\mathscr{D}_{AB}$ = 0,15 1 cm^2 seg^{-1} para el sistema CO_2-aire a 293 °K y 1 atm. Extrapólese $\mathscr{D}_{AB}$ para 1500 °K, utilizando los métodos siguientes:

a. Ec. 16.3-1
b. Ec. 16.4-11
c. Ec. 16.4-13

Respuestas, en cm^2 seg^{-1}: a. 2,96
b. 1,75
c. 2,49
Valor experimental:' = 2,45 cm^2 seg^{-1}

16.D$_1$ Predicción de la difusividad para una mezcla gaseosa de elevada densidad

Predecir $\mathscr{D}_{AB}$ para una mezcla equimolar de CO_2 y N_2 a 288,2 °K y 40 atm:

a. Utilizando el valor de $\mathscr{D}_{AB}$ a 1 atm de la Tabla 16.2-2.
b. Utilizando la teoría de Chapman-Enskog para predecir $(p\mathscr{D}_{AB})°$.

Respuestas: a. 0,0033 cm^2 seg^{-1}
b. 0.0030 cm* seg^{-1}

16.E$_1$ Estimación de la difusividad para una mezcla líquida binaria

Estimar $\mathscr{D}_{AB}$ para una solución acuosa diluida 'de ácido acético a 12,5 °C utilizando la Ec. 16.5-9. La densidad del kido acético a su temperatura normal de ebullición es 0,937 g cm^{-3}. (Se conoce* un valor experimental de 0.91 $\pm$ 0,04 x 10^{5-} cm* seg^{-1}.)

16.F$_1$ corrección de la difusividad para una mezcla líquida binaria debido a la variación de la temperatura

El valor de $\mathscr{D}_{AB}$ para una disolución diluida de metano1 en agua a 15 °C es 1,28 x 10^{-5} cm2 seg^{-1}. Estímese $\mathscr{D}_{AB}$ para la misma disolución a 100 °C, utilizando la ecuación de Wilke-Chang.

Respuesta: 6,7 x 10^{-5} cm* seg^{-1}

16.G$_1$ Corrección de la difusívidad de una mezcla gaseosa debido a la variación de la temperatura

El valor experimental de $\mathscr{D}_{AB}$ para una mezcla de 80 moles por ciento de metano y 20 moles por ciento de etano a 40 °C y 136 atni. es 8,4 x 10^{-4} cm* seg^{-1}. Predecir el valor de $\mathscr{D}_{AB}$ para esta mezcla a 136 atm y 77,2 °C:

a. Utilizando la Ec. 16.3-1 y la Fig. 16.3-1
b. Utilizando la Fc. 16.4-13 y la Fig. 16.3-1

Respuesta: a. 1,19 x 10^{-3} cm* seg^{-1}

---

[1] Ts. M. KLIBANOVA, V. V. POMERANTSEV, y D. A. FRANK-KAMENETSKII, *J. Tech. Phys* (U.S.S.R.), 12, 14-30 (1942), tal como se cita por C. R. WILKE y C. Y. LEE, *Ind. Eng. Chem.*, 47, 1253 (1955).

[2] *International Critical Tables*, McGraw-Hill, Nueva York (1929), vol. V, p. 70.

16.H$_2$ Relaciones entre densidades de flujo y concentraciones en un sistema binario

Comprobar las Ecs. *K*, *L* y *Z*, de la Tabla 16.1−3, *Y* la 0 de la Tabla 16.1-1, utilizando únicamente las definiciones de concentraciones, velocidades y densidades de flujo.

16.I$_2$ Equivalencia de las distintas formas de la ley de Fick

a. Demostrar que todas las formas de la ley de Fick que se indican en la Tabla 16.2-1 son equivalentes, es decir, que el valor de $\mathscr{D}_{AB}$ es el mismo en las siete ecuaciones. Pueden utilizarse algunas relaciones de § 16.1.

b. Utilizar la Ec. 16.2− 1 y las relaciones tabuladas de § 16.1 para demostrar que $\mathscr{D}_{AB} = \mathscr{D}_{BA}$.

16.5, Determinación de los padmetros de colisión a partir de datos de difusividad

a. Utilizar los siguientes datos del sistema CO_2-aire a 1 atm de presión[3] para determinar directamente σ_{AB} y ϵ_{AB}/κ, es decir, sin utilizar los valores de σ y ϵ/κ para las especies por separado

T, °K	293	400	600	800	1000
$\mathscr{D}_{AB}$, cm^2 seg^{-1}	0,151	0,273	0,555	0,915	1,32

Se sugiere que se represente log $(T^{3/2}/\mathscr{D}_{AB})$ frente a log T para los datos experimentales, en papel transparente, y que en un papel aparte se construya una gráfica de $\Omega_{\mathscr{D},AB}$ frente a $\kappa T/\epsilon_{AB}$ a la misma escala. Superponiendo las dos gráficas se puede deducir de las escalas el valor numérico de las relaciones $T/(\kappa T/\epsilon_{AB})$ y $(T^{3/2}/\mathscr{D}_{AB})/\Omega_{\mathscr{D},AB}$. Con estas dos relaciones y la Ec. 16.4− 12 se pueden deducir los parámetros σ_{AB} y ϵ_{AB}/κ.

b. Estimar σ_{AB} y ϵ_{AB}/κ por el procedimiento de § 16.4.

16.K$_3$ Densidad de flujo de materia con respecto a la velocidad volumétrica media

Tómese para la ***velocidad volumétrica media,*** por definición

$$v^{\blacksquare} = \Sigma_i \rho_i v_i (\bar{V}_i/M_i) \qquad (16.K\text{–}1)$$

en la que $\bar{V}_i$ es el volumen parcial molar del componente *i*, y *M*, es su peso molecular.-La densidad de flujo de masa con respecto a la velocidad media de volumen viene dada por

$$j_i^{\blacksquare} = \rho_i (v_i - v^{\blacksquare}) \qquad (16.K\text{–}2)$$

Demostrar que para un sistema binario constituido por las especies *A y B*

$$j_A^{\blacksquare} = j_A \rho (\bar{V}_B/M_B) \qquad (16.K\text{–}3)$$

y que la ley de Fick toma la forma

$$j_A^{\blacksquare} = -\mathscr{D}_{AB} \nabla \rho_A \quad . \qquad (16.K\text{–}4)$$

---

[3] De acuerdo con la nota 1 del problema 16.C.

CAPÍTULO 17

DISTRIBUCIONES DE CONCENTRACIÓN EN SÓLIDOS Y EN FLUJO LAMINAR

En el Capítulo 2 se ha visto cómo se pueden plantear y resolver numerosos problemas de flujo aplicando un ***balance de cantidad de movimiento*** a una envoltura. También en el Capítulo 9 se ha estudiado la forma de abordar los problemas de conducción del calor mediante la aplicación de un ***balance de energía*** a una envoltura. En este capítulo veremos cómo se plantean problemas elementales de difusión mediante un ***balance de materia*** aplicado a una envoltura. El procedimiento' que se utiliza es esencialmente el mismo que en los casos anteriores:

a. Se aplica un balance de materia a una envoltura delgada perpendicular a la dirección del transporte de materia, con el fin de obtener una ecuación diferencial de primer orden, cuya integración conduce a la distribución de la densidad de flujo de materia.

b. Se substituye en esta expresión la relación entre la densidad de flujo de materia y el gradiente de concentración, obteniéndose una ecuación diferencial de segundo orden para el perfil de concentración. Las constantes de integración se determinan a partir de las condiciones límite que fijan la concentración y la densidad de flujo de materia en las superficies que confinan el sistema.

En el Capítulo 16 se ha indicado que con frecuencia se utiliian varias clases de densidad de flujo de materia. Para simplificar, utilizaremos exclusivamente la densidad de flujo N_A, es decir, el número de moles de A que atraviesan la unidad de área en la unidad de tiempo, estando la unidad de área fija en el espacio. Para los sistemas de dos componentes relacionaremos la densidad de flujo molar con el gradiente de concentración mediante la expresión (véase Ec. 16.2-2)

$$N_{Az} = -c\mathscr{D}_{AB}\frac{\partial x_A}{\partial z} + x_A(N_{Az} + N_{Bz}) \qquad (17.0\text{–}1)$$

{densidad de flujo con respecto a ejes fijos} {densidad de flujo que resulta de la difusión} {densidad de flujo que multa del flujo global}

Téngase en cuenta que N_{Az} es el componente z del vector N_A. Para poder utilizar la Ec. 17.0-1 hay que eliminar N_{Bz}. Esto sólo es posible si de antemano se sabe algo acerca de la relación N_{Bz}/N_{Az}. En los problemas que se estudian en este capítulo se comienza por establecer esta relación basándose en hechos físicos.

En el presente capítulo se estudia la difusión en sistemas ***reaccionantes y no reaccionantes.*** En el caso de existir reacción química, pueden ser de dos tipos: ***homogéneos,*** en los que el cambio químico tiene lugar en todo el volumen del fluido, ***y heterogéneos,*** en los que dicho cambio ocurre solamente en una región restringida del sistema, tal como la superficie de un catalizador. Las reacciones homogéneas y heterogéneas no difieren solamente en el aspecto físico, sino también en la forma en que son descritas. En una reacción homogénea la velocidad de producción aparece en un término de manantial en la ecuación diferencial que se obtiene a partir del balance de materia aplicado a una envoltura, que corresponde al término de manantial calorífico que aparece en el balance de. energía aplicado a una envoltura. Por el contrario, en una reacción heterogénea la velocidad de producción no aparece en la ecuación diferencial, sino en la condición límite correspondiente a la superficie sobre la que tiene lugar la reacción.

Para el planteamiento de problemas en los que intervienen reacciones químicas es preciso disponer de información acerca de la velocidad con que se forman o desaparecen las diferentes especies químicas durante la reacción. Esto nos lleva al campo de la ***cinética química,*** la rama de la química física que estudia los mecanismos de las reacciones químicas y la velocidad con la que éstas se producen.[1] En este capítulo se supone que son conocidos los mecanismos de las reacciones químicas, y que las velocidades de reacción pueden representarse mediante funciones sencillas de las concentraciones de las substancias reaccionantes. A este respecto, es preciso indicar la notación que se ha de utilizar para las constantes de velocidad de reacción. Para reacciones heterogéneas, la velocidad de reacción en la superficie catalítica puede expresarse mediante una relación de la forma

$$R_A = k_n''' c_A{}^n \qquad (17.0\text{–}2)$$

en la que $R_A[=]$ moles cm^{-3} seg^{-1}, y $c_A[=]$ moles cm^{-3}. El exponente n representa el «orden» de la reacción;[2] para una reacción de primer orden, $k_1'''[=]\ seg^{-1}$. Para reacciones heterogéneas, la velocidad de reacción en la superficie catalítica puede expresarse mediante una relación de la forma

$$N_{As}|_{\text{superficie}} = k_n'' c_A{}^n|_{\text{superficie}} \qquad (17.0\text{-}3)$$

en la que $N_{As}[=]$ moles cm-2 seg^{-1}, y $c_A[=]$ moles cm^{-3}. En este caso $k''_1[=]$ cm seg $^{-1}$. Obsérvese que $'''$ representa una constante de velocidad de origen volumétrico, mientras que $''$ corresponde a una constante de velocidad de origen superficial.

---

[1] Para una introducción a la cinética química, véase F. DANIELS y R. A. ALBERTY, ***Physical Chemistry,*** Wiley, Nueva York (1955). cap. 13. Un tratamiento más matemático puede verse en E. A. MOELWYN-HUGHES, ***Physical Chemistry.*** Pergamon Press, Nueva York (1957).

[2] No todas las expresiones de velocidad presentan la forma sencilla de la Fc. 17.0-2. La velocidad de reacción puede ser una función mas complicada de las concentraciones de todas las especies químicas presentes. Lo mismo podría decirse de la Ec. 17.0-3.

En § 17.1 se comienza por establecer el balance de materia aplicado a una envoltura, así como tambitn las distintas clases **de** condiciones límite que pueden presentarse en la **solución** de problemas de difusión. En § 17.2 se discute la difusión en una película estancada, concepto éste que es necesario para comprender las teorías de película de las operaciones difusionales de ingeniería química. En §§ 17.3 y 17.4 se presentan algunos ejemplos elementales de difusión con reacción química, tanto para **reacciones homogéneas** como **heterogéneas.** Confiamos en que estos ejemplos aclararán el papel que **juega** la difusión en **cinética** química, así como el importante hecho de que, en general, la velocidad de la reacción química difiere de la velocidad de los procesos de difusión-reaccibn combinados. En § 17.5 fijamos nuestra atención sobre el tema de la' transferencia de materia por convección forzada (es decir, difusión superpuesta **a** un campo de flujo). **También** se podría haber incluido una sección sobre. transferencia de materia por convección libre, que sería análoga a la dedicada a transmisión de calor por convección libre en el Capítulo 9. Finalmente, en la última sección, § 17.6, se estudia la difusión en catalizadores porosos.

§ 17.1 BALANCES DE MATERIA APLICADOS A UNA ENVOLTURA: CONDICIONES Lf **MITE**

En este capítulo se resuelven los problemas de difusión aplicando un balance de materia, para una determinada especie química, a una delgada envoltura **de** sólido o fluido. Eligiendo un sistema adecuado, la ley de la conservación de la materia puede expresarse de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{entrada de}\\ \text{materia de } A\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de}\\ \text{salida de ma-}\\ \text{teria de } A\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{velocidad de pro-}\\ \text{ducción de mate-}\\ \text{ria de } A \text{ por reac-}\\ \text{ción homogénea}\end{array}\right\} = 0 \qquad (17.1\text{-}1)$$

La ley de la **conservación** de la materia puede, por supuesto, expresarse tambitn en moles. La especie química *A* puede entrar o salir del sistema en virtud de la difusión o del movimiento global del fluido. Por otra parte, la especie *A* también **se** puede formar o destruir a causa de reacciones químicas homogtneas.

Aplicando un balance de materia a una envoltura de espesor finito, de acuerdo con la **Ec. 17.1** — 1, y haciendo tender luego las dimensiones del sistema hacia un valor infinitamente pequeño, se obtiene una ecuación diferencial, cuya solución conduce **a** la **distribución** de la especie *A* en el sistema.

Al integrar la ecuación diferencial aparecen constantes de integración, que han de evaluarse utilizando condiciones límite, y que son muy semejantes a las que se han empleado en el transporte de energía. (Véase § 9.1.)

a. La **concentración** en una superficie puede estar especificada, por ejemplo, $x_A = x_{A0}$.

b. La densidad de flujo de materia en una superficie puede también estar determinada (si se conoce la relación N_A/N_B, el gradiente de concentración está fijado); por ejemplo, $N_A = N_{A0}$.

c. Si la difusión tiene lugar en un sólido, puede ocurrir que la substancia *A* pase desde la superficie del sólido hasta la corriente de fluido que la rodea, de acuerdo con la ecuación

$$N_{A0} = k_c(c_{A0} - c_{Af}) \tag{17.1-2}$$

en la que N_{A0} es la densidad de flujo de materia en la superficie, c_{A0} es la concentración en la superficie, c_{Af} es la concentración en la corriente de fluido, y la constante de proporcionalidad k_c es un «coeficiente de transferencia de materia». En el Capítulo 21 se estudian los métodos de correlación de coeficientes de transferencia de materia. La Ec. 17.1-2 es análoga a la «ley del enfriamiento de Newton» definida mediante la Ec. 9.1-2.

d. La velocidad de la reacción química en la superficie puede estar especificada. Por ejemplo, si la substancia *A* desaparece en una superficie de acuerdo con una reacción química de primer orden, $N_{A0} = k_1'' c_A$; es decir, que la velocidad de desaparición en una superficie es proporcional a la concentración superficial, siendo la constante de proporcionalidad k_1'' una constante de velocidad de reacción química de primer orden.

En las secciones que siguen veremos cómo se utilizan estas diferentes condiciones límite.

§ 17.2 DIFUSIÓN A TRAVÉS DE UNA PELÍCULA GASEOSA ESTANCADA

Consideremos el sistema de difusión que se representa en la Fig. 17.2-1. El líquido *A* se está evaporando en el seno del gas *B*, e imaginemos que mediante un artificio es posible mantener el nivel del líquido en $z = z_1$. La concentración de la fase gaseosa, expresada en fracción molar, exactamente en la interfase líquido-gas, es x_{A1}. Se admite que la concentración de *A* en la fase gaseosa es la correspondiente al equilibrio[1] con el líquido de la interfase; es decir, que x_{A1} es la relación entre la presión de vapor de *A* y la presión total, $p_A^{(vap)}/p$, suponiendo que *A* y *B* forman una mezcla gaseosa ideal. Finalmente, se supone que la solubilidad de *B* en el líquido *A* es despreciable.

Por la parte superior del tubo (para $z = z_2$) circula lentamente una corriente de mezcla gaseosa $A - B$ cuya concentración es x_{A2}, de forma que la fracción molar

[1] La suposición de que existe equilibrio en la interfase ha sido sometida a comprobación experimental por L. N. TUNG y H. G. DRICKAMER, *J. Chem. Phys., 20,612* (1952), y por R. E. EMMERT y R. L. PIGFORD, *Chem. Eng. Progr., 50, 87-93* (1954). Un método basado en la teoría cinética ha sido desarrollado por R. W. SCHRAGE, *A Theoreticol Study of Interphose Mass Tronsfer,* Columbia University Press, Nueva York (1953). Estos estudios parecen indicar que sólo a muy altas velocidades de transferencia de materia existe un apreciable alejamiento del equilibrio en la interfase.

de *A* en la parte superior de la columna permanece constante e igual a x_{A2}. Se supone que todo el sistema se mantiene a temperatura y presión constantes, y que los gases *A* y *B* se comportan como ideales.

Cuando el sistema alcanza el estado estacionario, existe un movimiento neto de *A* alejándose de la superficie de evaporación, mientras que el vapor *B* permanece estacionario. Por lo tanto, puede utilizarse la expresión para N_{Az} correspondiente a la Ec. 17.0-1, siendo $N_{Bz} = 0$.

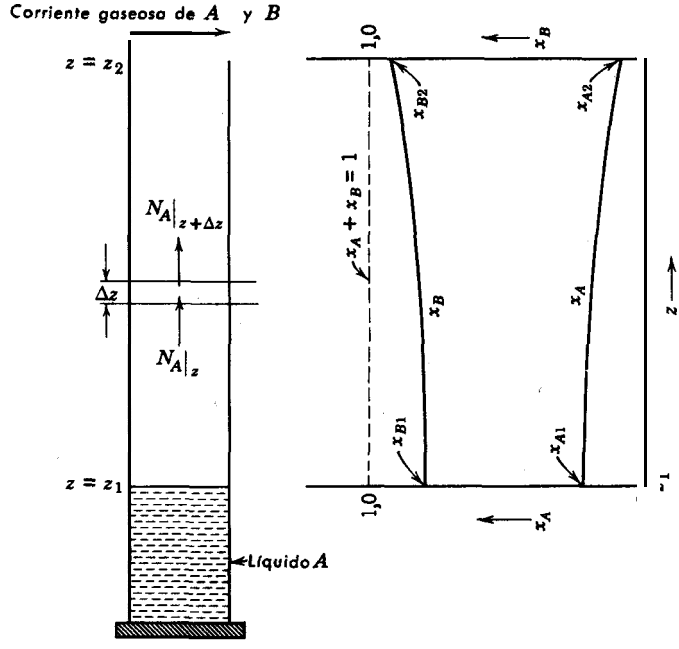


Fig. 17.2-1. Difusión de *A* en estado estacionario a través de *B* inmóvil. El gráfico indica la forma en que se distorsiona el perfil de concentración debido a la difusión de *A*.

Despejando N_{Az}, se obtiene

$$N_{Az} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1 - x_A}\frac{dx_A}{dz} \qquad (17.2\text{–}1)$$

Aplicando un balance de materia en estado estacionario a un incremento de altura de columna Δz (véase Fig. 17.2—1), se llega a

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0 \qquad (17.2\text{-}2)$$

en la que S es el área de la sección transversal de la columna. Dividiendo por $S\Delta z$, y pasando al límite cuando Δz tiende a cero, se obtiene

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \tag{17.2-3}$$

Substituyendo la Ec. 17.2-1 en la Ec. 17.2-3, queda

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1-x_A}\frac{dx_A}{dz}\right) = 0 \tag{17.2-4}$$

Para mezclas gaseosas ideales a temperatura y presión constantes, c es una constante, y $\mathscr{D}_{AB}$ es prácticamente independiente de la concentración. Por consiguiente, $c\mathscr{D}_{AB}$ puede salir fuera de la derivada, quedando

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-x_A}\frac{dx_A}{dz}\right) = 0 \tag{17.2-5}$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden para el perfil de concentración, expresada en fracción molar de *A*. La integración con respecto a z conduce a

$$\frac{1}{1-x_A}\frac{dx_A}{dz} = C_1 \tag{17.2-6}$$

Volviendo a integrar, se obtiene

$$-\ln(1-x_A) = C_1 z + C_2 \tag{17.2-7}$$

Las dos constantes de integración pueden evaluarse utilizando las condiciones límite :

C.L. 1 : para z = z_1 $x_A = x_{A1}$ (17.2-8)

C.L. 2 : para z = z_2 $x_A = x_{A2}$ (17.2-9)

Una vez obtenidas las constantes,[2] se substituyen en la Ec. 17.2-7, y se obtiene

$$\boxed{\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A1}}\right) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}} \tag{17.2-10}$$

0

$$\boxed{\left(\frac{x_B}{x_{B1}}\right) = \left(\frac{x_{B2}}{x_{B1}}\right)^{\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}} \tag{17.2-11}$$

[2] Las constantes son

$$C_1 = \frac{\ln x_{B1} - \ln x_{B2}}{z_1 - z_2} = \frac{\ln(x_{B1}/x_{B2})}{z_2 - z_1} \qquad C_2 = \frac{z_1 \ln x_{B2} - z_2 \ln x_{B1}}{z_2 - z_1}$$

Para obtener? la Ec. 17.2-10, expresar primeramente C_2 en esta forma:

$$C_2 = \frac{z_1 \ln x_{B2} - (z_2 - z_1)\ln x_{B1} - z_1 \ln x_{B1}}{z_2 - z_1} = -\frac{z_1}{z_2 - z_1}\ln\frac{x_{B1}}{x_{B2}} - \ln x_{B1}$$

Estas distribuciones de concentración se representan en la Fig. 17. 2-1. El examen de estas curvas nos indica que la pendiente dx_A/dz no es constante, a pesar de serlo la densidad de flujo molar N_{Az}.

Si bien los perfiles concentración son útiles para describir los procesos de difusión, lo que generalmente interesa en los cálculos ingenieriles es la concentración media o la densidad de flujo de materia en una superficie. Por ejemplo, la concentración media de B en la región comprendida entre z = z_1 y z = z_2, es

$$\frac{x_{B,\text{med}}}{x_{B1}} = \frac{\int_{z_1}^{z_2}(x_B/x_{B1})\,dz}{\int_{z_1}^{z_2}dz} = \frac{\int_0^1 (x_{B2}/x_{B1})^\zeta\,d\zeta}{\int_0^1 d\zeta} = \frac{(x_{B2}/x_{B1})^\zeta}{\ln(x_{B2}/x_{B1})}\Bigg|_0^1 \qquad (17.2-12)$$

de donde resulta que

$$x_{B,\text{med}} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \qquad (17.2\text{-}13)$$

Es decir, que el valor medio de x_B es la media logarítmica de los valores extremos $(x_B)_{\ln}$ En la ecuacibn anterior, ζ es una longitud reducida $(z - z_1)/(z_2 - z_1)$.

La velocidad de transferencia de materia en la interfase líquido-gas, es decir, la velocidad de evaporación, se obtiene utilizando la Ec. 17.2— 1:

$$N_{Az}|_{z=z_1} = -\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_{A1}}\frac{dx_A}{dz}\bigg|_{z=z_1} = +\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{x_{B1}}\frac{dx_B}{dz}_{z=z_1} = \frac{c\mathscr{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)}\ln\left(\frac{x_{B2}}{x_{B1}}\right) \qquad (17.2\text{-}14)$$

Las Ecs. 17.2-13 y 17.2— 14 pueden combinarse para obtener otra expresión de la velocidad de transferencia de materia

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{c\mathscr{D}_{AB}}{(z_2 - z_1)(x_B)_{\ln}}(x_{A1} - x_{A2}) \qquad (17.2\text{-}15)$$

Esta ecuacibn indica la forma en que está relacionada la velocidad de transferencia de materia con una fuerza motriz característica de concentración, $x_{A1} - x_{A2}$. Las Ecs. 17.2-14 y 15 pueden expresarse también en función de la presión total y las presiones parciales :

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{(p\mathscr{D}_{AB}/RT)}{(z_2 - z_1)}\ln\frac{p_{B2}}{P}_m = \frac{(p\mathscr{D}_{AB}/RT)}{(z_2 - z_1)(p_B)_{\ln}}(p_{A1} - p_{A2}) \qquad (17.2\text{–}15a)$$

en la que $(p_B)_{\ln}$ es la media logarítmica de p_{B1} y p_{B2} definida de igual forma que $(x_B)_{\ln}$ en la Ec. 17.2— 15.

Los resultados obtenidos en esta sección se han utilizado para la determinación experimental de difusividades gaseosas.[3] Por otra parte, estos resultados se aplican también en las «teorías de película» para la transferencia de materia. (Véase \$21 .5.) En la Fig. 17.2-2 se presenta un gas fluyendo a lo largo de la superficie de un sólido o un líquido. En las proximidades de la pared existe una película que se mueve

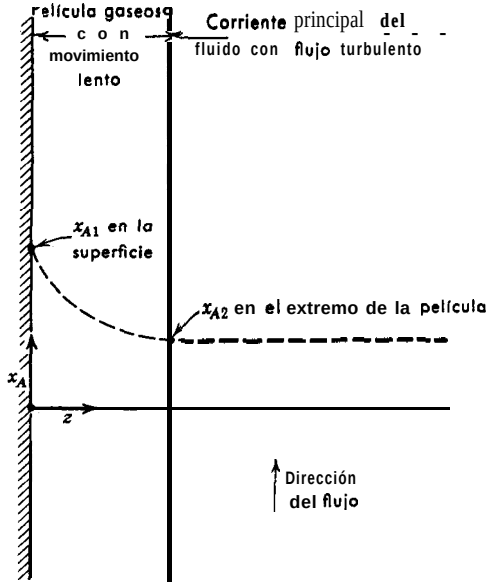


Fig. 17.2-2. Modelo de película para la transferencia de materia;el componente *A* difunde desde la superficie hacía la corriente gaseosa.

lentamente, a través de la cual difunde *A; z_1* se toma en la interfase sólido-gas o líquido-gas, y z_2 en el límite exterior de la película a través de la cual tiene lugar la difusión. En este «modelo» se supone que existe una transición brusca entre una película estancada y un fluido totalmente mezclado en el que los gradientes de concentración son despreciables. Aunque este modelo no es real desde el punto de vista físico, ha resultado, sin embargo, muy útil como base de correlación de los coeficientes de transferencia de materia a partir de una representación físicamente sencilla.

Ejemplo 17.2—1. Determinación de la difusividad

La difusividad del sistema gaseoso binario oxígeno-tetracloruro de carbono se determina observando la evaporación en estado estacionario de CCl_4 en un tubo que contiene

[3] Véase, por ejemplo, C. Y. LEE y C. R. WILKE, *Ind. Eng. Chem.*, *46, 238 1-2387* (1954); T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill (1952).

O_2, tal como se indica en la Fig. 17.2–1. La distancia entre el nivel del CCl_4 líquido y la parte superior del tubo es $z_2 - z_1 = 17.1$ cm. La presión total del sistema es 755 mm Hg, y la temperatura 0 °C. La presión de vapor del CCl_4 a esta temperatura es 33,0 mm *Hg*. La sección transversal del tubo de difusión es 0,82 cm^2. Se ha encontrado que en estas condiciones se evaporan 0,0208 cm^3 de CCl_4 durante un período de 10 horas después de alcanzarse el estado estacionario. ¿Cuál es la difusividad del sistema gaseoso binario $CCl_4 - O_2$?

Solución. En primer lugar, se halla la densidad de flujo molar a partir de la velocidad de evaporación:

$$N_{CCl_4} = (0{,}0208\ cm^3)\left(1{,}59\ \frac{g}{cm^3}\right)\left(\frac{1}{154}\ \frac{g\text{-mol}}{g}\right)\left(\frac{1}{0{,}82}\ \frac{1}{cm^2}\right)\left(\frac{1}{3{,}6 \times 10^4}\ \frac{1}{seg}\right)$$

$$= 7{,}26 \times 10^{-9}\ \frac{g\text{-mol}}{cm^2\ seg}$$

Por lo tanto, a partir de la Ec. 17.2–15*a*, se obtiene:

$$\mathscr{D}_{CCl_4-O_2} = \frac{N_{CCl_4}(z_2 - z_1)RT}{p \ln (p_{O_2,2}/p_{O_2,1})}$$

$$= \frac{(7{,}26 \times 10^{-9})(17{,}1)(82{,}06)(273)}{(\frac{755}{760})(2{,}303 \log_{10} \frac{755}{722})}$$

$$= 0{,}0636\ cm^2\ seg^{-1}$$

Este método de determinación de difusividades en fase gaseosa adolece de varios defectos. El mas importante de todos es, probablemente, el enfriamiento que tiene lugar durante la evaporación. Ademas, pueden existir efectos de convección libre si el vapor procedente del líquido que se evapora es más ligero que el gas que está sobre el líquido. También, debido al menisco, la longitud del camino de difusión no será uniforme en la sección del tubo.

Ejemplo 17.2-2. Difusión a través de una película esférica no isotérmica

a. Deducir expresiones análogas a la Ec. 17.2-10 (perfil de concentración) y la Ec. 17.2 – 14 (densidad de flujo molar) para la difusión a través de una envoltura esférica; para la descripción detallada del sistema, véase la Fig. 17.2-3.

b. Ampliar estos resultados con el fin de describir la difusión en una película no isotérmica en la que la temperatura varía con la distancia de acuerdo con la expresión

$$\left(\frac{T}{T_1}\right) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \tag{17.2-16}$$

en la que T_1 es la temperatura para $r = r_1$. Como aproximación *grosera,* supóngase que $\mathscr{D}_{AB}$ varía con la potencia 2/3 de la temperatura:

$$\left(\frac{\mathscr{D}_{AB}}{\mathscr{D}_{AB,1}}\right) = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{3/2} \tag{17.2-17}$$

en la que $\mathscr{D}_{AB,1}$ es la difusividad para $T = T_1$. Problemas de este tipo se presentan en el secado de pequeñas gotas, y en la difusión a través de películas gaseosas que rodean a partículas catalíticas esféricas. [La distribución de temperaturacorrespondiente a la Ec. 17.2-16 se ha elegido solamente por su sencillez matemática. Este ejemplo se ha propuesto con el fin de resaltar que para los sistemas no isotérmicos el punto de partida correcto es la Ec. 17.0-1 en vez de $N_{Az} = -\mathscr{D}_{AB}(\partial c_A/\partial z) + x_A(N_{Az} + N_{Bz})$, como se indica en muchos textos de ingeniería.]

Solución. *a.* Un balance de materia aplicado a una envoltura esférica conduce a

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = 0 \tag{17.2-18}$$

Substituyendo en esta expresión la densidad de flujo molar N_{Ar}, según la Ec. 16.2-2 para $N_{Br} = 0$, se obtiene:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_A}\frac{dx_A}{dr}\right) = 0 \tag{17.2-19}$$

A temperatura constante, el producto $c\mathscr{D}_{AB}$ es también constante, y la Ec. 17.2-19 puede integrarse para obtener la distribución de concentración

$$\left(\frac{x_B}{x_{B_1}}\right) = \left(\frac{x_{B_2}}{x_{B_1}}\right)^{\frac{(1/r_1)-(1/r)}{(1/r_1)-(1/r_2)}} \tag{17.2-20}$$

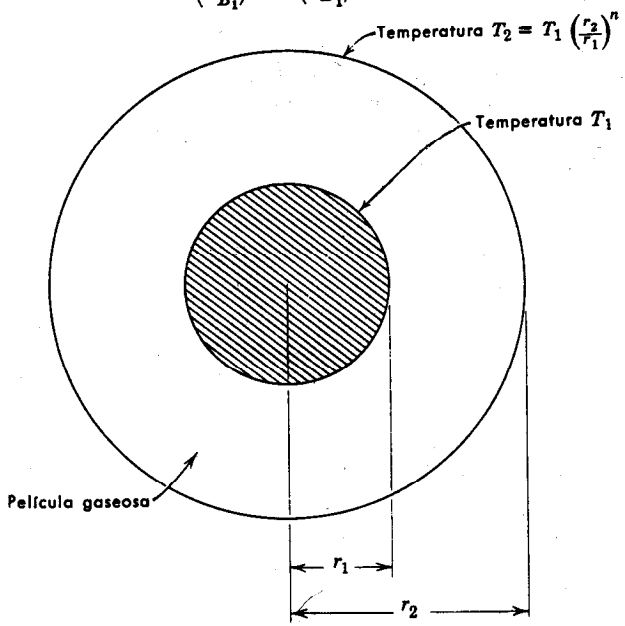


Fig. 17.2-3. Difusión a través de una película esférica.

siendo $x_A = 1 - x_B$. A partir de la **Ec. 17.2—20** se puede llegar a

$$\mathcal{W}_A = 4\pi r_1^2 N_{Ar}|_{r=r_1} = \frac{4\pi c \mathcal{D}_{AB}}{(1/r_1) - (1/r_2)} \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \tag{17.2-21}$$

que es el flujo molar de A a **través** de una superficie **esférica.**

b. Para el caso no **isotérmico,** combinando las Ecs. 17.2-16 y 17, se obtiene la variación de la difusividad con la **posición:**

$$\left(\frac{\mathcal{D}_{AB}}{\mathcal{D}_{AB,1}}\right) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{3n/2} \tag{17.2-22}$$

Si se introduce esta **expresión** en la **Ec.** 17.2-19 y se toma c igual **a** p/RT, se llega a

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{p\mathcal{D}_{AB,1}/RT_1}{1 - x_A}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/2} \frac{dx_A}{dr}\right) = 0 \tag{17.2-23}$$

Integrando esta ecuación entre $r = r_1$ y $r = r_2$, se obtiene (para $n \neq -2$):

$$\mathcal{W}_A = 4\pi r_1^2 N_{Ar}|_{r=r_1} = \frac{4\pi(p\mathcal{D}_{AB,1}/RT_1)[1 + (n/2)]}{(r_1^{-1-(n/2)} - r_2^{-1-(n/2)})r_1^{n/2}} \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \tag{17.2-24}$$

Para $n = 0$ este resultado se transforma en la **Ec.** 17.2-21.

§ 17.3 DIFUSIÓN CON REACCIÓN QUÍMICA HETEROGÉNEA

Consideremos un reactor catalítico, tal como el que se indica en la Fig. **17.3— 1** *a,* en el que se realiza la reacción de dimerización $2A \rightarrow A_2$. Un sistema de este grado de complejidad no puede describirse exactamente mediante un desarrollo **teórico.** Sin embargo, se puede obtener cierta información analizando un modelo altamente simplificado.

Por ejemplo, imaginemos que cada partícula catalítica está rodeada por una película gaseosa estancada a través de la cual difunde A para alcanzar la superficie del catalizador. (Véase Fig. **17.3—** lb.) Supongamos que la reacción $2A \rightarrow A_2$ se produce **instantáneamente** en la superficie catalítica, y que el producto A_2 difunde después en sentido contrario a través de la **película** gaseosa hasta alcanzar la **corriente'turbulenta** del gas que consta de A y A_2. Se trata de encontrar una expresión para la velocidad local de conversión de A en A_2, cuando se conocen el espesor efectivo de la película gaseosa δ, y las composiciones globales x_{A0} y x_{A20} de la corriente. Se supone que la película gaseosa es **isotérmica,** aunque para muchas reacciones catalíticas'no se puede despreciar el calor que se genera en la reacción.

Para el caso que se representa en la Fig. **17.3—1***b,* se mueve *un* mol de A_2 en la **dirección** ***z negativa*** por cada ***dos*** moles de A que se mueven en la **dirección** ***z positiva,*** según se deduce de la estequiometría de la reacción. Por consiguiente, en estado estacionario,

$$N_{A_2z} = -\tfrac{1}{2} N_{Az} \tag{17.3-1}$$

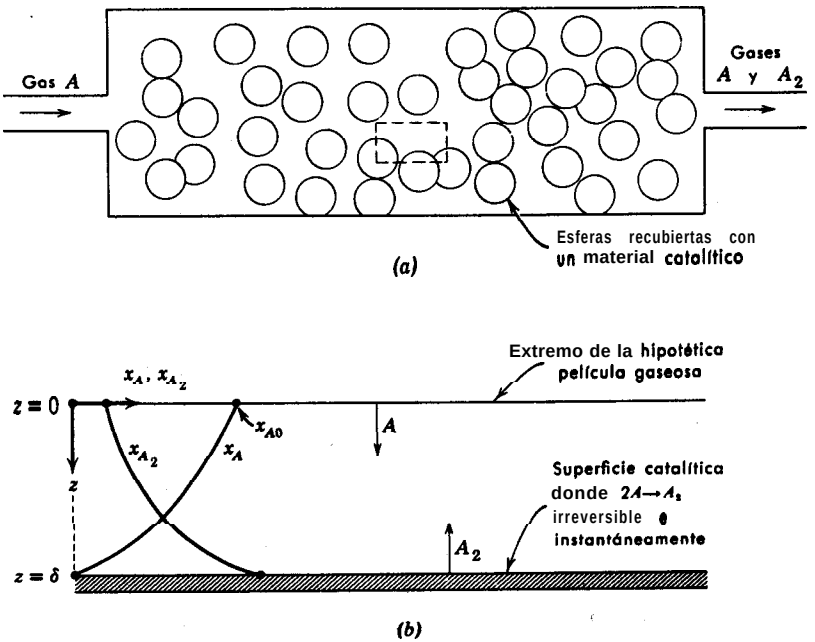


Fig. 17.3-1. (*a*) **Diagrama esquemático de un reactor catalítico en el que** *A se convierte* **en** *B.* (*b*) **Representación idealizada** (**o «modelo») del problema de difusión en las proximidades de una partícula catalítica [o sea, ampliación de la región acotada** con ía línea **de trazos en** (*a*).]

para cualquier valor de z. Substituyendo esta relación en la Ec. 17.0— 1 y despejando N_{Az}, se obtiene:

$$N_{Az} = -\frac{c\mathscr{D}_{AA_2}}{1 - \frac{1}{2}x_A}\frac{dx_A}{dz} \tag{17.3-2}$$

Por lo tanto, mediante la ley de difusión y la estequiometría de la reacción, se ha obtenido una expresión para N_{Az} en función del gradiente de concentración.

Se aplica ahora un balance de materia para la especie A a una delgada lámina de la película gaseosa de espesor, Δz. Este procedimiento es exactamente el mismo que se ha **utilizado** para las Ecs. 17.2-2 y 3, y conduce de forma inmediata a la ecuación

$$\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \tag{17.3-3}$$

Introduciendo en esta expresión el valor de N_{Az} **de** la ecuación anterior, se obtiene (para $c\mathscr{D}_{AA_2}$ constante)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_A}\frac{dx_A}{dz}\right) = 0 \tag{17.3-4}$$

Integrando dos veces con respecto a z, se llega a

$$-2 \ln (1 - \tfrac{1}{2}x_A) = C_1 z + C_2 \qquad (17.3\text{-}5)$$

Las constantes de integración se calculan utilizando las condiciones límite:

C.L. 1 : para z = 0 $x_A = x_{A0}$ (17.3-6)

C.L. 2 : para z = δ $x_A = 0$ (17.3-7)

El resultado final para el perfil de concentración en la película gaseosa, es:

$$\boxed{(1 - \tfrac{1}{2}x_A) = (1 - \tfrac{1}{2}x_{A0})^{1-(z/\delta)}} \qquad (17.3\text{-}8)$$

La Ec. 17.3-2 puede utilizarse ahora para obtener la densidad de flujo molar a través de la película:

$$N_{Az} = \frac{2c\mathscr{D}_{AA_2}}{\delta} \ln \left(\frac{1}{1 - \tfrac{1}{2}x_{A0}} \right) \qquad (17.3\text{-}9)$$

La magnitud N_{Az} puede interpretarse también como la velocidad de dimerización por unidad de área de la superficie catalítica. Este conocimiento puede combinarse con algún otro acerca del reactor catalítico esquematizado en la Fig. 17.3—1*a* con el fin de obtener información sobre la velocidad global de conversión en todo el reactor.

Hay una cuestión que merece resaltarse. Aunque la reacción química tiene lugar de forma instantánea en la superficie catalítica, la conversión de A a A_2 procede a velocidad finita debido a que los procesos de difusión están «en serie» con los de reacción. Por lo tanto, se dice que la conversión de A a A_2 está *controlada por la difusión.*

En este tratamiento se ha supuesto que la dimerización se produce instantáneamente en la superficie del catalizador. En el ejemplo que sigue, veremos cómo pueden tenerse en cuenta velocidades de reacción finitas en la superficie catalítica.

Ejemplo 17.3—1. Difusión con reacción heterogénea lenta

Resolver de nuevo el problema considerado en § 17.3 cuando la reacción $2A \rightarrow A_2$ no es instantánea en la superficie catalítica (para $z = \delta$). En vez de esto, supone? que la velocidad 'con la que desaparece A en la superficie catalítica es proporcional a la concentración de A en dicha superficie:

$$N_{Az} = k_1'' c_A = c k_1'' x_A \qquad \textbf{(17.3-10)}$$

en la que k_1'' es una constante de velocidad.

Solución. Se procede exactamente igual que antes, excepto que la C. L. 2 de la Ec. 17.3-7 se substituye por:

c. L. 2': para $z = \delta$ $x_A = \dfrac{N_{Az}}{ck_1''}$ **(17.3-11)**

siendo a su vez N_{Az} una constante para el estado estacionario. Determinando las constantes de integración para las condiciones límite C. L. 1 y C. L. 2', se llega a

$$(1 - \tfrac{1}{2}x_A) = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{N_{Az}}{ck_1''}\right)^{z/\delta}(1 - \tfrac{1}{2}x_{A0})^{1-(z/\delta)} \tag{17.3-12}$$

A partir de la Ec. 17.3-2 se puede calcular N_{Az} para z = 0:

$$N_{AZ} = \frac{2c\mathscr{D}_{AA_2}}{\delta} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}(N_{Az}/ck_1'')x_{A0}}\right) \tag{17.3-13}$$

Ésta es una trascendental ecuación de N_{Az} en función de x_{A0}, k,", $c\mathscr{D}_{AA_2}$, y δ. Cuando k," es grande, el logaritmo de $1 - \frac{1}{2}(N_{Az}/ck_1'')$ puede desarrollarse en serie mediante la fórmula de Taylor, despreciando todos los términos a excepción del primero. De esta forma, se llega a

$$N_{Az} = \frac{2c\mathscr{D}_{AA_2}/\delta}{1 + (\mathscr{D}_{AA_2}/k_1''\delta)} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x_{A0}}\right) \tag{17.3-14}$$

Obsérvese una vez más que mediante los cálculos anteriores se obtiene la velocidad de los procesos de reacción y difusión *combinados.* Obsérvese también que el grupo adimensional $\mathscr{D}_{AA_2}/k_1''\delta$ describe el efecto de la velocidad de reacción superficial sobre los procesos globales de difusión-reacción.

§ 17.4 DIFUSIÓN CON REACCIÓN QUÍMICA HOMOGÉNEA

Como otra ilustración del planteamiento de un balance de materia, consideremos el sistema que se indica en la Fig. 17.4— 1. En este caso el gas A se disuelve en el líquido B y difunde en la fase liquida. Al mismo tiempo que difunde, la substancia A sufre una reacción química irreversible de primer orden: $A + B \rightarrow AB$. Por lo tanto, el balance de materia (entrada — salida + producción = 0) toma la forma

$$N_{Az}|_z S - N_{Az}|_{z+\Delta z} S - k_1''' c_A S \Delta z = 0 \tag{17.4-1}$$

en la que k_1''' es una constante de velocidad de primer orden para la descomposición química de A, y S es el área de la sección transversal de líquido. El producto $k_1''' c_A$ representa el número de moles de A que desaparecen por unidad de volumen y unidad de tiempo. Dividiendo la Ec. 17.4— 1 por $S\Delta z$, y tomando el límite cuando Δz tiende a cero, se obtiene

$$\frac{dN_{Az}}{dz} + k_1''' c_A = 0 \tag{17.4-2}$$

Si A y AB están presentes a bajas concentraciones, la Ec. 17.0-1 se puede escribir con buena aproximación de la siguiente forma

$$N_{As} = -\mathscr{D}_{AB}\frac{dc_A}{dz} \tag{17.4-3}$$

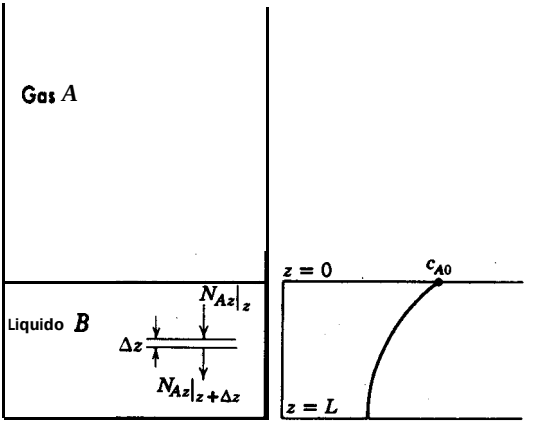


Fig. 17.4-1. Absorción con reacción química homogénea.

Substituyendo la Ec. 17.4-3 en la 17.4-2, se obtiene

$$-\mathscr{D}_{AB}\frac{d^2c_A}{dz^2} + k_1'''c_A = 0 \tag{17.4-4}$$

que se resuelve con las siguientes condiciones límite:

C.L. 1 : para z = 0 $c_A = c_{A0}$ (17.4-5)

C.L. 2 : para z = L $N_{Az} = 0$ ó $\frac{dc_A}{dz} = 0$ (17.4-6)

La primera condición límite establece que la concentración en la superficie se mantiene a un valor fijo c_{A0}. La segunda establece que *A* no difunde a través del fondo del recipiente. La resolución de la Ec. 17.4-4 con estas condiciones límite, da

$$\boxed{\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\cosh b_1[1 - (z/L)]}{\cosh b_1}} \tag{17.4-7}$$

en la que $b_1 = \sqrt{k_1'''L^2/\mathscr{D}_{AB}}$. El perfil de concentración así obtenido se indica en la Fig. 17.4—1.

A partir de la Ec. 17.4-7 se puede obtener la concentración media de *A* en la fase líquida:

$$\frac{c_{A,\text{med}}}{c_{A0}} = \frac{\int_0^L (c_A/c_{A0})\,dz}{\int_0^L dz} = \frac{\int_0^1 (\cosh b_1\zeta)/(\cosh b_1)\,d\zeta}{\int_0^1 d\zeta} = \frac{\operatorname{senh} b_1\zeta}{b_1 \cosh b_1}\Big|_0^1 = \frac{1}{b_1}\tanh b_1 \qquad (17.4\text{-}8)$$

En estas expresiones ζ corresponde a $[1 - (z/L)]$.

La densidad de flujo molar de *A* en el plano z = 0 puede calcularse a partir de la Ec. 17.4-7:

$$N_{Az}|_{z=0} = -\mathscr{D}_{AB}\frac{dc_A}{dz}\bigg|_{z=0} = -\mathscr{D}_{AB}c_{A0}\frac{\operatorname{senh} b_1[1-(z/L)]}{\cosh b_1}\left(-\frac{b_1}{L}\right)\bigg|_{z=0} = +\left(\frac{\mathscr{D}_{AB}c_{A0}}{L}\right)b_1\tanh b_1 \qquad (17.4\text{-}9)$$

en la que $b_1 = \sqrt{k_1'''L^2/\mathscr{D}_{AB}}$.

En este tratamiento se ha supuesto que *A* está presente a baja concentración (véase Ec. 17.4-3) y que el producto AB de la reacción química no interfiere la difusión de *A* a través de *B*.

Ejemplo 17.4-1. Absorción de un gas con reacción química en un tanque agitado[1]

Estimar el efecto de la velocidad de reacción química sobre la velocidad de absorción de un gas en un tanque agitado. (Véase Fig. 17.4-2.) Considerar el caso en el que el gas disuelto *A* sufre una reacción química de primer orden con el líquido B; e-s decir, que *A* desaparece en la fase líquida con una velocidad que es proporcional a la concentración local de *A*.

Solución. Todavía no es **posible analizar exactamente este caso debido a la complejidad** de los procesos de absorción de gases. Sin embargo, se puede obtener un conocimiento semicuantitativo interesante mediante el **análisis** de un modelo relativamente sencillo. El modelo que utilizaremos comprende las siguientes suposiciones:

a. Cada burbuja de gas está rodeada de una película líquida estancada de espesor δ, que es pequeño en comparación con el diámetro de la burbuja.

[1] E. N. LIGHTFOOT, *A. I. Ch. E. Journal*, *4*, 499-500 (1958).

b. En la película líquida se establece rápidamente una concentración de estado estacionario una vez que se ha formado la burbuja.

c. El gas A es muy poco soluble en el liquido, de forma que se puede despreciar el termino de flujo global en la **Ec.** 17.0-1.

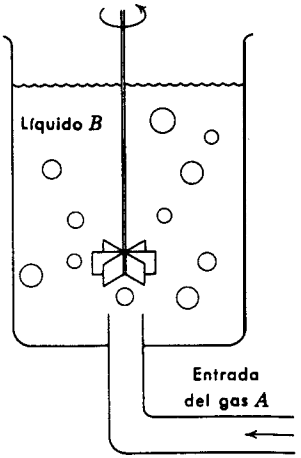


Fig. 17.4-2. Aparato para la absorción de un gas.

d. La masa de líquido exterior a la película estacionaria tiene una **concentración** $c_{A\delta}$, que varía tan lentamente con respecto al tiempo que puede considerarse constante.

La ecuación diferencial que describe la **difusión** con reacción química es la misma de la **Ec.** 17.4-4, pero las condiciones limite son, en este caso:

c. L. 1: para $z = 0$ $\quad c_A = c_{A0}$ (17.4-10)

c. L. 2: para $z = \delta$ $\quad c_A = c_{A\delta}$ (17.4-11)

La concentración c_{A0} es la concentración **interfacial** -de A en la fase líquida, que se supone está en equilibrio con la fase gaseosa en la interfase, y $c_{A\delta}$ es la concentración de A en la masa global del líquido. La solución de la **Ec.** 17.4-4, utilizando estas condiciones límite, es

$$\left(\frac{c_A}{c_{A0}}\right) = \frac{\Gamma \operatorname{senh} b_1\zeta + \operatorname{senh} b_1(1-\zeta)}{\operatorname{senh} b_1} \tag{17.4-12}$$

en la que $\zeta = z/\delta$, $\Gamma = c_{A\delta}/c_{A0}$, **y** $b_1 = \sqrt{k_1'''\delta^2/\mathscr{D}_{AB}}$. La solución equivalente para el caso de no existir reacción química (es decir, $b_1 = 0$), es

$$\left(\frac{c_A}{c_{A0}}\right)_{\text{sin reacción}} = \Gamma\zeta + (1-\zeta) \tag{17.4-13}$$

En la Fig. 17.4-3 se representan los **perfiles** de **concentración** obtenidos a partir de las Ecs. **17.4**— 12 y 17.4-13. A partir de estos **perfiles** de concentración se pueden obtener

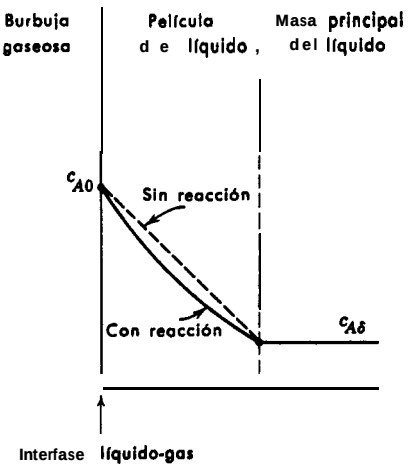


Fig. 17.4-3. Predicción del **perfil** de **concentración** en la película líquida próxima a una burbuja.

las densidades de flujo de materia para la absorción con y sin reacción química, que para $z = 0$, son

$$N_{Az}|_{z=0} = \left(-\mathscr{D}_{AB}\frac{dc_A}{dz}\bigg|_{z=0}\right) = \frac{\mathscr{D}_{AB}c_{A0}}{\delta}\left(\frac{b_1\cosh b_1 - b_1\Gamma}{\sinh b_1}\right) \qquad (17.4\text{–}14)$$

$$(N_{Az})_{\text{sin reacción}} = \left(-\mathscr{D}_{AB}\frac{dc_A}{dz}\bigg|_{z=0}\right)_{\text{sin reacción}} = \frac{\mathscr{D}_{AB}c_{A0}}{\delta}(1-\Gamma) \qquad (17.4\text{–}15)$$

En la practica es frecuente estimar el espesor aparente de película ***en presencia de reacción química*** utilizando la Fc. 17.4-15 y tomar en ella $\Gamma = 0$. Esto es equivalente **a suponer el** valor unidad para la relación:

$$N^* = \frac{\left(\begin{array}{l}\text{velocidad de absorción con}\\ \textbf{reacción} \text{ de primer orden}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}\text{velocidad de } \textbf{absorción} \text{ sin}\\ \text{reacción y con } c_{A\delta} = 0\end{array}\right)} = \left(\frac{b_1}{\text{senh } b_1}\right)(\cosh b_1 - \Gamma) \qquad (17.4\text{–}16)$$

Para determinar las condiciones en las que esta suposición es válida es necesario disponer de una expresión para Γ. Para ello se iguala la masa de A **que cruza la superficie** exterior de la película del liquido a la **cantidad de** A **que se elimina por reacción química** en la masa global del líquido [se utiliza en este caso la anterior **suposición *(d)]***

$$-A\mathscr{D}_{AB}\frac{dc_A}{dz}_{z=d} = Vkf\ c_{A\delta} \qquad (17.4\text{-}17)$$

en la que A es el área total de la superficie de las burbujas, y Ves el volumen de toda la masa de líquido. Utilizando la **Ec.** 17.4-12 se evalúan $dc_A/dz|_{z=\delta}$ y $c_{A\delta}$ con el fin de obtener

$$\Gamma = \frac{1}{\cosh b_1 + b_1(V/A\delta)\operatorname{senh} b_1} \tag{17.4-18}$$

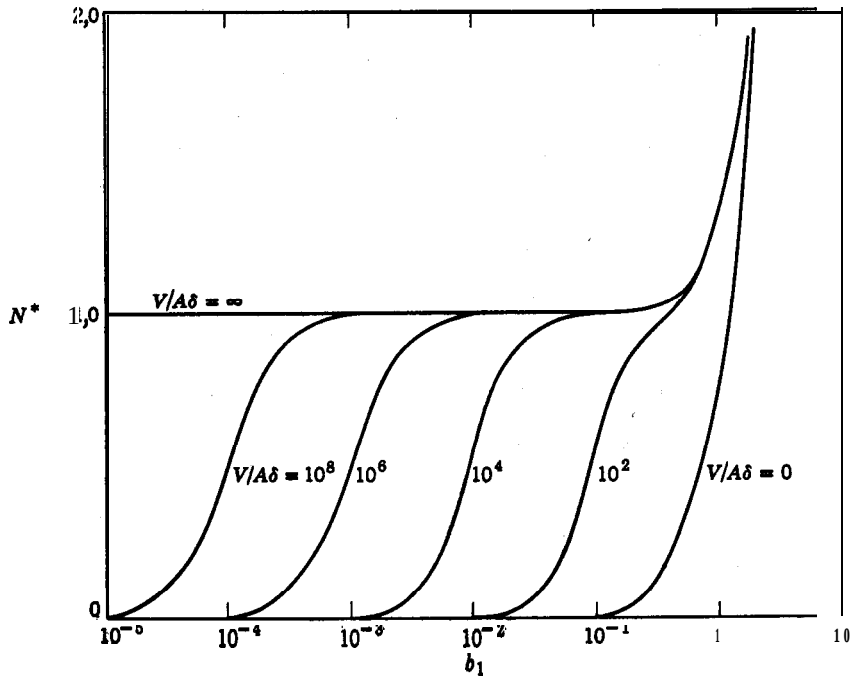


Fig. 17.4-4. Absorción gaseosa **acompañada** de **reacción** química irreversible de primer orden.

Por lo tanto, la **Ec.** 17.4-16 puede escribirse en esta forma:

$$N^* = \frac{b_1}{\operatorname{senh} b_1}\left(\cosh b_1 - \frac{1}{\cosh b_1 + b_1(V/A\delta)\operatorname{senh} b_1}\right) \tag{17.4-19}$$

Este resultado se ha representado en la Pig. 17.4 -4, en la que se observa que para un intervalo bastante amplio de b_1 la **relación** N^* es muy aproximadamente igual a la unidad y puede utilizarse la **Ec. 17.4−15** para describir la velocidad de absorción tomando $\Gamma = 0$. Tambien es posible realizar una simplificación **análoga** para modelos de transferencia de materia **más** realistas.1

§ 17.5 DIFUSIÓN EN UNA PELÍCULA LÍQUIDA DESCENDENTE: TRANSFERENCIA DE MATERIA POR CONVECCIÓN FORZADA

En esta sección se presenta una ilustración de transferencia de materia en la que el flujo viscoso y la difusión tienen lugar bajo unas condiciones tales que prácticamente puede considerarse que el campo de velocidad no es afectado por la difusión. Consideremos concretamente la absorción de un gas ***A*** por una película laminar descendente del líquido ***B.*** La substancia *A* es solo ligeramente soluble en ***B,*** de forma que la viscosidad del líquido no varía apreciablemente. Finalmente, haremos la restricción de que la difusión en la película líquida tiene lugar tan lentamente que ***A*** «penetra» muy poco en ***B*** (la distancia de penetración es pequeña en comparación con el espesor de la película). El sistema se representa en la Fig. 17.5-1.

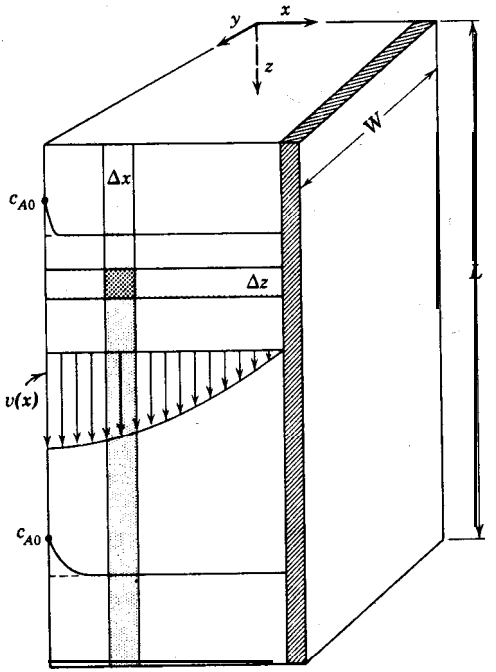


Fig. 17.5-1. Absorción en una película descendente.

Vamos a plantear las ecuaciones diferenciales que describen el proceso. Primeramente, hay que resolver el problema de transporte de cantidad de movimiento con el fin de obtener el perfil de velocidad $v_z(x)$ en la película; esto se ha efectuado ya en § 2.2 en ausencia de transferencia de materia en la superficie del fluido y el resultado obtenido es

$$v_z(x) = v_{máx}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \qquad (17.5\text{–}1)$$

suponiendo que no se consideran los «efectos finales»..

A continuación aplicamos un balance de materia al componente *A. Se* observa que c_A variará con x y con z. Por lo tanto, como elemento de volumen al que se aplica el balance de materia se elige el volumen formado por la intersección de una lámina de espesor Δz con otra lámina de espesor Δx. De acuerdo con esto, el balance de *A* es simplemente

$$N_{Az}|_z W\,\Delta x - N_{Az}|_{z+\Delta z} W\,\Delta x + N_{Ax}|_x W\,\Delta z - N_{Ax}|_{x+\Delta x} W \Delta z = 0 \qquad (17.5\text{–}2)$$

siendo W la anchura de la película. Dividiendo por $W\Delta x\Delta z$ y efectuando el habitual proceso de limites cuando el elemento de volumen se hace infinitamente pequeño, se llega a

$$\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = 0 \qquad (17.5\text{-}3)$$

Se introducen ahora en esta ecuación las expresiones para N_{Az} y N_{Ax} de la Ec. 17.0— 1, efectuando las simplificaciones convenientes. Para la densidad de flujo molar en la dirección z, suponiendo c constante, resulta:

$$N_{Az} = -\mathscr{D}_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial z} + x_A(N_{Az} + N_{Bz}) \approx c_A v_z(x) \qquad (17.5\text{–}4)$$

Es decir, que *A* se mueve en la dirección z debido fundamentalmente al flujo de la película, siendo despreciable la contribución difusiva. La densidad de flujo molar en la dirección x será

$$N_{Ax} = -\mathscr{D}_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial x} + x_A(N_{Ax} + N_{Bx}) \approx -\mathscr{D}_{AB}\frac{\partial c_A}{\partial x} \qquad (17.5\text{–}5)$$

Es decir, que en la dirección x, *A* se transporta esencialmente por difusión, no existiendo prácticamente transporte convectivo debido a la muy baja solubilidad de *A* en *B*. Substituyendo estas expresiones de N_{Ax} y N_{Az} en la Ec. 17.5-3, se obtiene

$$v_z\frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathscr{D}_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \qquad (17.54$$

que es la ecuación diferencial que describe $c_A(x, z)$.

Por lo tanto, las Ecs. 17.5-1 y 17.5-6 describen la transferencia de materia por convección forzada. Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene, finalmente

$$v_{máx}\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]\frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathscr{D}_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \qquad (17.5\text{-}7)$$

Esta ecuación diferencial entre derivadas parciales se resuelve con las siguientes condiciones límite :

C.L. 1 : para z = 0 $c_A = 0$ *(17.543)*

C.L. 2 : para $x = 0$ $c_A = c_{A0}$ (17.5-9)

C.L. 3 : para x = δ $\frac{\partial c_A}{\partial x} = 0$ (17.5-10)

cuando inicialmente la película está constituida por *B* puro y la concentración del liquido en la interfase se toma como la solubilidad de *A* en *B*, que se designa aquí por c_{A0}. El problema ha sido resuelto por Pigford,[1] pero aquí no se dará dicha solución, sino que se obtendrá solamente una expresión limite válida para «cortos tiempos de contacto», es decir, para valores pequeños de $L/v_{máx}$.

Si, tal como se indica en la Fig. 17.5—1, la substancia *A* penetra tan solo una pequeña distancia en la película, la especie *A* «tiene la impresión» de que la película se mueve toda ella con una velocidad igual a $v_{máx}$. Por otra parte, si la penetración de *A* no es muy grande, no «se entera» de la existencia de la pared sólida situada en x = 8. Por lo tanto, si la película tuviese un espesor infinito y se moviese con la velocidad $v_{máx}$, el material que difunde no notaría la diferencia. Esta consideración física sugiere que la Ec. 17.5-7 y sus condiciones limite pueden reemplazarse por:

$$v_{máx} \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathscr{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \qquad (17.5\text{-}11)$$

C.L. 1 : para $z = 0$ $c_A = 0$ *(17.5-12)*

C.L. 2 : para x = 0 $c_A = c_{A0}$ (17.5-13)

C.L. 3 : para x = ∞ $c_A = 0$ (17.5-14)

Para estas condiciones límite, la solución de la Ec. 17.5—11 es*

$$\frac{CA}{c_{A0}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}z/v_{máx}}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$= 1 - \text{erf} \frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}z/v_{máx}}}$$

0

$$\boxed{\frac{c_A}{c_{A0}} = \text{erfc} \frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}z/v_{máx}}}} \qquad (17.5\text{-}15)$$

En estas expresiones erf y es la «función de error» definida en 94.1, y erfc $y = 1 - \text{erf}\ y$ es la «función complementaria de error»; las dos son funciones standard tabuladas.

[1] R. L. PIGFORD, *disertación doctoral,* Universidad de Illinois (1941).

[2] La solución por el «método de combinación de variables» se expone detalladamente en el ejemplo 4.1— 1.

Una vez que se conocen los perfiles de concentración, puede hallarse la velocidad total de transferencia de materia siguiendo uno de estos dos métodos:

Integración de la densidad de flujo de materia sobre la longitud de la película

La densidad de flujo local de materia en la superficie x = 0, para una posición z medida hacia abajo en la lámina, es

$$N_{Ax}(z)|_{x=0} = -\mathscr{D}_{AB}\left.\frac{\partial c_A}{\partial x}\right|_{x=0} = c_{A0}\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi z}} \tag{17.5-16}$$

Los moles totales de A transmitidos por unidad de tiempo desde el gas a la película de líquido vienen dados por

$$\begin{aligned} W_A &= \int_0^W \int_0^L N_{Ax}|_{x=0}\, dz\, dy \\ &= Wc_{A0}\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi}}\int_0^L z^{-\frac{1}{2}}\, dz \\ &= WLc_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi L}} \end{aligned} \tag{17.5-17}$$

Integración del perfil de concentración sobre un espesor (infinito) de película situado en $z = L$

Un balance global de materia aplicado a la película indica que los moles de A transmitidos por unidad de tiempo a través de la interfase gas-líquido son equivalentes a la velocidad de flujo molar total de A a través del plano $z = L$, y pueden calcularse multiplicando la velocidad volumétrica de flujo a través del plano $z = L$ por la concentración media en este plano:

$$\begin{aligned} W_A &= \lim_{\delta\to\infty}(W\delta v_{máx})\left(\frac{1}{\delta}\int_0^\delta c_A|_{z=L}\, dx\right) \\ &= Wv_{máx}\int_0^\infty c_A|_{z=L}\, dx \\ &= Wv_{máx}c_{A0}\int_0^\infty \operatorname{erfc}\frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}L/v_{máx}}}\, dx \\ &= Wv_{máx}c_{A0}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\int_{\frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}L/v_{máx}}}}^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi\right) dx \\ &= Wv_{máx}c_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}L}{v_{máx}}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^\infty\left(\int_u^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi\right) du \end{aligned} \tag{17.5-18}$$

En la última línea se ha introducido la nueva variable $u = x/\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}L/v_{máx}}$. Cambiando el orden de integración3 de la integral doble se puede evaluar ésta analíticamente y obtener la Ec. 17.5-17:

$$N_A = WLc_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi L}} \cdot 2\int_0^\infty e^{-\xi^2}\left(\int_0^\xi du\right) d\xi$$

$$= WLc_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi L}} \cdot 2\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi\, d\xi$$

$$= WLc_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}v_{máx}}{\pi L}} \qquad (17.5\text{-}19)$$

De esta demostración se deduce que la velocidad de transferencia de materia es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la difusividad e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del «tiempo de exposición», $t_{exp} = L/v_{máx}$. Este método para el estudio de la absorción de gases fue propuesto por primera vez por Higbie.4

Ejemplo 17.5-1. Absorción de burbujas ascendentes de un gas

Estímese la velocidad a la que son absorbidas por el líquido *B* las burbujas del gas *A* que ascienden a su velocidad límite a través de un líquido «claro» en reposo.

Solución. En el caso de burbujas que ascienden en líquidos que no contienen agentes tensoactivos, el gas contenido en el interior de la burbuja está sometido a una circulación toroidal, tal como se indica en la Fig. 17.5 -2. El gas al ascender encuentra liquido fresco en la parte superior de la burbuja. El líquido próximo a la interfase permanece, generalmente, en movimiento laminar. Por lo tanto, se comporta en este caso de forma muy semejante al liquido de la interfase de una película descendente que ya hemos estudiado. El tiempo de contacto es realmente pequeño, de forma que la penetración es baja y son válidas las suposiciones que se han hecho én § 17.5. De acuerdo con esto se puede utilizar en primera aproximación el 'resultado de la Fc. 17.5— 17 (o 19) para estimar la velocidad de absorción del gas y la variación del tamaño de la burbuja.

La-velocidad media de transferencia de *A* es

$$(N_A)_{med} = \sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}}{\pi t_{exp}}}\, c_{A0} \qquad (17.5\text{-}20)$$

en la que c_{A0} es la solubilidad del gas *A* en el liquido *B*. El tiempo de exposición, t_{exp}, ea el tiempo que requiere el líquido para deslizar a lo largo de la burbuja desde la cima hasta el fondo de la misma. Su valor puede tomarse aproximadamente igual[5] a $t_{exp} \doteq D/v_t$,

---

3 Véase, por ejemplo, G. B. THOMAS, Jr., *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Reading, Mass. (1953). capítulo 15.

4 R. HIGBIE, *Trans. A. I. Ch. E.*, **31, 365-389 (1935).**

5 R. HIGBIE, op. *cit.*

siendo D el diámetro de la burbuja y v_t la velocidad final o límite de la burbuja ascendente. Por lo tanto, la velocidad de absorción a través de la interfase burbuja-líquido es:

$$(N_A)_{\text{med}} = \sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB} v_t}{\pi D}}\, c_{A0} \tag{17.5-21}$$

Este resultado se ha comprobado[6] para burbujas gaseosas del orden de 0,3—0,5 cm de diámetro, ascendiendo a través de agua cuidadosamente purificada. Pequeñas cantidades de agentes tensoactivos dan lugar a una marcz la disminución de $(N_A)_{\text{med}}$ debido a la formación de una «piel» que recubre la burbuja ; que impide una eficaz circulación. Se ha utilizado con éxito un método similar para predecir las velocidades de transferencia de materia durante la formación de una gota en una punta capilar.'

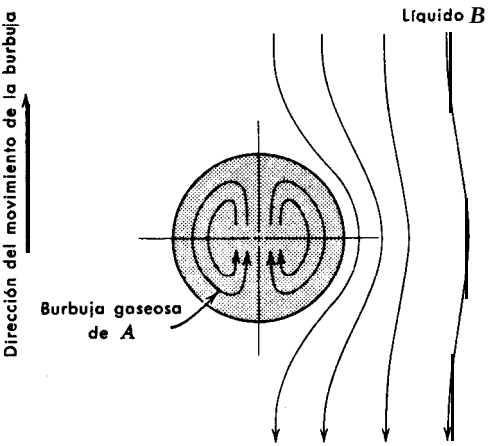


Fig. 17.5-2. Absorción desde una burbuja gaseosa.

§ 17.6 DIFUSIÓN Y REACCIÓN QUÍMICA EN EL INTERIOR DE UN CATALIZADOR POROSO: EL «FACTOR DE EFICACIA»[1,2,3]

Hasta ahora se ha considerado la difusión para gases y líquidos en sistemas de geometría sencilla. A continuación vamos a utilizar el balance de materia aplicado a una envoltura y la primera ley de Fick con el fin de describir la difusión en el interior de una partícula esférica de un catalizador poroso. No se intenta describir la difusión en el interior del tortuoso camino de los huecos, sino la difusión «media» de la especie química en función de un coeficiente efectivo de difusión.

---

[6] D. HAMMERTON y F. H. GARNER, *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London), 32,* S18 (1954).
[7] H. GROOTHUIS y H. KRAMERS, *Chem. Eng. Sci., 4,* 17-25 (1955).
[1] E. W. THIELE, *Ind. Eng. Chem. 31,* 916-920 (1939).
[2] R. ARIS, *Chem. Eng. Sci., 6, 265-268 (1957).*
[3] A. WHEELER, *Advances in Catalysis,* Academic Press, Nueva York (1950), vol. 3, pp. 250-326.

Consideremos concretamente una partícula esférica de un catalizador poroso de radio ***R.*** (Véase Fig. 17.6-1.) Esta partícula está en un reactor catalítico que es atravesado por una corriente gaseosa que contiene la substancia reaccionante ***A*** y el producto de reacción ***B.*** En las inmediaciones de la partícula catalítica que estamos considerando se supone que la concentración de ***A*** es c_{As} moles por unidad de volumen. La especie ***A*** difunde a través del camino tortuoso existente en el catalizador y se convierte en ***B*** en la superficie del mismo. (Véase Fig. 17.6-2.)

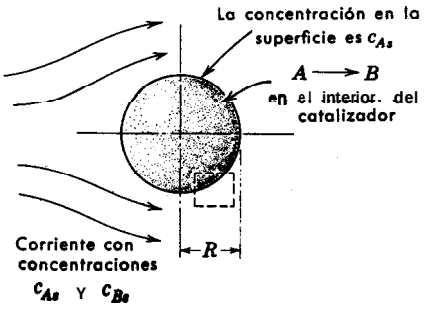


Fig. 17.6-1. Partícula esférica de un catalizador poroso. Véase en la Figura 17.6-2 una ampliación del recuadro.

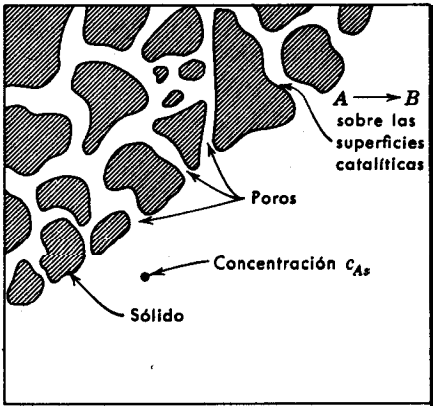


Fig. 17.6-2. Poros del catalizador en el que tiene lugar la difusión y reacción química.

Comenzamos aplicando un balance de materia para la especie ***A*** a una envoltura esférica de espesor Δr situada en el interior de una partícula catalítica:

$$N_{Ar}|_r \cdot 4\pi r^2 - N_{Ar}|_{r+\Delta r} \cdot 4\pi(r + \Delta r)^2 + R_A \cdot 4\pi r^2 \Delta r = 0 \qquad (17.6\text{-}1)$$

En esta expresión, $N_{Ar}|_r$ es el número de moles de ***A*** que pasan en la dirección ***r*** a través de una superficie esférica imaginaria situada a una distancia ***r*** del centro de la esfera. El término de manantial $R_A \cdot 4\pi r^2 \Delta r$ expresa el número de moles de ***A*** que se producen por reacción química en la envoltura de espesor ***Ar.*** Dividiendo por $4\pi\, Ar$ y tomando $Ar \to 0$, se obtiene

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{(r^2 N_{Ar})|_{r+\Delta r} - (r^2 N_{Ar})|_r}{\Delta r} = r^2 R_A \qquad (17.6\text{–}2)$$

0

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = r^2 R_A \qquad (17.6\text{–}3)$$

Teniendo en cuenta que el medio es granular y no **homogéneo,** el proceso de limites que hemos efectuado está en contradicción con la representación física. Por lo tanto, los símbolos N_{Ar} y R_A de la **Ec.** 17.6-3 no pueden interpretarse como magnitudes que poseen un valor representativo de un punto, sino valores medios de un pequeño entorno del punto considerado (este entorno es pequeño con respecto a la dimensión R pero grande con relación a los pasadizos existentes en el interior de la partícula porosa).

Vamos a definir ahora una **«difusividad** efectiva» para la especie A en el medio poroso, mediante la expresión

$$N_{Ar} = -\mathscr{D}_A \frac{dc_A}{dr} \tag{17.6-4}$$

en la que c_A es la **concentración** del gas A contenido entre los poros. La difusividad efectiva de $\mathscr{D}_A$ **puede** medirse experimentalmente, y, en general, depende de la presión y la temperatura así como también de la estructura de los poros del catalizador. El mecanismo real de la difusión en los poros es complejo, ya que las dimensiones de éstos pueden ser menores que el recorrido libre medio de las moléculas que difunden. No abordaremos aquí la cuestión del mecanismo, sino que supondremos simplemente que el proceso de difusión puede representarse satisfactoriamente mediante la **Ec.** 17.6-4.

Introduciendo la expresion anterior en la **Ec.** 17.6-3, para difusividad constante, se llega a

$$-\mathscr{D}_A \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dc_A}{dr}\right) = R_A \tag{17.6-5}$$

Consideremos ahora un caso en el que la especie A desaparece de acuerdo con una reacción química de primer orden en las superficies catalíticas que forman las «Paredes» de los pasadizos tortuosos. Sea a el área de la superficie catalítica disponible por unidad **de** volumen (sólidos + huecos). Por lo tanto, $R_A = -k_1'' a c_A$, y la **Ec.** 17.6-5 se transforma en

$$\mathscr{D}_A \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dc_A}{dr}\right) = k_1'' a c_A \tag{17.6-6}$$

Esta ecuación se resuelve con las condiciones límite de que $c_A = c_{As}$ para $r = R$ y c_A es finito para $r = 0$. Las ecuaciones diferenciales en las que aparece el operador $(1/r^2)\,(d/dr)\,[r^2(d/dr)]$ pueden simplificarse frecuentemente mediante un cambio de variable del tipo $c_A/c_{As} = f(r)/r$. *La* ecuación correspondiente a $f(r)$ *es:*

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \left(\frac{k_1'' a}{\mathscr{D}_A}\right) f \tag{17.6-7}$$

La solución general, conteniendo dos constantes de integración, es

$$\frac{c_A}{c_{As}} = \frac{C_1}{r}\cosh\sqrt{\frac{k_1''a}{\mathscr{D}_A}}\,r + \frac{C_2}{r}\operatorname{senh}\sqrt{\frac{k_1''a}{\mathscr{D}_A}}\,r \tag{17.6-8}$$

Aplicando las condiciones límite se obtiene, finalmente

$$\boxed{\frac{c_A}{c_{As}} = \left(\frac{R}{r}\right)\frac{\operatorname{senh}\sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}\,r}{\operatorname{senh}\sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}\,R}} \tag{17.6-9}$$

En los estudios de cinética y catálisis química interesa generalmente conocer la densidad de flujo molar N_{As} o el flujo molar W_{As} en la superficie r = *R:*

$$W_{As} = 4\pi R^2 N_{As} = -4\pi R^2 \mathscr{D}_A \left.\frac{dc_A}{dr}\right|_{r=R} \tag{17.6-10}$$

Utilizando la Ec. 17.6-9 se encuentra que

$$W_{As} = 4\pi R \mathscr{D}_A c_{As}\left(1 - \sqrt{\frac{k_1''a}{\mathscr{D}_A}}\,R\coth\sqrt{\frac{k_1''a}{\mathscr{D}_A}}\,R\right) \tag{17.64 1}$$

Esta ecuación expresa la velocidad de conversión (moles/seg) de *A* a *B* en una partícula catalítica de radio *R,* en función de los procesos difusionales que tienen lugar.

Si la superficie catalíticamente activa estuviese toda ella expuesta a la corriente de concentración c_{As}, la especie *A* no tendría que difundir a través de los poros hasta un lugar de reacción, y la velocidad molar de conversión vendría dada por el producto de la superficie disponible por la velocidad de reacción superficial:

$$W_{A0} = (\tfrac{4}{3}\pi R^3)(a)(-k_1'' c_{As}) \tag{17.6-12}$$

Dividiendo la Ec. 17.6— 11 por la Ec. 17.6— 12, se obtiene

$$\eta_A = \frac{3}{K^2}(K\coth K - 1) \tag{17.6–13}$$

en la que $K = \sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}R$, es un número adimensional, y η_A es el denominado *factor de eficacia*[1,2,4], que es valor por el que hay que multiplicar W_{A0} para tener en cuenta la resistencia a la difusión del proceso global de conversión.

Los resultados anteriores pueden aplicarse a partículas catalíticas no esféricas dando a *R* una interpretación adecuada. Obsérvese que para una esfera de radio *R*

---

4 *0.* A. HOUGEN *y* K. M. WATSON, *Chemical Process Principles,* Wiley, Nueva York (1947), parte III, capítulo XIX. Véase también *CPP Charts* de 0. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, Wiley, Nueva York (1960), Fig. E.

la relación entre el volumen y la superficie externa es $R/3$. Para partículas no esféricas vamos a definir R correspondiente a la Ec. 17.6–13, de la siguiente forma

$$R_{no\ esf} = 3\left(\frac{V_P}{S_P}\right) \tag{17.6-14}$$

en la que V_P y S_P son el volumen y la superficie externa de una partícula catalítica. De acuerdo con esto, la velocidad de conversión viene dada, aproximadamente por

$$|\mathcal{W}_{As}| = V_P a k_1'' c_{As} \eta_A \tag{17.6-15}$$

siendo

$$\eta_A = \frac{1}{3\Lambda^2}(3\Lambda \coth 3\Lambda - 1) \tag{17.6-16}$$

en la que $\Lambda = \sqrt{k_1'' a/\mathscr{D}_A}(V_P/S_P)$.

La utilidad concreta de Λ puede observarse en la Fig. 17.6–3. Es evidente que cuando se representan expresiones teóricas exactas de η_A en función de Λ, las curvas tienen asíntotas comunes para valores grandes y pequeños de Λ, y no difieren mucho

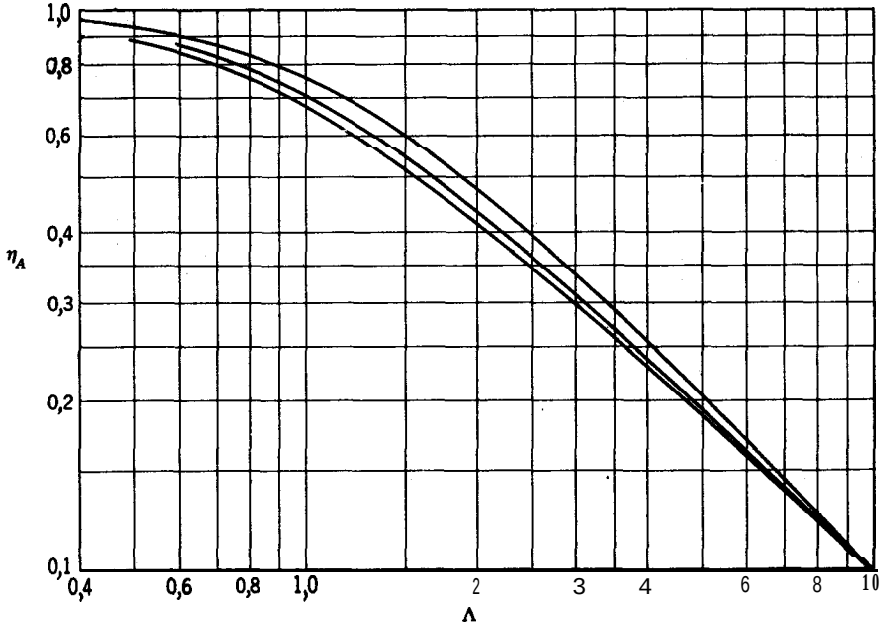


Fig. 17.6-3. Factores de eficacia para catalizadores sólidos porosos; la curva superior corresponde a partículas planas, la intermedia a largas partículas cilíndricas, y la inferior a partículas esféricas. [R. ARIS, *Chem. Eng. Sci.*, 6, 265 (1957).] Una gráfica para esferas a mayor escala puede verse en 0. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, *CPP Charts*, Wiley, Nueva York (1960), Fig. E.

entre sí para valores intermedios de Λ. Por lo tanto, la Fig. 17.6—3 justifica el empleo de la Ec. 17.6— 16 para estimar η_A correspondiente a partículas no esféricas.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Qué información física se utiliza para eliminar N_{Bz} de la Ec. 17.0—1?

2. Comparar y contrastar reacciones químicas *homogéneas* y *heterogéneas*.

3. ¿Cómo se modificaría el resultado de § 17.2 si se despreciase el movimiento neto de la mezcla (es decir, si en la Ec. 17.2-4 se tomase $1 - x_A$ igual a la unidad)?

4. ¿Cómo varían en § 17.2 N_{Az} y N_{Bz} con la distancia?

5. ¿Cómo se determina x_{A2} en la Ec. 17.2—9?

6. ¿Bajo qué condiciones físicas es de esperar que el modelo esquematizado en la Fig. 17.2— 1 sea real? ¿E irreal?

7. Discútase la expresión «reacción química controlada por difusión».

8. Discútase el efecto de reacción química sobre la absorción de gases.

9. Demostrar cómo se obtiene la Ec. 17.3-14 a partir de la 17.3—13.

10. Discútase el significado físico de las aproximaciones que se han hecho en las Ecs. 17.5-4 y 5.

Il. Dibujar los perfiles de concentración correspondientes a la Ec. 17.5—15, utilizando una tabla de la función de error.

12. ¿Cómo se modifica el resultado de § 17.5, si para $z = 0$ la película contiene cierta cantidad de A disuelta tal como c_A, moles por unidad de volumen?

13. Construir un gráfico de N_{Az} en función de z para el probkma que se presenta en la Fig. 17.4—1.

14. ¿Cómo variará el tamaño de una burbuja soluble al ascender a través de un líquido?

15. En § 17.2 existe un gradiente de concentración de B y, sin embargo, la densidad de flujo N_{Bz} es cero. Explíquese esto.

16. Utilizar la Ec. 17.6-3 para demostrar que cuando Λ es muy grande, la velocidad de reacción para una determinada masa de catalizador es proporcional al área de la superficie externa de las partículas catalíticas.

17. ¿Cómo se puede obtener la Ec. 17.3-9 a partir de la Ec. 17.3-2 sin hallar el perfil de concentración?

PROBLEMAS

17.A$_1$ Velocidad de evaporación

Considérese el sistema descrito en la Fig. 17.2-1. ¿Cuál es la velocidad de evaporación (en g hr^{-1}) de $ClCl_3NO_2$ (cloropicrina) en aire (considerado en este caso como una substancia pum) a 25 °C?

Presión total	*770* mm Hg
Difusividad	*0,088* cm* seg^{-1}
Presión de vapor	23,81 mm Hg
Distancia desde el nivel del líquido hasta la parte superior del tubo	11,14 cm
Densidad de la cloropicrina	1.65 g cm^{-3}
Area de la superficie de líquido expuesta a la evaporación	2,29 cm*

Respuesta: 0,0139 g hr^{-1}

17B$_1$ Error en el cálculo de la velocidad de absorción

¿Cuál es el error máximo posible en el cálculo de la velocidad de absorción mediante la Ec. 17.5 – 17, si la solubilidad de A en *B* se conoce con un error de ± 5 por ciento y la difusividad de *A* en *B* con ± 10 por ciento? (Supóngase que los errores de las dimensiones de la película y de la velocidad son de menor orden de magnitud.)

Respuesta: ±10 por ciento

17.C$_1$ Velocidad de absorción en una película descendente

Se absorbe cloro de una mezcla gaseosa en una pequeña torre experimental de pared mojada, tal como se indica en la Fig. 17.C. El fluido absorbente es agua, que se mueve con una velocidad media de 17,7 cm seg^{-1}. Calcular la velocidad de absorción en g-mol hr^{-1}, si $\mathscr{D}_{Cl_2-H_2O} = 1{,}26 \times 10^{-5}$ cm^2 seg^{-1} en la fase líquida, y la concentración de saturación de cloro en el agua es 0,823 g de Cl_2 por 100 g de agua (éstos son valores experimentales a 16 °C). Las dimensiones de la columna se indican en la Fig. 17.C.

Aclaración. No se tenga en cuenta la reacción entre el cloro y el agua.

Respuesta: 0,273 g-mol hr^{-1}

17.D$_2$ Método de difusión para la separación de helio a partir del gas natural

En una corta nota publicada en *Scientific American*, vol. 199, n.º 1 (julio 1958), p. 52, se describe la forma en que puede separarse el helio a partir del gas natural mediante un método desarrollado por K. B. McAfee de los Laboratorios Bell Telephone. El método se basa en que el vidrio pyrex es casi impermeable para todos los gases a excepción del helio; por ejemplo, el coeficiente de difusión del helio a través del pyrex es alrededor de 25 veces el del hidrógeno en las mismas condiciones (siendo el hidrógeno el más próximo «competidor» en el proceso de difusión). Este método seguramente hace posible efectuar separaciones más eficaces y a menor coste que los métodos anteriores de destilación a baja temperatura.

Supóngase una mezcla de gas natural contenida en un tubo pyrex, cuyas dimensiones se indican en la Fig. 17.D. Se desea obtener una expresión de la velocidad a la que el helio pasará a través del tubo en función de la difusividad del helio en vidrio pyrex. la concentración del helio en la mezcla de gas natural, y las dimensiones del tubo.

Respuesta: $$W_{He} = 2\pi L \frac{\mathscr{D}_{He\text{-}Pyr}(c_{He,1} - c_{He,2})}{\ln (R_2/R_1)}$$

17.E$_2$ Difusión a través de una película estancada. Otra deducción

En § 17.2 se ha obtenido la Ec. 17.2–14, que es una expresión de la velocidad de evaporación, mediante la diferenciación del perfil de concentración que se había hallado poco antes: Demostrar que se puede obtener el mismo resultado mucho más fácilmente (sin necesidad de hallar el perfil de concentración) de la siguiente forma. Obsérvese en primer lugar que para el estado estacionario N_{Az} ha de ser constante y N_{Bz} cero. Intégrese después directamente la Ec. 17.0–1 entre los límites de z_1 y z_2 para obtener la Ec. 17.2–14.

17.F$_2$ Difusión a través de una película líquida estancada

En el estudio de la velocidad de lixiviación de una substancia *A* a partir de partículas sólidas mediante un disolvente *B*, se puede postular que la etapa de velocidad controlante es la difusión de *A* desde la superficie de la partícula hasta la corriente global del líquido. (Véase Fig. 17.F.) La solubilidad de *A* en *B* es c_{A0} g-mol/cm^3, y la concentración en la corriente global (más allá de la película líquida de espesor δ) es $c_{A\delta}$.

a. Obtener una ecuación diferencial de c_A en función de z, aplicando un balance de materia para *A* a una delgada lamina de espesor Az. Supóngase que $\mathscr{D}_{AB}$ es constante y que *A es* solo ligeramente soluble en *B*. Despréciese la curvatura de la partícula.

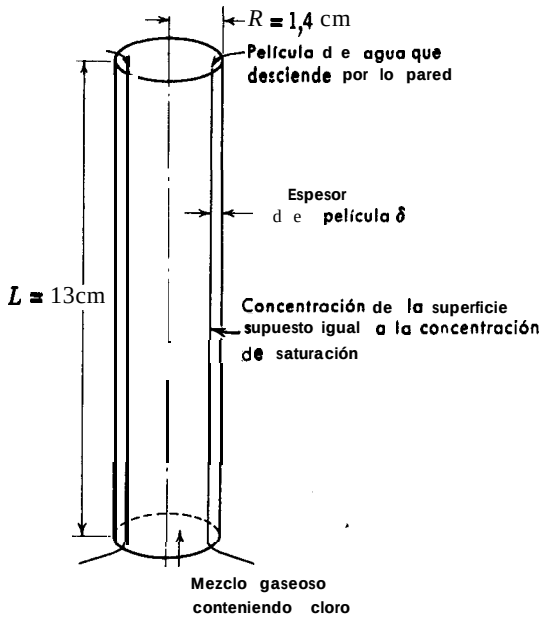


Fig. 17.C. **Representación** esquemática de una torre de pared mojada.

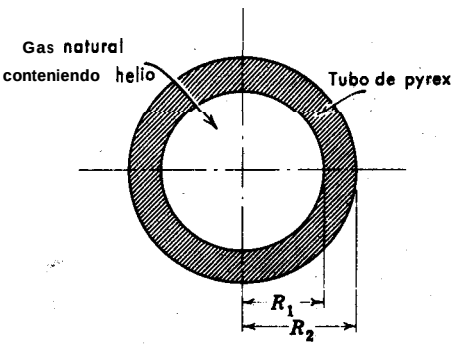


Fig. 17.D. Difusión a **través** de un tubo de vidrio pyrex; la longitud del tubo es *L*.

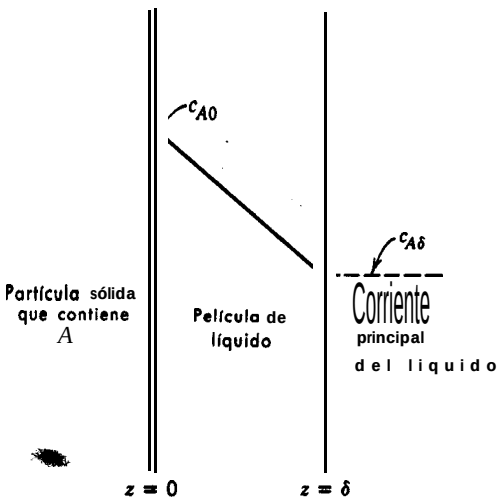


Fig. 17.F. Difusión a **través** de **una película** de líquido estancado.

b. Demostrar que en ausencia de reacción química en la fase líquida el perfil de concentración es lineal.

c. Demostrar que la velocidad de lixiviación viene dada por

$$N_{As} = \frac{\mathscr{D}_{AB}(c_{A0} - c_{A\delta})}{\delta} \tag{17.F-1}$$

17.G_2 Difusión desde una gotita a un gas estancado

Una gotita de la substancia *A* esta suspendida en una corriente del gas *B*. El radio de la gota es r_1. Se admite que existe una película esférica de gas estacionario de radio r_2. (Véase Fig. 17.2-3.) La concentración de *A* en la fase gaseosa es x_{A1} para r = r_1 y x_{A2} para $r = r_2$.

a. Demostrar, mediante un balance aplicado a una envoltura, que para la difusión en estado estacionario, r^2N_{Ar} es una constante cuyo valor en la superficie de la gotita es $r_1^2N_{Ar1}$.

b. Demostrar que la Ec. 17.0-1 y el resultado del apartado (*a*) conducen a la siguiente ecuación para x_A:

$$r_1^2N_{Ar1} = -\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_A} r^2 \frac{dx_A}{dr} \tag{17.G-1}$$

c. Integrar esta ecuación entre los limites r_1 y r_2 con el fin de obtener

$$N_{Ar1} = \frac{c\mathscr{D}_{AB}}{r_2 - r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \tag{17.G-2}$$

d. Si se define un coeficiente de transferencia de materia k_p mediante la ecuación $N_{Ar1} = k_p(p_{A1} - p_{A2})$, demostrar que, cuando $r_2 \to \infty$, se cumple

$$k_p = \frac{2c\mathscr{D}_{AB}/D}{(p_B)_{ln}} \tag{17.G-3}$$

en la que *D* es el diámetro de la gotita. Discútase el significado de este resultado aplicado a la evaporación de una gotita en una gran masa de gas que no esta en, movimiento.

17.H_2 Difusión con polimerización catalítica

Obtener un resultado análogo al de la Ec. 17.3 -9 para el caso que se indica en la Fig. 17.3 -1*b*, cuando la reacción $nA \to A_n$, se produce instantáneamente en la superficie catalítica.

a. Demostrar en primer lugar que la Ec. 17.0-1 para este caso es

$$N_{As} = -\frac{c\mathscr{D}_{AA_n}}{1 - (1 - n^{-1})x_A} \frac{dx_A}{dz} \tag{17.H-1}$$

b. Integrar esta expresión de N_{Az} entre los límites $z = 0$ y $z = \delta$ (teniendo en cuenta el hecho de que para el estado estacionario N_{Az} es constante) para obtener

$$N_{As} = \frac{nc\mathscr{D}_{AA_n}}{(n-1)\delta} \ln\left(\frac{1}{1 - (1 - n^{-1})x_{A0}}\right) \tag{17.H-2}$$

(Obsérvese que al integrar de esta forma entre límites fijos no se obtiene el perfil de concentración, pero se llega más rápidamente a la densidad de flujo.)

17.I$_2$ Factor de eficacia para discos delgados

Consideremos las partículas de un catalizador poroso que tienen forma de discos delgados, de modo que el área de la superficie del borde del disco es pequeña en comparación con las dos caras circulares. Aplicar el método de § 17.6 para demostrar que el perfil de concentración es

$$\frac{c_A}{c_{As}} = \frac{\cosh \sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}\, z}{\cosh \sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}\, b} \tag{17.1-1}$$

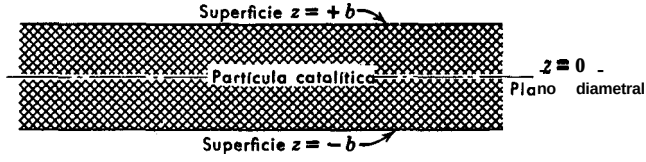


Fig. 17.1. Corte diametral de una partícula catalítica en forma de disco.

estando z y b descritos en la Fig. 17.1. Demostrar que la velocidad total de transferencia de materia en las superficies $z = \pm b$, es

$$|\mathscr{W}_A| = 2 \cdot \pi R^2 \cdot \mathscr{D}_A c_{As} \lambda \tanh \lambda b \tag{17.1-2}$$

en la que $\lambda = \sqrt{k_1''a/\mathscr{D}_A}$. Demostrar que si el disco se corta paralelamente al plano xy en n rebanadas, la velocidad total de transferencia de materia se hace

$$|\mathscr{W}_A^{(n)}| = 2 \cdot \pi R^2 \cdot n \cdot \mathscr{D}_A c_{As} \lambda \tanh \lambda \frac{b}{n} \tag{17.I-3}$$

Obtener la expresión para el factor de eficacia tomando el límite

$$\eta_A = \lim_{n \to \infty} \frac{|\mathscr{W}_A|}{|\mathscr{W}_A^{(n)}|} = \frac{\tanh \lambda b}{\lambda b} \tag{17.I-4}$$

Expresar de nuevo este resultado en función del parametro Λ definido en § 17.6.

17.J$_3$ Disolución de un sólido en una película descendente[1]

Un líquido B desciende por una pared vertical con movimiento laminar. Para $z < 0$ la pared no se disuelve en el fluido, pero para $0 < z < L$ la pared contiene una especie A que es ligeramente soluble en B. La película se inicia suficientemente lejos de la parte alta de la pared, de forma que v_z depende solamente de y para $z \geqslant 0$. (Véase Fig. 17.J.)

a. Es evidente que hay que aplicar en este caso la Ec. 17.5—6. Demostrar que si el «tiempo de contacto» $L/v_{máx}$ es pequeño, una buena aproximación para la Ec. 17.5—6 es

$$ay \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathscr{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{17.J-1}$$

en la que $a = \rho g \delta/\mu$. Justificar el uso de las siguientes condiciones límite:

---

[1] H. KRAMERS y P. J. KREYGER, *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 42-48 (1956); véase también R. L. PIGFORD, *Chem. Eng. Prog. Symposium* Series No. 17, vol. **51**, pp. 79-92 (1955) para el problema análogo de conducción de calor.

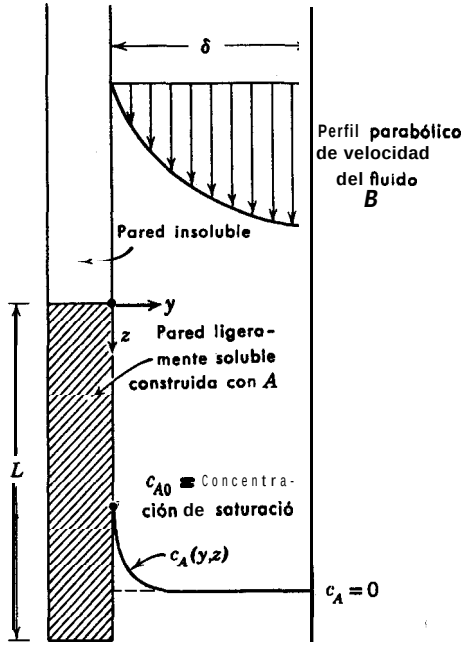


Fig. 17.5. Disolución de un sólido en una película descendente, con el perfil parabólico de velocidad totalmente desarrollado.

C.L. 1 :	$c_A = 0$	para $z = 0$	**(17.J–2)**
C.L. 2 :	$c_A = 0$	para $y = \infty$	**(17.J–3)**
C.L. 3 :	$c_A = c_{A0}$	para $y = 0$	**(17.J–4)**

siendo c_{A0} la solubilidad de A en B.

b. Resolver la Ec. 17.J – 1 sabiendo que la solución es de la forma

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = f(\eta) \tag{17.J–5}$$

en la que η es una variable adimensional:

$$\eta = y\left(\frac{a}{9\mathscr{D}_{AB}z}\right)^{1/3} \tag{17.J–6}$$

Demostrar que con esta elección de las variables dependiente e independiente la Ec. 17.J–1 se transforma en

$$\frac{d^3f}{d\eta^3} + 3\eta^2\frac{df}{d\eta} = 0 \tag{17.J–7}$$

con las siguientes condiciones límite

C.L. 1 : $f = 0$ para $\eta = \infty$ (17.J–8)

C.L. 2 : $f = 1$ para $\eta = 0$ (17.J–9)

c. Resolver esta ecuación para los perfiles de concentración

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\int_\eta^\infty \exp(-\eta^2)\,d\eta}{\int_0^\infty \exp(-\eta^2)\,d\eta} = \frac{\int_\eta^\infty \exp(-\eta^2)\,d\eta}{\Gamma(\frac{4}{3})} \tag{17.E10}$$

en la que $\Gamma(\frac{4}{3})$ es la función gamma, definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \beta^{n-1} e^{-\beta}\,d\beta \qquad (n > 0) \tag{17.J-11}$$

que tiene la fórmula de recursión $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

d. Demostrar que la velocidad media de transferencia de materia para toda la superficie de disolución es

$$N_{A,\text{med}} = -\frac{\mathscr{D}_{AB}}{L}\int_0^L \left(\frac{\partial c_A}{\partial y}\right)_{y=0} dz = \frac{2\mathscr{D}_{AB}c_{A0}}{\Gamma(\frac{4}{3})}\sqrt[3]{\frac{a}{9\mathscr{D}_{AB}L}} \tag{17.J-12}$$

17.K$_3$ Difusión desde un manantial puntual en una corriente

Una corriente de fluido (de la especie química *B*), que circula con movimiento laminar, tiene una velocidad uniforme v_0. En un punto de la corriente se inyecta la especie A en una cantidad pequeña $\mathscr{W}_A$ moles seg^{-1}. Esta cantidad es lo bastante pequeña para que la velocidad másica media no varíe apreciablemente respecto de v_0. El sistema se representa gráficamente en la Fig. 17.K. La especie *A* es arrastrada por la corriente (en la dirección *z*) al mismo tiempo que difunde radial y axialmente.

a. Demostrar que un balance de materia para la especie *A* aplicado al anillo cilíndrico de la Fig. 17.K conduce a la siguiente ecuación entre derivadas parciales si $\mathscr{D}_{AB}$ se considera constante

$$v_0\frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathscr{D}_{AB}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right] \tag{17.K-1}$$

b. Comprobar (bastante laborioso) que la solución

$$c_A = \frac{\mathscr{W}_A}{4\pi\mathscr{D}_{AB}s}\exp[(-v_0/2\mathscr{D}_{AB})(s-z)] \tag{17.K-2}$$

satisface a la anterior ecuación diferencial. Obsérvese que $s^2 = r^2 + z^2$.

c. Demostrar que esta solución cumple también las siguientes condiciones limite:

C.L. 1 : $c_A = 0$ para s = ∞ (17.K–3)

C.L. 2 : $-4\pi s^2\mathscr{D}_{AB}\dfrac{\partial c_A}{\partial s} = \mathscr{W}_A$ para $s \to 0$ (17.K–4)

C.L. 3 : $\dfrac{\partial c_A}{\partial r} = 0$ para $r = 0$ (17.K–5)

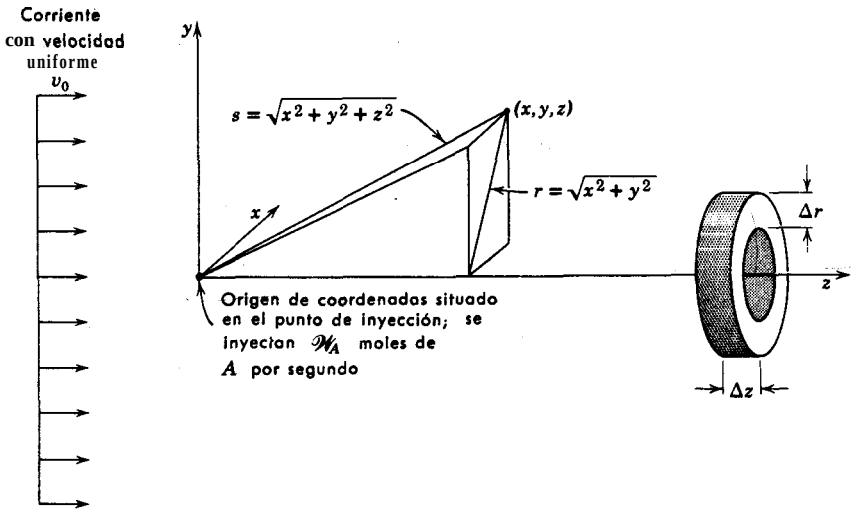


Fig. 17.K. Difusión desde un manantial puntual en una corriente de velocidad constante.

d. Demostrar cómo se pueden representar los datos de c_A en función de r y z para valores determinados de v_0 y $\mathscr{W}_A$ (cuando se aplica la solución anterior) para obtener una línea recta de pendiente $v_0/2\mathscr{D}_{AB}$ y ordenada en el origen In $\mathscr{D}_{AB}$.

Nota. Una de las aplicaciones de este método es la determinación de «difusividades de remolino».[2]

17.L$_4$ Absorción de un gas en una película descendente con reacción química

Resolver de nuevo el problema expuesto en § 17.5 cuando el gas A reacciona con el líquido B de acuerdo con una reacción química irreversible de primer orden en la fase liquida, cuya constante de velocidad es k_1'''. Hallar la expresión para la absorción total análoga a la de la Ec. 17.5 – 17. Demostrar que el resultado de la absorción con reacción se simplifica adecuadamente para representar la absorción sin reacción.

Respuesta: $$\mathscr{W}_A = Wc_{A0}v_{\text{máx}}\sqrt{\mathscr{D}_{AB}/k_1'''}\left[\left(\frac{1}{2} + u\right)\operatorname{erf}\sqrt{u} + \sqrt{\frac{u}{\pi}}e^{-u}\right]$$

siendo $u = k_1'''L/v_{\text{máx}}$.

17.M$_4$ Factores de eficacia para cilindros largos

Deducir la expresión de η_A para el caso de cilindros, análoga a la de la Ec. 17.6 – 16. Despréciese la difusión a través de los extremos de los cilindros.

Respuesta: $$\eta_A = \frac{I_1(2\Lambda)}{\Lambda I_0(2\Lambda)}$$

---

[2] T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), segunda edición, p. 42.

CAPÍTULO 18

LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES

En el Capítulo 17 se han planteado una serie de problemas de difusión ordinaria mediante la aplicación de balances de materia a una de las especies que difunden. En este capítulo comenzamos por aplicar un balance de materia a un elemento diferencial de fluido con el fin de establecer las ecuaciones de continuidad para las dos especies químicas de una mezcla binaria de líquidos. Introduciendo después las expresiones de la densidad de flujo de materia se obtienen las ecuaciones de difusión en una gran variedad de formas. Estas ecuaciones de difusión pueden utilizarse para resolver los problemas del Capítulo 17, así como también otros más complejos.

Después de esta introducción a las ecuaciones de difusión ordinaria para una mezcla binaria, se presentan las ecuaciones de variación para mezclas de varios componentes con reacciones químicas y efectos caloríficos, que comprenden una ecuación de continuidad para cada una de las especies químicas presentes, la ecuación de movimiento y la ecuación del balance de energía. Estas relaciones proporcionan una descripción completa de los sistemas de flujo de varios componentes, y comprenden, como casos particulares, las ecuaciones expuestas en los Capítulos 3 y 10. Normalmente no se utilizan en su forma completa, tal como se expresan aquí, sino que, en general, se descartan aquellos términos que son cero o físicamente despreciables, y de esta forma se obtienen ecuaciones más sencillas para el caso especial de que se trate.

Después de presentar estas ecuaciones generales estamos ya en condiciones de considerar algunas aplicaciones especiales. de las mismas, tales como descripción de la transmisión combinada de calor y materia, difusión térmica, de presión y forzada, y difusión ordinaria de tres componentes. Las ecuaciones de variación proporcionan también la base para el análisis dimensional, que se utiliza más adelante en relación con la determinación de la forma funcional de las correlaciones del coeficiente de transferencia de materia.

§ 18.1 LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD PARA UNA MEZCLA BINARIA

En esta sección se aplica la ley de conservación de la materia de la especie *A* a un elemento de volumen ***Ax Ay Az, fijo en el espacio,*** a través del cual fluye una

mezcla binaria de A y B. (Véase Fig. 3.1—1.) Dentro de este elemento se puede producir A por reacción química con una velocidad r_A (g cm^{-3} seg^{-1}). Las distintas contribuciones al balance de materia son

velocidad de variación de la masa de A con el tiempo en el elemento de volumen	$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$	(18.1-1)
entrada de A a través de la cara situada en x	$n_{Ax}\|_x \, A_Y \Delta z$	(18.1-2)
salida de A a través de la cara situada en $x + \Delta x$	$n_{Ax}\|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$	(18.1-3)
velocidad .de producción de A por reacción química	r_A Ax Ay Az	(18.14)

También existen términos de entrada y salida en las direcciones y y z. Escribiendo el balance completo de materia y dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y haciendo tender a cero el elemento de volumen, se obtiene

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial n_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial n_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial n_{Az}}{\partial z} \right) = r_A \tag{18.1-5}$$

Ésta es la ***ecuación de continuidad para el componente A*** de una mezcla binaria, que describe la variación de la concentración de A con respecto al tiempo para un punto fijo en el espacio. Esta variación resulta del movimiento de A y de las reacciones químicas que dan lugar a A. Las magnitudes n_{Ax}, n_{Ay}, n_{Az}, son los componentes rectangulares del vector densidad de flujo de materia $n_A = \rho_A v_A$ definido en la Ec. 16.1—5. La Ec. 18.1-5 puede expresarse en notación vectorial

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot n_A) = r_A \tag{18.1-6}$$

La equivalente ***ecuación de continuidad para el componente B es***

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + (\nabla \cdot n_B) = r_B \tag{18.1-7}$$

La suma de estas dos ecuaciones conduce a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho v) = 0 \tag{18.1-8}$$

que es la ***ecuación de continuidadpara la mezcla*** y que es idéntica a la Ec. 3.1-4 para un fluido puro. Para obtener la Ec. 18.1-8 se ha aplicado la relación $n_A + n_B = \rho v$

(Ec. J de la Tabla 16.1-3) así como la ley de conservación de la materia expresada en la forma $r_A + r_B = 0$. Obsérvese finalmente que la Ec. 18.1-8 se transforma en

$$(\nabla \cdot v) = 0 \tag{18.1-9}$$

para un fluido de *densidad constante p.*

El desarrollo anterior podría hacerse igualmente en función de unidades molares. Si R_A es la velocidad molar de producción de *A* por unidad de volumen, la ecuación molar análoga a la Ec. 18.1—6 es

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot N_A) = R_A \tag{18.1–10}$$

De igual forma, para el componente *B,* tendremos

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} + (\nabla \cdot N_B) = R_B \tag{18.1-11}$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\nabla \cdot cv^*) = (R_A + R_B) \tag{18.142}$$

para la ecuación de continuidad de la mezcla. Para obtener esta expresión se ha utilizado la relación $N_A + N_B = cv^*$. Sin embargo, como en general el numero de moles no se conserva, no podemos tomar $R_A + R_B$ igual a cero, salvo que se produzca un mol de *B* por cada mol de *A* que desaparece *(o viceversa).* Obsérvese, finalmente, que la Ec. 18.1-12 se transforma en

$$(\nabla \cdot v^*) = \frac{1}{c}(R_A + R_B) \tag{18.1-13}$$

para un fluido de *densidad molar constante c.*

Las Ecs. 18.1-6 y 10 no son formas útiles para obtener perfiles de concentración. Con el fin de hallar las ecuaciones generales utilizadas para describir la difusión binaria, se reemplazan las densidades de flujo n_A y N_A por las expresiones adecuadas que contienen los gradientes de concentración. Substituyendo la Ec. *A* de la Tabla 16.2-1 en la Ec. 18.1-6, y la Ec. *B* de la Tabla 16.2 — 1 en la Ec. 18.1 — 10, se llega a las siguientes ecuaciones de la difusión binaria, que son totalmente equivalentes:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho_A v) = (\nabla \cdot \rho \mathscr{D}_{AB} \nabla \omega_A) + r_A \tag{18.1–14}$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (\nabla \cdot c_A v^*) = (\nabla \cdot c \mathscr{D}_{AB} \nabla x_A) + R_A \tag{18.1–15}$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones describe los perfiles de concentración en un sistema *binario* de difusión. La única restricción es que sea en ausencia de difusión

térmica, de presión y forzada. Las Ecs. 18.1— 14 y 15 son válidas para sistemas de densidad total variable (ρ o c), y difusividad variable $\mathscr{D}_{AB}$.

Como las Ecs. 18.1— 14 y 15 son completamente generales, resultan también muy poco manejables. En el análisis de los sistemas de difusión puede frecuentemente admitirse la constancia de la densidad o la densidad molar, y, por consiguiente, es posible efectuar algunas simplificaciones :

Suposición de ρ y $\mathscr{D}_{AB}$ constantes

Con esta suposición la Ec. 18.1— 14 se transforma en

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_A(\nabla \cdot v) + (v \cdot \nabla \rho_A) = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 \rho_A + r_A \qquad (18.1\text{-}16)$$

Pero como, de acuerdo con la Ec. 18.1-9 $(\mathbf{V} \cdot v)$ es igual a cero, al dividir la Ec. 18.1— 16 por M_A se obtiene

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (v \cdot \nabla c_A) = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A + R_A \qquad (18.1\text{–}17)$$

Esta ecuación se utiliza, generalmente, para la difusión en ***soluciones líquidas diluidas*** a temperatura y presión constantes. El primer miembro puede expresarse como Dc_A/Dt. La Ec. 18.1-17 tiene la misma forma que la Ec. 10.1-25 si $R_A = 0$; esta semejanza es la base de las analogías que frecuentemente se deducen entre el transporte de calor y materia para el flujo de fluidos de ρ constante.

Suposición de c y $\mathscr{D}_{AB}$ constantes

Para esta suposición la Ec. 18.1— 15 se transforma en

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + c_A(\nabla \cdot v^*) + (v^* \cdot \nabla c_A) = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A + R_A \qquad (18.1\text{-}18)$$

Pero como, de acuerdo con la Ec. 18.1-13 $(\mathbf{V} \cdot v^*)$ puede substituirse por $(1/c)\ (R, + R_B)$, la Ec. 18.1-18 se transforma en[1]

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + (v^* \cdot \nabla c_A) = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A + R_A - \frac{c_A}{c}(R_A + R_B) \qquad (18.1\text{-}19)$$

Está ecuación se utiliza, generalmente, para los ***gases de baja densidad*** a temperatura y presión constantes. El primer miembro de esta ecuación no puede expresarse como Dc_A/Dt debido a que interviene v^* en vez de v.

---

[1] En ausencia de reacciones químicas, la Ec. 18.1-19 puede expresarse enfunción de v en vez de v^* utilizando otro tipo de concentración, correspondiente al peso molecular medio:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln M + (v \cdot \nabla \ln M) = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 \ln M \qquad (18.1\text{–}19a)$$

siendo $M = x_A M_A + x_B M_B$. Parece ser que esta relación ha sido sugerida por primera vez por C. H. BEDINGFIELD, Jr. y T. B. DREW, *Znd. Eng. Chem., 42,* 1164 (1950).

TABLA 18.2-1
LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE A EN DIVERSOS SISTEMAS COORDENADOS
(Ec. 18.1-10)

Coordenadas **rectangulares:**

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z}\right) = R_A \qquad (A)$$

Coordenadas ***cilíndricas:***

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rN_{Ar}) + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{A\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z}\right) = R_A \qquad (B)$$

Coordenadas ***esféricas:***

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2N_{Ar}) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(N_{A\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial N_{A\phi}}{\partial \phi}\right) = R_A \qquad (C)$$

TABLA 18.2-2
LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE A PARA ρ Y $\mathscr{D}_{AB}$ CONSTANTES
(Ec. 18.1−17)

Coordenadas *rectangulares:*

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y\frac{\partial c_A}{\partial y} + v_z\frac{\partial c_A}{\partial z}\right) = \mathscr{D}_{AB}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right) + R_A \qquad (A)$$

Coordenadas ***cilíndricas:***

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_r\frac{\partial c_A}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial c_A}{\partial z}\right) = \mathscr{D}_{AB}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 c_A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right) + R_A \qquad (B)$$

Coordenadas ***esféricas:***

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left(v_r\frac{\partial c_A}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial c_A}{\partial \theta} + v_\phi\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial c_A}{\partial \phi}\right) = \mathscr{D}_{AB}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial c_A}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 c_A}{\partial \phi^2}\right) + R_A \qquad (C)$$

Suposicióiz de velocidad cero

Vamos a mencionar una forma más simplificada de las Ecs. 18.1-14 y 15. Si no ocurren cambios químicos, r_A, r_B, R_A y R_B, son cero. Si además también es cero v en la Ec. 18.1-17 o v^* en la Ec. 18.1-18, se obtiene

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A \tag{18.1–20}$$

que es la llamada ***segunda ley de difusión de Fick*** o a veces simplemente ***ecuación de difusión.*** Esta ecuación se utiliza, generalmente, para la difusión en ***sólidos o*** en ***líquidos estacionarios*** (v = 0 en la Ec. 18.1— 17) y para la ***interdifusión equimolar*** en gases2 (v^* = 0 en la Ec. 18.1— 19). Obsérvese que la Ec. 18.1-20 es semejante a la ***ecuación de conducción del calor,*** Ec. 10.1-26; esta semejanza es la base del tratamiento analógico de muchos problemas de conducción del calor y de difusión en sólidos. Se han resuelto cientos de problemas descritos por la segunda ley de Fick; las soluciones pueden encontrarse en las monografías de Crank[3] y de Carslaw y Jaeger.[4]

§ 18.2 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE A EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

En esta sección se resumen en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, las ecuaciones más importantes de § 18.1. Dichas ecuaciones se han tabulado con el fin de disponer de una cómoda referencia para la resolución de problemas. En la Tabla 18.2-1 se presenta la ecuación de continuidad en función de N_A, y en la Tabla 18.2-2 la ecuación de difusión correspondiente a la Ec. 18.1— 17. Por analogía pueden expresarse también otras ecuaciones de la sección § 18.1. La notación para los sistemas de coordenadas curvilíneas se indica en la Fig. A. 6— 1. Obsérvese que las ecuaciones de difusión para sólidos se pueden obtener haciendo iguales a cero los componentes de la velocidad de la Tabla 18.2-2.

§ 18.3 LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES EN FUNCIÓN DE LAS DENSIDADES DE FLUJO

En los Capítulos 3 y 10 se han presentado las ecuaciones de variación para un líquido puro. Ampliamos ahora este tema y damos las ecuaciones de variación para un fluido no isotérmico que consta de n especies químicas.

---

2 Mediante la expresión interdifusión equimolar se quiere indicar que la densidad de flujo molar total con respecto a coordenadas -estacionarias es cero.

3 J. CRANK, *The Mathematics of Diffusion,* Oxford University Press (1956).

4 H. S. CARSLAW y J. 0. JAEGER, *Heat Conduction in Solids,* Oxford University Press (1959), segunda edición.

(i) Una ***ecuacidn de continuidad*** para cada una de las especies químicas presentes en el fluido, es:

$$\frac{D}{Dt}\rho_i = -\rho_i(\nabla \cdot v) - (\nabla \cdot j_i) + r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{18.3-1}$$

Sumando las n ecuaciones de este tipo se obtiene la ecuación de continuidad para la mezcla, que corresponde a la **Ec.** 18.1-8. En un problema determinado puede reemplazarse cualquiera de las n ecuaciones anteriores por la ecuación de continuidad para la mezcla.

(ii) La ***ecuación de movimiento*** para la mezcla es:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \pi] + \sum_{i=1}^{n}\rho_i g_i \tag{18.3-2}$$

Con el fin de abreviar se ha introducido el tensor de presión $\pi = \tau + p\delta$, siendo τ la parte viscosa de la densidad de flujo de cantidad de movimiento (o tensor de esfuerzo cortante), y δ el tensor unidad. Obsérvese que la **Ec. 18.3—2** difiere solamente en el último término de la ecuación de movimiento para un fluido puro **(Ec. 3.2—10),** en la que pg se ha reemplazado por $\Sigma\rho_i g_i$. En este término se tiene en cuenta el hecho de que sobre cada especie química presente puede actuar una diferente fuerza externa por unidad de masa, g_i.

(iii) La ***ecuación de energía*** para la mezcla es:

$$\rho\frac{D}{Dt}\{\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2\} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot [\pi \cdot v]) + \sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot g_i) \tag{18.3-3}$$

Obsérvese que esta **ecuación** es semejante a la ecuación de energía para un fluido puro **(Ec.** 10.1-1 **1),** y difiere solamente en el último termino, donde ***(pv.g) se*** ha reemplazado **por** $\Sigma_i(n_i \cdot g_i)$. **En** esta expresión q es la densidad de flujo de energía en un sistema de varios componentes relativa a la velocidad media v, definida en § 18.4. La emisión y absorción de energía radiante no se han tenido en cuenta. (Véase § 14.6.)

En estas ecuaciones está contenida la descripción completa del transporte de materia, cantidad de movimiento y energía, en sistemas de varios componentes. Se necesita también la ecuación térmica de **estado** $p = p(\rho,$ í",x,), la ecuación **calórica** de **estado** $\hat{U} = \hat{U}(\rho, T, x_i)$, e información acerca de la energía **cinética.** Además, generalmente, se necesitan expresiones para las densidades de flujo j_i, π, y q, en función de los gradientes y de los coeficientes de transporte. (Véase § 18.4.) También es preciso conocer los coeficientes de transporte en función de p, T y la composición.

Ya se ha indicado anteriormente que las ecuaciones de variación pueden presentar un gran número de formas diferentes, dependiendo ***(a)*** de que se utilice D/Dt o $\partial/\partial t$, ***(b)*** de cual sea el sistema coordenado elegido para las densidades de flujo, (c) de que se utilicen unidades de masa o molares, y ***(d)*** de cómo se separen las distintas formas de energía.

Por ejemplo, las Ecs. 18, 3— 1, 2 y 3, pueden escribirse en función de $\partial/\partial t$:

(continuidad) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho_i = -(\nabla \cdot \{\rho_i v + j_i\}) + r_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (18.3-4)$$

(movimiento) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho v = -[\nabla \cdot \{\rho vv + \pi\}] + \sum_{i=1}^{n}\rho_i g_i \qquad (18.3-5)$$

(energía) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho\{\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2\} = -(\nabla \cdot \{\rho(\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2)v + [\pi \cdot v]\}) \qquad (18.3\text{-}6)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot g_i)$$

De acuerdo con la Tabla 16.1-3 se deduce que $\{\rho_i v + j_i\}$ es exactamente n_i, la densidad de flujo de materia con respecto a un sistema de coordenadas fijo. Para el transporte de energía y cantidad de movimiento pueden introducirse densidades de flujo análogas. Según esto, definimos las siguientes *densidades de flujo* de materia, cantidad de movimiento y energía, ***con respecto a un sistema coordenado fijo en el espacio:***

$$n_i = \rho\omega_i v + \mathbf{j}i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (18.3\text{-}7)$$

$$\boldsymbol{\phi} = pvv + \pi \qquad (18.3\text{-}8)$$

$$e = \rho\{\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2\}v + q + [\pi \cdot v] \qquad (18.3\text{-}9)$$

Las Ecs. 18.3-4, 5 y 6, pueden expresarse así:

(continuidad) $$\frac{\partial}{\partial t}Pi = -(\nabla \cdot n_i) + r_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (18.3\text{-}10)$$

(movimiento) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho v = -[\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}] + \sum_{i=1}^{n}\rho_i g_i \qquad (18.3\text{-}11)$$

(energía) $$\frac{\partial}{\partial t}\rho\{\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2\} = -(\nabla \cdot e) + \sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot g_i) \qquad (18.3-12)$$

Para sistemas en estado estacionario sin reacciones químicas o fuerzas externas, las densidades de flujo n_i, $\boldsymbol{\phi}$y e tienen una divergencia igual a cero. Las densidades de flujo n_i y e resultan especialmente convenientes para el planteamiento de problemas en los que existe transmisión combinada de calor y materia. (Véase ejemplo 18.5 — 1.)

Para terminar esta sección vamos a hacer algunas observaciones con respecto a las formas especiales de las ecuaciones de movimiento y energía. En § 10.3 se ha indicado que la ***ecuación de movimiento,*** tal como se escribe corrientemente, es una forma adecuada para el planteamiento de problemas de convección forzada, pero que es preferible utilizar otra forma (Ec. 10.3-3) para describir el caso límite de la convección libre pura, que resulta de las desigualdades de temperatura existentes

TABLA 18.3-1

LA ECUACION DE ENERGÍA PARA SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES[a]

En función de $\hat{E} = \hat{U} + \hat{K} + \hat{\Phi}$: (sólo exacta para $\partial\hat{\Phi}/\partial t = 0$)

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot [\pi \cdot v]) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i) \tag{A}$$

En función de $\hat{U} + \hat{K} = \hat{U} + \frac{1}{2}v^2$:

$$\rho \frac{D}{Dt}(\hat{U} + \hat{K}) = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot [\pi \cdot v]) + \sum_{i-1}^{n} (n_i \cdot g_i) \tag{B}$$

En función de $\hat{K} = \frac{1}{2}v^2$:

$$\rho \frac{D\hat{K}}{Dt} = -(v \cdot [\nabla \cdot \pi]) + \sum_{i=1}^{n} \rho_i (v \cdot g_i) \tag{C}$$

En función de $\hat{U}$:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\pi : \nabla v) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i) \tag{D}$$

En función de $\hat{H}$:

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot q) + \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i) \tag{E}$$

En función de $\hat{C}_p$:

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\tau : \nabla v) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i) + \left(\frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T}\right)_{p,x_i} \frac{Dp}{Dt} + \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i [(\nabla \cdot J_i) - R_i] \tag{F}[b]$$

En función de $\hat{C}_v$:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot q) - (\pi : \nabla v) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i) + \left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho,x_i}\right)(\nabla \cdot v) + \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{U}_i + \left(p - T\frac{\partial p}{\partial T}\right)\bar{V}_i\right][(\nabla \cdot J_i) - R_i] \tag{G}$$

[a] Para la definición de las densidades de flujo de calor que intervienen en estas ecuaciones, véase § 18.4.

[b] L. B. Rothfeld, comunicación personal.

En función de $\bar{H}_i$: (H)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \bar{H}_i\right) + \left(\nabla \cdot \sum_{i=1}^{n} N_i \bar{H}_i\right) = (\nabla \cdot k \nabla T) + \frac{Dp}{Dt} - (\tau : \nabla v) + \sum_{i=1}^{n} (j_i \cdot g_i)$$

[c] Aquí se ha despreciado la densidad de flujo de energía Dufour $q^{(x)}$, que, generalmente, es muy poco importante.

en el sistema. Para los sistemas que además de desigualdades de temperatura presentan también desigualdades de concentración, se expresa la ecuación de movimiento según la forma de la Ec. 10.3-2 y se utiliza una ecuación de estado obtenida mediante una serie de Taylor, desarrollando ρ en función de T y x_A (para un sistema de dos componentes):

$$\rho = \bar{\rho} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{\bar{T},\bar{x}_A} (T - \bar{T}) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x_A}\right|_{\bar{T},\bar{x}_A} (x_A - \bar{x}_A) + \cdots$$

$$= \bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T}) - \bar{\rho}\bar{\zeta}(x_A - \bar{x}_A) + \cdots \qquad (18.3\text{-}13)$$

en la que $\zeta = -(1/\rho)(\partial \rho/\partial x_A)_T$ es una magnitud (definidá de forma análoga a β) que representa la variación de la densidad con la composición. La ecuación de movimiento, para el caso de que la fuerza externa se deba exclusivamente a la gravedad, resulta

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -[\nabla \cdot \tau] - \bar{\rho}\bar{\beta}g(T - \bar{T}) - \bar{\rho}\bar{\zeta}g(x_A - \bar{x}_A) \qquad (18.3\text{-}14)$$

Cuando no existen diferencias de concentración en el sistema, esta ecuación se transforma en la Ec. 10. 3-3. El último término de la Ec. 18. 3— 14 corresponde a la «fuerza de flotación» que resulta de las desviaciones respecto de la concentración media $\bar{x}_A$.

Consideremos ahora la ***ecuación de energía.*** Recordemos que en el tratamiento para fluidos puros de la sección § 10.1 se ha visto que la ecuación de energía puede escribirse en muchas formas diferentes (en función de $\hat{U}$, $\hat{H}$, o T). Lo mismo ocurre para las mezclas. En la Ec. 18.3-3 se ha expresado la ecuación de energía en función de $\hat{U} + \frac{1}{2}v^2$, y en la Tabla 18.3-1 se presentan otras formas de dicha ecuación. Obsérvese que no es preciso añadir un término S_c para representar la energía calorífica liberada por reacción química homogénea, ya que esta información está implícitamente incluida en $\hat{H}$ y $\hat{U}$, y aparece explícitamente en las Ecs. (F) y (G) como $-\Sigma_i \bar{H}_i R_i$ o $-\Sigma_i \bar{U}_i R_i$. Recuérdese que en el cálculo de $\hat{H}$ o $\hat{U}$, deben de incluirse las energías de formación y de mezcla de las distintas especies. (Véase ejemplo ***22.5-1.)***

§ 18.4 LAS DENSIDADES DE FLUJO PARA SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES EN FUNCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE TRANSPORTE

En § 18.3 se han presentado las ecuaciones de variación para una mezcla de varios componentes en función de las densidades de flujo de materia, cantidad de movimiento y energía. Con el fin de obtener las ecuaciones de los perfiles, se pueden reemplazar las densidades de flujo por expresiones que contienen las propiedades de transporte y los gradientes de concentración, velocidad y temperatura. Este procedimiento se ha utilizado ya: en el Capítulo 3 se ha vuelto a escribir la ecuación de movimiento introduciendo la expresión de la densidad de flujo de cantidad de movimiento en función de los gradientes de velocidad; de forma análoga se ha procedido en el Capítulo 10 con la ecuación de energía, mediante la introducción de la expresión de la densidad de flujo de energía en función del gradiente de temperatura; y en § 18.1, con la ecuación de continuidad, al introducir una expresión de la densidad de flujo de materia en función del gradiente de concentración.

En realidad, el examen que hemos hecho hasta ahora de las densidades de flujo de materia y de los gradientes de concentración ha sido bastante simplificado. Sin duda que la contribución más importante a la densidad de flujo de materia es la que resulta como consecuencia del gradiente de concentración. Sin embargo, sabemos que aún en un sistema isotérmico existen en realidad tres «fuerzas mecánicas impulsoras» que tienden a producir el movimiento de una especie con respecto al movimiento medio del fluido: (*a*) el gradiente de concentración, (*b*) el gradiente de presión, y (c) las fuerzas externas que actúan desigualmente sobre las distintas especies químicas. En §§ 16.2 y 18.1 se han despreciado la segunda y tercera de estas «fuerzas mecánicas impulsoras» con el fin de simplificar el tratamiento. En un sistema de varios componentes existen densidades de flujo de cantidad de movimiento, energía y materia, cada una de las cuales resulta de una fuerza impulsora con la que está relacionada, tal como se indica en la diagonal principal de la Fig. 18.4-1. Sin embargo, la cuestión no es tan sencilla. De acuerdo con la termodinámica de los procesos irreversibles, existirá una contribución a cada densidad de flujo debido a cada una de las fuerzas impulsoras que intervienen en el sistema. Sin embargo, este acoplamiento puede tener lugar solamente entre parejas densidad de flujo-fuerza que son tensores de igual orden o cuyo orden difiere en dos. De acuerdo con esto, en un sistema de varios componentes, (*a*) la densidad de flujo de cantidad de movimiento depende solamente de los gradientes de velocidad, (b) la densidad de flujo de energía depende del gradiente de temperatura (conducción del calor) y de las fuerzas mecánicas impulsoras («efecto difusión-termo» o «efecto Dufour» y (c) la densidad de flujo de materia depende de las fuerzas mecánicas impulsoras (difusión ordinaria, de presión y forzada) y del gradiente de temperatura («efecto de «difusión térmica» o «efecto Soret»). Por otra parte, las relaciones recíprocas de Onsager de la termodinámica de los procesos irreversibles, proporcionan información acerca de las mutuas relaciones de los dos efectos acoplados, el Dufour y el Soret.

Para describir el efecto Soret hay que introducir una propiedad adicional de transporte (es decir, además de la viscosidad, conductividad calorífica y difusividad), la «relación de difusión térmica» o el «coeficiente de **Soret»,** dependiendo de la exacta definición. Debido a la interconexión de los efectos Soret y Dufour, de acuerdo con las relaciones de Onsager, esta propiedad adicional de transporte tendrá en cuenta la descripción cuantitativa de ambos fenómenos. **(Véanse** las anotaciones no diagonales de la Fig. 18.4-1.).

Seguramente que el principiante habrá vislumbrado a través de estas notas introductorias el discernimiento que los razonamientos termodinámicos, pueden ofrecer en relación con los fenómenos acoplados. Por otra parte, el lector posiblemente esté más interesado en **el** conocimiento de la serie de relaciones generales de densidad de flujo para sistemas, de varios componentes que vamos a dar más adelante. Los que deseen profundizar en la conexión existente entre la termodinámica y los procesos de transporte encontraran diversas referencias adecuadas en la **bibliografía**[1].

Fuerzas impulsoras / Densidades de flujo	Gradientes de velocidad	Gradiente de temperatura	Gradiente de concentr. Gradiente do presión Diferencias de fuerzo externa
Cantidad de movimiento (tensor de segundo orden)	Ley de Newton $[\mu, K]$		
Energía (vector)		Ley de Fourier $[k]$	Efecto Dufour $[\mathfrak{D}_A^T]$
Materia (vector)		Efecto Soret $[\mathfrak{D}_A^T]$	Ley de Flck $[\mathfrak{D}_{AB}]$

Fig. 18.4-1. Diagrama **esquemático** de las relaciones entre. las densidades de flujo y las **fuerzas** impulsoras en un sistema binario. Los correspondientes coeficientes de transporte se expresan **entre** corchetes.

[1] Dos artículos que tratan específicamente acerca de las expresiones de las densidades de **flujo** de materia, **energía** y cantidad de movimiento son: J. G. **KIRKWOOD** y B. L. CRAWFORD, **Jr.,** *J. Phys. Chem.*, 56, **1048-1051** (1952) y R. B. **BIRD,** C. F. **CURTISS** y J. 0. **HIRSCHFELDER,** *Chem. Eng. Prog. Sytnposium Series,* No. **16, 51, 69-85** (1955). Mas referencias generales pueden verse en S. R. de **GROOT,** *Thermodynamics of Irreversible Processes,* **North Holland Publishing, Co., Amsterdam (1951), pp. 94-123 acerca de fenómenos de transporte; 1. PRIGOGINE,** *Thermodynamics of Irreversible Processes,* Thomas, Springfield, Illinois (1955); K. *G.* **DENBIGH,** *The Thermodynamics of the Steady State,* Methuen, Londres **(1951),** pp. 78-86. Todas estas referencias se basan en el estudio original de la **termodinámica** de los procesos irreversibles de L. **ONSAGER,** *Physical Review, 37, I, 405-426* (1931); *ibid.,* **38,** *II, 2265-2279* (1931).

Las expresiones del Capítulo 3 para la ***densidad de flujo de cantidad de movimiento*** τ son igualmente válidas para substancias puras y mezclas. Para fluidos newtonianos τ es un tensor de segundo orden que viene dado por

$$\tau = -\mu(\nabla v + (\nabla v)^{\dagger}) + (\tfrac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot v)\delta \qquad (18.4\text{-}1)$$

siendo **Vv** un producto diádico, $(\nabla v)^{\dagger}$ el tensor transpuesto de la **diada Vv, y** δ el tensor unidad. En las Tablas 3.4-5, 6 y 7 se dan los componentes de τ para $\kappa = 0$. La **Ec.** 18.4-1 indica cómo está relacionada la densidad de flujo de cantidad de movimiento con los gradientes de velocidad en cualquier punto del sistema. En la Tabla 18.4-1 μ y κ son las viscosidades instantáneas, local y global, de la mezcla fluida. Las expresiones de τ para fluidos no-newtonianos se han tratado en § 3.6.

La expresión correspondiente a la **Ec.** 8.1-6 para la densidad de flujo de energía q es solamente valida para la **conducción** del calor en substancias puras. Para mezclas, ademas de la densidad de flujo **convectivo,** existen contribuciones que resultan de la **interdifusión** de las distintas especies químicas presentes y del efecto Dufour o difusión-termo. Para la densidad de flujo total de energía relativa a la velocidad **másica** media, se puede escribir

$$q = q^{(c)} + q^{(d)} + q^{(z)} \qquad (18.4\text{-}2)$$

siendo $q^{(c)} = -kVT$ la densidad de flujo de energía debida a la conducción, tal como se ha definido en § 8.1, y k la conductividad calorífica local instantánea de la mezcla. La densidad de flujo de energía $q^{(d)}$ debida a la interdifusión, para un fluido que contiene n especies, se define mediante la expresión

$$q^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{H}_i}{M_i} j_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i J_i \qquad (18.4\text{-}3)$$

siendo $\bar{H}_i$ la entalpia parcial molar de la especie i. La densidad de flujo de energía Dufour $q^{(z)}$ es de naturaleza muy compleja, y, generalmente, de menor importancia, por lo que no se estudia más ampliamente aquí.[2] La densidad de flujo de energía radiante $q^{(r)}$ puede tratarse separadamente en la forma que se ha descrito en § 14.6.

Muchas veces resulta más conveniente utilizar la densidad de flujo de energía con respecto a coordenadas estacionarias, e, en vez de q. Utilizando la definición de e, **Ec.** 18.3-9 y la anterior expresión de q, se puede poner

$$e = q^{(c)} + q^{(d)} + q^{(z)} + [\pi \cdot v] + \rho\{\hat{U} + \tfrac{1}{2}v^2\}v \qquad (18.\text{rl-}4)$$

---

[2] La forma explícita del término del efecto Dufour para una mezcla gaseosa de varios componentes ha sido estudiada por J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, Molecular *Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954), pp. 522, 705. La separación de q en las parte-s componentes que se ha efectuado más arriba no es totalmente correcta debido a una convención adoptada en la definición de k (véase R. B. BIRD, C. F. CURTISS, y J. 0. HIRSCHFELDER, *Chem. Eng. Prog. Symposium Series, No.* 16, 51, 69-85 (1955). p. 77, Ecs. 2.15 y 2.16).

Cuando $q^{(x)}$, $[\tau \cdot v]$ y $(\frac{1}{2}\rho v^2)v$, son muy poco importantes, e puede expresarse aproximadamente por

$$e = -k\nabla T + \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i J_i + pv + \rho \hat{U} v$$

$$= -kVT + \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i J_i + \rho \hat{H} v$$

$$= -\text{kVT} + \sum_{i=1}^{n} \bar{H}_i J_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{H}_i v \qquad (18.4\text{-}5)$$

Teniendo en cuenta la Tabla 16.1-3, la Ec. 18.4-5 puede ponerse en esta forma

$$e = -\text{kVT} + \sum_{i=1}^{n} N_i \bar{H}_i \qquad (18.4\text{-}6)$$

Esta expresión aproximada es el punto de partida habitual para los estudios ingenieriles de transmisión de calor con transferencia simultánea de materia.[3]

De acuerdo con la breve discusión preliminar que hemos hecho, la expresión de la *densidad de flujo de materia* j_i en un sistema de varios componentes, constará de tres contribuciones relacionadas con las fuerzas mecánicas impulsoras y una contribución adicional debida a la fuerza térmica impulsora

$$j_i = j_i^{(x)} + j_i^{(p)} + j_i^{(g)} + j_i^{(T)} \qquad (18.4\text{-}7)$$

En esta ecuación se ha expresado la densidad de flujo de materia como la suma de los tbminos que describen la difusión ordinaria (de concentración) $j_i^{(x)}$, la difusión de presión $j_i^{(p)}$, la difusión forrada $j_i^{(g)}$, y la difusión térmica $j_i^{(T)}$. Las formulas para estas contribuciones a la densidad de flujo de materia son

$$j_i^{(x)} = \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^{n} M_i M_j D_{ij} \left[x_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(\frac{\partial \bar{G}_j}{\partial x_k} \right)_{T,p,x_{s \neq j,k}} \nabla x_k \right] \qquad (18.4\text{–}8)$$

$$j_i^{(p)} = \frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^{n} M_i M_j D_{ij} \left[x_j M_j \left(\frac{\bar{V}_j}{M_j} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla p \right] \qquad (18.4\text{-}9)$$

$$j_i^{(g)} = -\frac{c^2}{\rho RT} \sum_{j=1}^{n} M_i M_j D_{ij} \left[x_j M_j \left(g_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{\rho} g_k \right) \right] \qquad (18.4\text{–}10)$$

$$j_i^{(T)} = -D_i^T \nabla \ln T \qquad (18.4\text{-}11)$$

---

[3] Véase, por ejemplo, T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, *Nueva* York (1952), segunda edición, p. 96, Ec. 128-1/2. Véase también el Ejemplo 18.5 — 1 y § 21.5.

En estas ecuaciones $\bar{G}_j$ y $\bar{V}_j$ son la entalpia libre (energía libre de Gibbs) y el volumen parciales molares, respectivamente. D_{ij} son los coeficientes de difusión, y D_i^T son los coeficientes de difusión térmica, ambos para sistemas de varios componentes. Los coeficientes D_{ij} tienen las siguientes propiedades:

$$\text{puesto que } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad D_{ii} = 0 \tag{18.4-12}$$

$$\text{puesto que } \sum_{i=1}^{n} j_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \{M_i M_k D_{ik} - M_i M_k D_{ik}\} = 0 \tag{18.4-13}$$

$$\text{y tiene que cumplirse } \sum_{i=1}^{n} D_i^T = 0$$

Para $n > 2$, D_{ij} y D_{ji} no son, en general, iguales.

La contribución de la ***difusión ordinaria*** a la densidad de flujo de materia depende en una forma complicada de los gradientes de concentración de todas las substancias presentes. El término de ***difusión de presión*** indica que si hay un gradiente de presión impuesto sobre el sistema puede existir un movimiento neto de la especie i en una mezcla; la tendencia de una mezcla a separarse por efecto de un gradiente de presión es muy pequeña, pero encuentra aplicación en las Separaciones por centrifugación, donde pueden conseguirse unos gradientes de presión enormes. El término de ***difusión forzada*** tiene una importancia fundamental en los sistemas iónicos, en los que la fuerza externa que actúa sobre un ión es igual al producto de la carga iónica por la intensidad del campo eléctrico local ; según esto, cada una de las especies iónicas puede estar bajo la influencia de una fuerza diferente. Si la fuerza externa se debe exclusivamente a la gravedad, todas las g_j son idénticas y $j_i^{(q)}$ desaparece. El término de ***difusión térmica*** describe la tendencia de las especies químicas a difundir bajo la influencia de un gradiente de temperatura; este efecto es muy pequeño, pero se pueden construir artificios que permiten conseguir gradientes de temperatura muy pronunciados y efectuar separaciones de mezclas.[4]

Con el fin de que el lector perciba mejor los aspectos físicos de estas ecuaciones generales, vamos a estudiar dos importantes casos límite.

---

[4] Las separaciones por difusión térmica se pueden mejorar considerablemente combinando dicho efecto con la convección libre en un sistema análogo al de la Fig. 9.9 — 1. Una columna que utiliza estos dos efectos es la denominada *columna de Clusius-Dickel.* Estas columnas se han utilizado para separaciones isotópicas y separación de mezclas complejas de compuestos orgánicos muy semejantes. Una introducción muy interesante a la difusión térmica puede verse en el pequeño libro de K. E. GREW y T. L. IBBS, *Thermal Diffusion in* Gases, Cambridge University Press (1952). Para las aplicaciones a liquidos, véase A. L. JONES y R. W. FOREMAN, *Ind. Eng. Chem,* **44, 2249-2253 (1952),** y A. L. JONES y E. C. MILBERGER, *Ind. Eng. Chem.,* **45, 2689-2696** (1953). La teoría matemática de las columnas de difusión térmica se describe en un artículo clásico de R. C. JONES y W. H. FURRY, *Rev. Mod. Phys.,* **18, 151-224 (1946).**

Sistemas binarios

Para un sistema de dos componentes A y B, las magnitudes D_{AB} y D_{BA} son iguales, y las Ecs. 18.4-7 a 11 se convierten en[5]

$$j_A = -j_B = -\left(\frac{c^2}{\rho RT}\right) M_A{}^2 M_B D_{AB} x_A \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_A}\frac{\bar{G}_A}{M_A}\right)_{T,p} \nabla x_A - \frac{\rho_B}{\rho}(g_A - g_B) + \left(\frac{\bar{V}_A}{M_A} - \frac{1}{\rho}\right)\nabla p\right] - D_A{}^T \nabla \ln T \qquad (18.4\text{-}14)$$

Esta ecuación puede expresarse en otra forma utilizando $(d\bar{G}_A)_{T,p} = RT\, d\ln a_A$ y definiendo[6] «una relación de difusión térmica» $k_T = (\rho/c^2 M_A M_B) X (D_A{}^T/D_{AB})$:

$$j_A = -j_B = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B D_{AB} \cdot \left[\left(\frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln x_A}\right)_{T,p} \nabla x_A - \frac{M_A \rho_B x_A}{\rho RT}(g_A - g_B) + \frac{M_A x_A}{RT}\left(\frac{\bar{V}_A}{M_A} - \frac{1}{\rho}\right)\nabla p + k_T \nabla \ln T\right] \qquad (18.4\text{-}15)$$

Esta ecuación es el punto de partida para el estudio de la difusión ordinaria, de presión, forzada y térmica, en mezclas binarias no ideales. (Véanse los ejemplos 18.5-2, 3 y 4). En la Tabla 18.4-1 se presentan, a título de ejemplo, algunos valores de k_T para gases y líquidos.

Considerando solamente la difusión ordinaria, la Ec. 18.4-15 se simplifica para dar

$$j_A = -\left(\frac{c^2}{\rho}\right) M_A M_B D_{AB}\left(\frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln x_A}\right)_{T,p} \nabla x_A \qquad (18.4\text{-}16)$$

que es equivalente a la Ec. E de la Tabla 16.2— 1,

$$j_A = -\left(\frac{c^2}{\rho}\right) M_A M_B \mathscr{D}_{AB} \nabla x_A \qquad (18.4\text{-}17)$$

---

[5] Obsérvese que el termino entre corchetes tiene las dimensiones de fuerza por unidad de masa; por consiguiente, lo designamos por $-\hat{F}_A$. Utilizando las relaciones de la Tabla 16.1-3 se puede demostrar que la Ec. 18.4-14 (omitiendo el termino de difusión térmica) se transforma en

$$v_A - v^* = \frac{D_{AB} M_A \hat{F}_A}{RT} = m_{AB} \hat{F}_A \qquad (18.4\text{-}14a)$$

donde $m_{AB} = D_{AB}/RT$ es la «movilidad». Esta relación se ha utilizado en la Ec. 16.5-1 en conexión con la teoría hidrodinámica de la difusión.

[6] Otras magnitudes que se definen para sistemas binarios son el *factor a de difusión térmica* y el *coeficiente de Soret* σ:

$$k_T = \alpha x_A x_B = \sigma x_A x_B T \qquad (18.4\text{-}15a)$$

El factor a es casi independiente de la concentración para el caso de gases; para líquidos se utiliza generalmente, σ. Obsérvese que $D_A{}^T = -D_B{}^T$. Debido a que k_T se define en función de $D_A{}^T$, cuando k_T es positivo, el componente A se mueve hacia la región mas fría, y cuando k_T es negativo A se mueve hacia la región más caliente.

TABLA 18.4–1

RELACIONES EXPERIMENTALES DE DIFUSIÓN TÉRMICA PARA LÍQUIDOS Y GASES DE BAJA DENSIDAD

Líquidos[a]				Gases[b]			
Componentes A - B	$T(°K)$	x_A	k_T	Componentes A - B	$T(°K)$	x_A	k_T
$C_2H_2Cl_4 - n\text{-}C_6H_{14}$	298	0,5	1,08	He-Ne	330	0,20	0,0531
$C_2H_4Br_2 - C_2H_4Cl_2$	298	0,5	0,225			0,60	0,1004
$C_2H_4Cl_2 - CCl_4$	298	0,5	0,060	$H_2 - N_2$	264	0,294	0,0548
$CBr_4 - CCl_4$	298	0,09	0,129			0,775	0,0663
$CCl_4 - CH_3OH$	313	0,5	−1,23	$H_2 - D_2$	327	0,10	0,0145
$H_2O - CH_3OH$	313	0,5	-0,137			0,50	0,0432
C_6H_6 – ciclo-C_6H_{12}	313	0,5	0,100			0,90	0,0166

[a] Tomados de R. L. SAXTON, E. L. DOUGHERTY y H. G. DRICKAMER, *J. Chem. Phys.*, *22*, 1166-1168 (1954); R. L. SAXTON y H. G. DRICKAMER, *ibid*, 1287-1288; L. J. TICHACEK, W. S. KMAK y H. G. DRICKAMER, *J. Phys. Chem.*, *60, 660-665* (1956).

[b] Tomados de las Tablas de J. 0. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, Nueva York (1954), § 8.4.

La comparación de estas dos ecuaciones indica que D_{AB} y $\mathscr{D}_{AB}$ son idénticas para soluciones ideales (es decir, actividad proporcional a la fracción molar). Para sistemas no ideales puede utilizarse cualquiera de las dos D_{AB} o $\mathscr{D}_{AB}$ y la correspondiente ecuación anterior.

En general, los investigadores dan los coeficientes de difusión como $\mathscr{D}_{AB}$, ya que esto no requiere datos de actividad-concentración. Los datos existentes indican, no obstante, que en fase líquida D_{AB} varía menos con la concentración que $\mathscr{D}_{AB}$. (Véase Fig. 18.4-2.)

Difusión ordinaria en mezclas gaseosas de varios componentes a baja densidad

Para una mezcla de gases ideales, la Ec. 18.4-8 se convierte en

$$j_i = \frac{c^2}{\rho} \sum_{j=1}^{n} M_i M_j D_{ij} \nabla x_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{18.4-18}$$

Para una mezcla gaseosa ideal de n componentes se conoce la relación existente entre D_{ij} (la difusividad de la pareja *i-j* en una mezcla de varios componentes) y $\mathscr{D}_{ij}$

7 C. F. CURTISS y J. 0. HIRSCHFELDER, *J. Chem. Phys.*, 17, 550-555 (1949). Para un sistema de tres componentes las relaciones son de la forma

$$D_{12} = \mathscr{D}_{12}\left\{1 + \frac{x_3[(M_3/M_2)\mathscr{D}_{13} - \mathscr{D}_{12}]}{x_1\mathscr{D}_{23} + x_2\mathscr{D}_{13} + x_3\mathscr{D}_{12}}\right\} \tag{18.4-18a}$$

y análogas relaciones para D_{21}, D_{23}, D_{13} y D_{31}.

(la difusividad de la pareja ***i-j*** en una mezcla binaria)'. Puesto que las difusividades D_{ij} dependen de la concentración, no es conveniente utilizar la Ec. 18.4-18. Curtiss y Hirschfelder demostraron que la Ec. 18.4-18 puede «volverse del revés» para dar

$$\nabla x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_i c_j}{c^2 \mathscr{D}_{ij}} (v_j - v_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c \mathscr{D}_{ij}} (x_i N_j - x_j N_i) \qquad (18.4\text{-}19)$$

Estas ecuaciones se denominan ***ecuaciones de Stefan-Maxwell.***[8] Obsérvese que aquí interviene $\mathscr{D}_{ij}$ en vez de D_{ij}, y que las difusividades $\mathscr{D}_{ij}$ son virtualmente **indepen-**

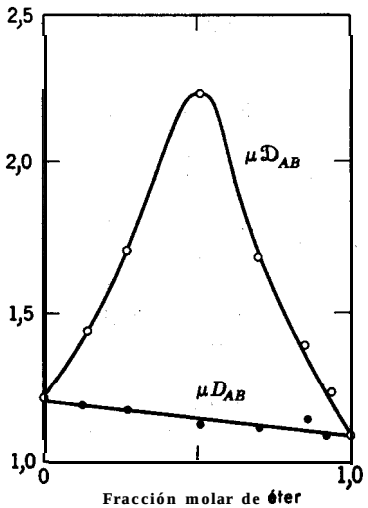


Fig. 18.4-2. Efecto de la actividad sobre el producto de la difusividad y la viscosidad de las mezclas líquidas de cloroformo y Qter. [Tomada de R. E. POWELL, W. L. ROSEVEARE y HENRY EYRING, *Ind. Eng. Chem.*, *33*, 430-435 (1941)].

dientes de la composición. (Véase Ec. 16.4-13.) Esta ecuación es el punto de partida habitual para los cálculos de difusión ordinaria en mezclas gaseosas de varios componentes. (Véase el ejemplo 18.5-5.)

Para algunos cálculos, así como para ciertas correlaciones, es conveniente de-

[8] La serie análoga de ecuaciones, incluyendo difusión de presión, térmica y forzada, han sido obtenidas también por CURTISS y HIRSCHFELDER *(loc. cit.);* véase también J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS, y R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids,* Wiley, Nueva York (1954), Ec. 11.2-54, p. 718.

finir[9] una ***difusividad binaria efectiva*** $\mathscr{D}_{im}$ para la difusión de i en una mezcla. Recuérdese que $\mathscr{D}_{AB}$ se ha definido mediante la expresión

$$N_A = -c\mathscr{D}_{AB}\nabla x_A + x_A(N_A + N_B) \tag{18.420}$$

y $\mathscr{D}_{im}$ se ***define*** mediante esta relación análoga:

$$N_i = -c\mathscr{D}_{im}\nabla x_i + x_i \sum_{j=1}^{n} N_j \tag{18.4-21}$$

Despejando ∇x_i de la **Ec.** 18.4-21 e igualando el resultado a ∇x_i de las ecuaciones de **Stefan-Maxwell,** se llega a

$$\frac{1}{c\mathscr{D}_{im}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (1/c\mathscr{D}_{ij})(x_j N_i - x_i N_j)}{N_i - x_i \sum_{j=1}^{n} N_j} \tag{18.4-22}$$

En general, las difusividades $\mathscr{D}_{im}$ varían con la posición. En los casos en los que esta variación es de poca importancia, se pueden generalizar las fórmulas de la difusión binaria y las correlaciones del coeficiente de transferencia de materia reemplazando simplemente $\mathscr{D}_{AB}$ por $\mathscr{D}_{im}$. Para algunos tipos especiales de sistemas de difusión, esta formula de $\mathscr{D}_{im}$ **(Ec.** 18. 4-22) resulta especialmente 'sencilla:

a. Para trazas de los componentes **2,3,** . . ..*n.* en la especie **1** prácticamente pura,

$$\mathscr{D}_{im} = \mathscr{D}_{i1} \tag{18.4-23}$$

b. Para sistemas en los que todas las difusividades $\mathscr{D}_{ij}$ son **idénticas**

$$\mathscr{D}_{im} = \mathscr{D}_{ij} \tag{18.4-24}$$

c. Para sistemas en los que los componentes **2, 3,** . . . *n,* se mueven con la misma velocidad (o están **inmóviles),**

$$\frac{1 - x_1}{\mathscr{D}_{1m}} = \sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{\mathscr{D}_{1j}} \tag{18.4-25}$$

Se ha visto que en los sistemas que presentan una considerable variación de $\mathscr{D}_{im}$, resulta útil admitir una variación lineal con la composición o la distancian'. Parece ser que la aplicación de $\mathscr{D}_{im}$ a la resolución de problemas de varios componentes conduce a resultados bastante buenos para el cálculo de velocidades de transferencia

9 El uso **sistemático** de una difusividad binaria efectiva ha sido sugerido por primera vez por *0.* **A. HOUGEN** *y* K. *M.* **WATSON,** ***Chemical Process Principles,*** vol. *III,* **Wiley, Nueva York (1947),** pp. 977-979. **Métodos** para la evaluación de $\mathscr{D}_{im}$ en casos especiales han sido desarrollados por C. R. **WILKE,** *Chem. Eng. Prog.,* **46, 95-104** (1950) y W. E. STEWART, *NACA* ***Tech. Note 3208 (1954).***

10 **H. W. HSU y R. B. BIRD,** *A. I.* **Ch.** *E.* **§** ***Journal*** **(en prensa).**

de materia, pero la descripción cuantitativa de los perfiles de concentración es menos satisfactoria.

Al substituir las expresiones que se dan en esta sección para las densidades de flujo en las ecuaciones de variación de § 18.3, se obtienen las ecuaciones generales entre derivadas parciales que describen el flujo de una mezcla fluida de varios componentes cuando tiene lugar transmisión de calor, transferencia de materia, y reacciones químicas. Por supuesto que la palabra «general» ha de utilizarse siempre con ciertas reservas, ya que con frecuencia es posible considerar casos «más generales». A este respecto, se nos viene a la memoria el tema de la *magnetohidrodinámica;* las ecuaciones que describen las mezclas fluidas de varios componentes con intervención de efectos electromagnéticos, 'son las ecuaciones de variación y las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell. Este tema tiene interés en relación con fenómenos astrofísicos, comportamiento de gases ionizados y chorros de plasma[11,12]. Otro campo que no abarcan nuestras ecuaciones es el de la *mecánica relativista de fluidos,* en la que se consideran los efectos relativistas, que son importantes cuando la velocidad del fluido se aproxima a la de la luz.[13]

§ 18.5 UTILIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS. DE DIFUSIÓN

Todos los problemas del Capítulo 17, y también otros más complejos, pueden plantearse directamente mediante las ecuaciones diferenciales de este capítulo. Vamos a considerar, en forma de ejemplo& la transmisión combinada de calor y materia, la difusión térmica, de presión, y forzada, y la difusión ordinaria en un sistema de tres componentes.

Ejemplo 18.5-1. Transferencia simultánea de calor y materia

Desarrollar expresiones para el perfil de concentración $x_A(z)$ y el perfil de temperatura $T(z)$ para el sistema representado en la Fig. 18.5 — 1, cuando se conocen las concentraciones y temperaturas en ambos extremos de la película (z = 0, z = 6). En este problema, un vapor condensable caliente, *A,* difunde en estado estacionario a través de una película estancada de un gas no condensable, *B,* hacia una superficie fría situada en z = 0, en la que condensa *A.* Supóngase que el gas se comporta como ideal y que la presión y las propiedades físicas de la mezcla son constantes*. Despréciese la transmisión de calor por radiación y la difusión térmica.

Solución. Para hallar los resultados que se desean es preciso resolver las ecuaciones de continuidad y energía para este sistema. Dichas ecuaciones, de acuerdo con las Ecs. 18.3 -10 y 12, pueden escribirse de la siguiente forma:

---

11 Véase T. *G.* COWLING, *Magnetohydrodynamics,* Interscience, Nueva York (1957).

12 L. SPITZER, Jr., *Physics of Fully Ionized Gases,* Interscience, Nueva York (1956).

13 L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ, *Myekhanika Sploshnikh Sred,* Moscú (1954). capítul J XV, pp. 606-616.

1 El sencillo modelo descrito aquí se utiliza con frecuencia en los cálculos psicrométricos. En §§ 21.5, 6, 7 se discuten modelos más generales.

(continuidad de A) $$\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \qquad (18.5\text{-}1)$$

(energía) $$\frac{de_z}{dz} = 0 \qquad (18.5\text{-}2)$$

Por consiguiente, tanto N_{Az} como e_z son constantes a través de la película.

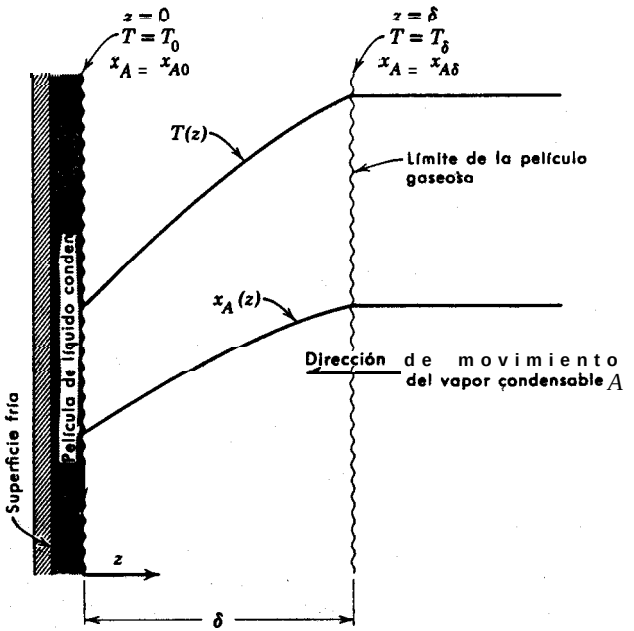


Fig. 18.5-1. Condensación de un vapor caliente A sobre una superficie fría en presencia de un gas condensable *B*.

Para determinar el ***perfil de concentración*** se necesita la densidad de flujo de materia para la difusión de *A* a través de *B* estancado:

$$N_{Az} = -\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_A}\frac{dx_A}{dz} \qquad (1.8.5\text{-}3)$$

Introduciendo la Ec. 18.5-3 en la Ec. 18.5-1 e integrando, se obtienen los perfiles de concentración

$$\left(\frac{1 - x_A}{1 - x_{A0}}\right) = \left(\frac{1 - x_{A\delta}}{1 - x_{A0}}\right)^{z/\delta} \qquad (18.54$$

Este resultado se ha obtenido en § 17.2 para el problema **isotérmico.** Igual que antes, la densidad de flujo constante N_{Az} es

$$N_{Az} = \frac{c\mathscr{D}_{AB}}{\delta} \ln \frac{1 - x_{A\delta}}{1 - x_{A0}} \tag{18.5-5}$$

Obsérvese que en la Fig. 18.5-1, N_{Az} es negativo debido a que A está condensando. Las dos últimas expresiones pueden combinarse para poner en otra forma los perfiles de concentración :

$$\frac{x_A - x_{A0}}{x_{A\delta} - x_{A0}} = \frac{1 - \exp[(N_{Az}/c\mathscr{D}_{AB})z]}{1 - \exp[(N_{Az}/c\mathscr{D}_{AB})\delta]} \tag{18.5-6}$$

Para determinar el ***perfil de temperatura*** se utiliza la densidad de flujo de energía de la Fc. 18.4-6 para un gas ideal:

$$e_z = -k\frac{dT}{dz} + (\tilde{H}_A N_{Az} + \tilde{H}_B N_{Bz})$$

$$= -k\frac{dT}{dz} + N_{Az}\tilde{C}_{pA}(T - T_0) \tag{18.5-7}$$

siendo T_0 la temperatura de referencia **elegida** para la entalpia. Introduciendo esta expresión de e_z en la **Ec.** 18.5-2 e integrando entre los limites $T = T_0$ para $z = 0$ y $T = T_\delta$ para $z = \delta$, se obtiene

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{1 - \exp[(N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k)z]}{1 - \exp[(N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k)\delta]} \tag{18.5-8}$$

Como puede verse, el perfil de temperatura para este sistema **no es** lineal, excepto para el caso límite en el que $N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k \to 0$. **Obsérvese** la semejanza entre las **Ecs.** 18.5 -6 y 8.

La densidad de flujo de energía por conducción en la pared es mayor que en ausencia de transferencia de materia. Según esto, poniendo un cero elevado para indicar las condiciones correspondientes a la ausencia de transferencia de materia, se puede escribir

$$\frac{-k(dT/dz)_{z=0}}{-k(dT/dz)^0_{z=0}} = \frac{-(N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k)\delta}{1 - \exp[(N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k)\delta]} \tag{18.5-9}$$

Resulta, por consiguiente, que la velocidad de **transmisión** de calor está directamente afectada por la transferencia simultanea de materia, mientras que (si se desprecia la difusión térmica) la densidad de flujo de materia no se afecta directamente por la transferencia simultánea de calor. En muchas aplicaciones, por ejemplo, en la mayoría de los problemas psicromttricos, $N_{Az}\tilde{C}_{pA}/k$ es pequeño, y el segundo miembro de la **Ec.** 18.5-9 es muy aproximadamente igual a la unidad. (**Véase** el problema 18.A). En el Capitulo 21 se estudian las relaciones entre transmisión de calor y materia.

Ejemplo 18.5-2. Difusión térmica

Consideremos dos recipientes unidos por un tubo **térmicamente** aislado de pequeño **diámetro,** y llenos de una mezcla de gases ideales A y B, tal como se indica en la Fig. 18.5 -2.

Los recipientes se mantienen a las temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente, y el diámetro del tubo es suficientemente pequeño para eliminar substancialmente las corrientes de convección. Desarrollar una expresión para la diferencia de composición de los dos recipientes en estado estacionario.

Solución. De acuerdo con la Ec. 18.4-15, el gradiente de temperatura existente en el sistema dará lugar a una densidad de flujo de materia que vendrá dada por

$$j_{Az}^{(T)} = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B \mathscr{D}_{AB} \frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz} \tag{18.5-10}$$

Esta densidad de flujo de materia tiende a establecer un gradiente de concentración, que a su vez da lugar a una densidad de flujo opuesta:

$$j_{Az}^{(x)} = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B \mathscr{D}_{AB} \frac{dx_A}{dz} \tag{18.5-11}$$

Una vez alcanzado el estado estacionario no existirá densidad de flujo neto de materia, y por 10 tanto

$$0 = j_{Az}^{(x)} + j_{Az}^{(T)} = -\frac{c^2}{\rho} M_A M_B \mathscr{D}_{AB} \left(\frac{dx_A}{dz} + \frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz} \right) \tag{18.5-12}$$

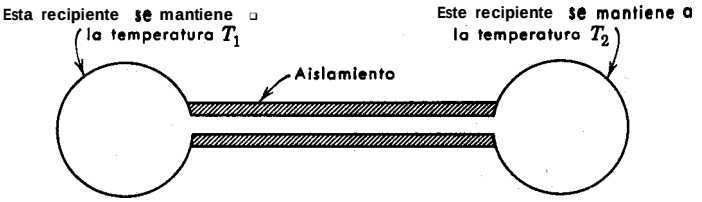


Fig. 18.5-2. Difusión térmica binaria en estado estacionario en un aparato de dos recipientes. La mezcla de los gases *A* y *B* tiende a separarse debido al gradiente térmico.

Cuando k_T es positivo, el componente *A* se mueve hacia la región fría, y hacia la caliente si es negativo. La Ec. 18.5-12 puede escribirse así

$$\frac{dx_A}{dz} = -\frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz} \tag{18.5-13}$$

El grado de separación en un aparato del tipo que estamos considerando es, en general, pequeño. Por 10 tanto, puede despreciarse el efecto de la composición sobre k_T, e integrar la Ec. 18.5 — 13 para obtener

$$x_{A2} - x_{A1} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{k_T}{T} dT \tag{18.5-14}$$

Como la variación de k_T con la temperatura es más complicada, se acostumbra a tomar k_T constante para un valor medio de la temperatura T_m. Integrando la Ec. 18.5 — 14 se obtiene

$$x_{A2} - x_{A1} = -k_T \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{18.5-15}$$

La temperatura media T_m que se recomienda es[2]

$$T_m = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{18.5-16}$$

La Ec. 18.5 — 15 es útil para estimar el orden de magnitud de los efectos de la difusión térmica.

Ejemplo 18.5-3. Difusión de presión

Una solución líquida binaria está colocada en un tubo cilíndrico de unacentrífuga de muy elevada velocidad, tal como se indica en la Fig. 18.5-3. Puede considerarse que la longitud L del tubo es pequeña con respecto al radio de rotación R_0, y que la densidad de la Solución es una función exclusiva de la composición. Determinar la distribución de los dos componentes de la mezcla, una vez alcanzado el estado estacionario, en función de sus volúmenes parciales molares, la posición en el tubo, y el gradiente de presión $dp/dz = -\rho g_\Omega \doteq -\rho\Omega^2 R_0$, siendo Ω la velocidad angular de la centrífuga. Despréciense las variaciones de los volúmenes parciales molares con la composición, y supóngase que los coeficientes de actividad son constantes para el intervalo de composiciones existentes en el tubo.

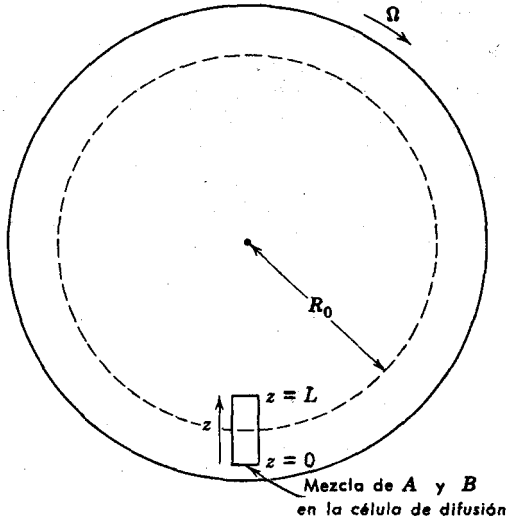


Fig. 18.5-3. Difusión de presión en estado estacionario en una centrífuga. La mezcla de A y B tiende a separarse en virtud del gradiente de presión que se establece en la centrífuga.

[2] H. BROWN, *Phys. Rev.*, **58,** 661-662 (1940).

Solución. En el estado estacionario la densidad de flujo neto de materia j_{Az} es cero, y la Ec. 18.4 — 15 puede escribirse así

$$\frac{d}{dz}\ln x_A = -\left(\frac{g\Omega}{RT}\right)(M_A - \rho\bar{V}_A) \qquad (18.5\text{–}17)$$

Esta expresión[3], que puede obtenerse también por consideraciones termodinámicas, se integra para obtener

$$\left(\frac{x_A}{x_{A0}}\right)^{\bar{V}_B}\left(\frac{x_{B0}}{x_B}\right)^{\bar{V}_A} = \exp\left((\bar{V}_A M_B - \bar{V}_B M_A)\frac{g\Omega z}{RT}\right) \qquad (18.5\text{-}18)$$

La Ec. 18.5-18 describe la distribución de concentración en estado estacionario para un sistema binario en un campo centrífugo constante.

Ejemplo 18.5—4. Difusión forzada

Una solución acuosa inmóvil de una sal MX está situada entre dos láminas planas paralelas del metal M, tal como se indica en la Fig. 18.5 -4. Se hace circular una corriente continua entre las laminas en condiciones tales que las únicas reacciones de electrodo son la disolución del ánodo y la deposición de M sobre el cátodo. Estimar el perfil de concentración de MX en la solución y la densidad de corriente máxima posible.

Supóngase que la solución es muy diluida y despreciense las variaciones de la temperatura y 'de las propiedades físicas.

Solución. Puede considerarse que la solución existente en este aparato es una mezcla ternaria de agua y las dos especies iónicas M^+ y X^-. De acuerdo con las reacciones del electrodo se observa que N_{M^+}, el valor de la densidad de flujo molar de M^+, es proporcional a la densidad de corriente en la célula, y que las densidades de flujo de X^- y del agua son cero. Por otra parte, las concentraciones molares locales de M^+ y X^- han de ser siempre iguales debido a la necesidad de neutralidad eléctrica. Finalmente, puesto que la solución es diluida, podemos considerar que las densidades de flujo N_i y $J_i^\star$ son iguales.

De acuerdo con esto se puede escribir

$$I = N_{M^+} \doteq J_{M^+}^{\star(x)} + J_{M^+}^{\star(y)} \qquad (18.5\text{-}19)$$

$$0 = N_{X^-} \doteq J_{X^-}^{\star(x)} + J_{X^-}^{\star(y)} \qquad (18.5\text{-}20)$$

Siendo Z la densidad de corriente en la solución, expresada en equivalentes por unidad de área y tiempo. Para expresar las Ecs. 18.5-19 y 20 en función de los coeficientes de transporte, hay que hacer algunas otras suposiciones. Supongamos en primer lugar que los iones M^+ y X^- están en tan pequeña concentración que no se produce un efecto apreciable entre ellos. Consideremos también que cada ión difunde como si se tratase de un sistema binario en el que el agua es el otro componente. Supongamos, finalmente, que los coefi-

[3] Para los detalles de esta integración véase el problema 18.1. Una deducción de la Ec. 18.5 — 17 mediante consideraciones termodinámicas puede verse en E. A. GUGGENHEIM, *Thermodynamics*, North Holland Publishing Co., Amsterdam (1950), pp. 356360. Obsérvese, sin embargo, que el resultado de GUGGENHEIM es incorrecto debido a un error algebraico en la tercera línea de la Ec. 11.10-3.

cientes de actividad de los iones son iguales a la unidad. Por consiguiente, $d\bar{G}_i = RTd\ln x_i$, y para los iones $g_{iz} = (\epsilon_i/m_i)(-d\phi/dz)$. Siendo ϕ el potencial electrostático local, ϵ_i la

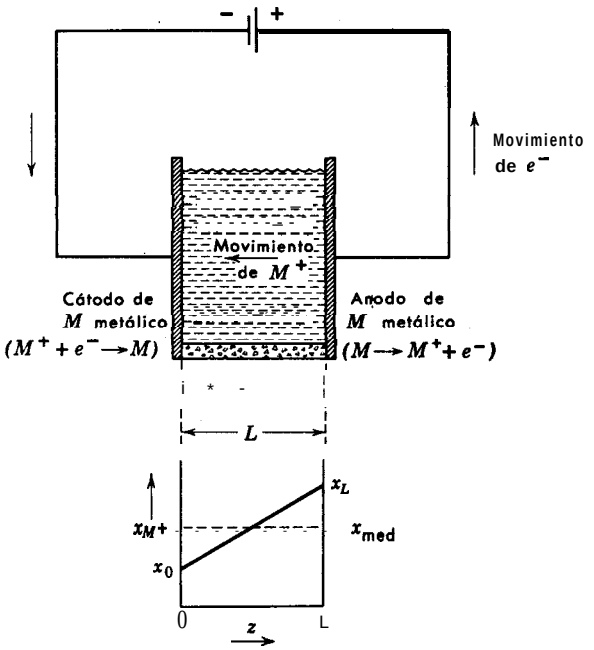


Fig. 18. 5-4. Polarización de concentración.

carga iónica, y m_i la masa iónica. Por consiguiente, podemos escribir la Ec. 18.4-15 para la difusión de la especie i a través del agua (w), de la siguiente forma

$$J_{iz}^{*} = -c\mathscr{D}_{iw}\left(\frac{dx_i}{dz} + \frac{x_i\epsilon_i}{\kappa T}\frac{d\phi}{dz}\right) \tag{18.5-21}$$

Substituyendo la Ec. 18.5-21 en las Ecs. 18.5-19 y 20, se obtiene

$$I_z = -c\mathscr{D}_{M^+w}\left(\frac{dx_{M^+}}{dz} + \frac{x_{M^+}|\epsilon_i|}{\kappa T}\frac{d\phi}{dz}\right) \tag{18.5-22}$$

$$0 = -c\mathscr{D}_{X^-w}\left(\frac{dx_{X^-}}{dz} - \frac{x_{X^-}|\epsilon_i|}{\kappa T}\frac{d\phi}{dz}\right) \tag{18.5-23}$$

Teniendo en cuenta que las fracciones molares de los dos iones son iguales, se. puede eliminar el gradiente de potencial entre las dos ecuaciones:

$$I_z = -2c\mathscr{D}_{M^+w}\frac{dx_{M^+}}{dz} \tag{18.5-24}$$

Como para disoluciones isotérmicas diluidas $c\mathscr{D}_{M^+w}$ es, aproximadamente, constante, se puede integrar la Ec. 18.5-24 para obtener

$$\frac{x_{M^+} - x_0}{l} = -\frac{I_z}{2c\mathscr{D}_{M^+w}} \tag{18.5-25}$$

siendo x_0 la fracción molar de M^+ en el cátodo.

Se encuentra por lo tanto que el gradiente de concentración en la célula es lineal. La densidad máxima de corriente se alcanza cuando la concentración de sal en el cátodo es cero; 0 sea

$$I_{\text{máx}} = \frac{4c\mathscr{D}_{M^+w}x_{\text{med}}}{L} \tag{18.5-26}$$

Las Ecs. 18.5-25 y 26 proporcionan una buena descripción cualitativa de la «polarización de concentración», si bien su aplicación cuantitativa se limita a sistemas muy diluidos. Por ejemplo, la Ec. 18.5-26 indica que en un baño de galvanoplastia existe un límite de la velocidad a la que puede depositarse el metal. De igual forma, la difusión del electrólito en una pila limita la velocidad a la que se puede sacar corriente.

Ejemplo 18.5-5. Difusión ordinaria en un sistema de tres componentes con reacción química heterogénea[4]

Un gas *A*, difunde en estado estacionario en la dirección *z* a través de una película estancada de *B* hacia una superficie catalítica (véase Fig. 18.5 —5), en la que tiene lugar la siguiente reacción irreversible :

$$nA \rightarrow A_n \tag{18.5-27}$$

En la superficie catalítica, *A* se elimina con una velocidad que puede expresarse mediante la ecuación

$$N_A = k_h'' x_A^h \qquad \text{para } z = \delta \tag{18.5-28}$$

siendo k_h'' y h constantes que se suponen conocidas. Desarrollar una expresibn para la velocidad de reacción en función de la composición del gas en $z = 0$. Supóngase que la presión y la temperatura son constantes y que el gas se comporta como ideal.

Solución. De acuerdo con la estequiometría del problema, es necesario que $N_{Az} = -nN_{A_n z}$. Las ecuaciones de Stefan-Maxwell para *A y B son*

$$\frac{1}{\nu_{A_nB}}\frac{dx_A}{d\zeta} = r_{A_n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_A + (r_{A_n} - r_B)x_B - r_{A_n} \tag{18.5-29}$$

$$\frac{1}{\nu_{A_nB}}\frac{dx_B}{d\zeta} = \left(r_B - \frac{1}{n}\right)x_B \tag{18.5-30}$$

---

4 H. W. Hsu y R. B. BIRD, A. *I.* Ch. *E. Journal* (1960).

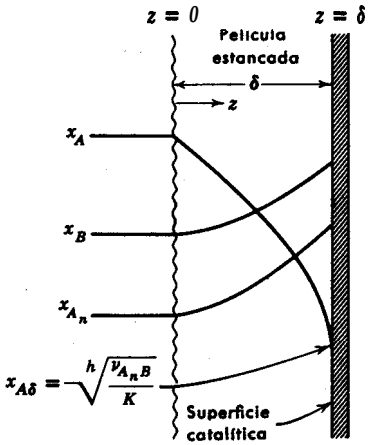


Fig. 18.5–5. Difusión de A a través de *B* estancado para formar A_n en una superficie catalítica.

siendo $\nu_{A_nB} = N_{Az}\delta/c\mathscr{D}_{A_nB}$, $r_B = \mathscr{D}_{A_nB}/\mathscr{D}_{AB}$, $r_{A_n} = \mathscr{D}_{A_nB}/\mathscr{D}_{AA_n}$ y $\zeta = z/\delta$. Estas ecuaciones pueden integrarse con las condiciones límite de que $x_A = x_{A0}$ y $x_B = x_{B0}$ para $\zeta = 0$. Integrando primeramente la Ec. 18.5-30, se obtiene

$$x_B = x_{B0} \exp(R\nu_{A_nB}\zeta) \tag{18.5-31}$$

siendo $R = r_B - (1/n)$. Substituyendo esta expresión en la Ec. 18.5 –29 e integrando la ecuación diferencial lineal de primer orden que resulta, se llega a

$$x_A = (x_{A0} - N^{-1} + M^{-1}x_{B0}) \exp(Nr_{A_n}\nu_{A_nB}\zeta) + N^{-1} - M^{-1}x_{B0} \exp(R\nu_{A_nB}\zeta) \tag{18.5-32}$$

En esta expresión, $N = (1 - n^{-1})$ y $M = 1 - n^{-1}[(1 - r_{A_n})/(r_B - r_{A_n})]$. Finalmente, utilizando las Ecs. 18.5 -28 y 32 se obtiene la relación deseadas para la velocidad adimensional de reacción v_{A_nB}, que corresponde a la siguiente ecuación:

$$\sqrt[h]{\frac{\nu_{A_nB}}{K}} = (x_{A0} - N^{-1} + M^{-1}x_{B0}) \exp(Nr_{A_n}\nu_{A_nB}) + N^{-1} - M^{-1}x_{B0} \exp(R\nu_{A_nB}) \tag{18.5-33}$$

en la que $K = k_h''\,\delta/c\mathscr{D}_{A_nB}$. Es decir, que la Ec. 18.5-33 expresa ν_{A_nB} como una función implícita de K, n, r_B, r_{A_n}, x_{A0} y x_{B0}.

§ 18.6 ANÁLISIS DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE VARIACIÓN PARA UNA MEZCLA ISOTÉRMICA DE DOS FLUIDOS

En lo que va de este capítulo hemos considerado las ecuaciones de variación para una mezcla de fluidos, y en § 18.5 hemos visto algunos ejemplos sobre la forma

[5] Para los casos especiales, $n = 1$, $r_{A_n} = r_B$ y $(nr_B - 1) = r_{A_n}(n - 1)$, véase Hsu y BIRD, *op. cit.*

de plantear y resolver problemas de difusión. A continuación vamos a considerar el análisis dimensional de las ecuaciones de variación para una mezcla **isotérmica** de dos fluidos cuya viscosidad μ y difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ son constantes. Supondremos, además, que el intervalo de composición es suficientemente pequeño, de forma que tanto la densidad ρ como la densidad molar c son esencialmente constantes. Teniendo en cuenta estas restricciones, escribimos las ecuaciones de variación en esta forma

(continuidad) $$(\nabla \cdot v) = 0 \qquad (18.6-1)$$

(continuidad de A) $$\frac{Dx_A}{Dt} = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 x_A \qquad (18.6\text{-}2)$$

(movimiento) $$\rho \frac{Dv}{Dt} = \mu\nabla^2 v + \begin{cases} -\nabla p + \rho g & \text{libre} \\ -\rho\zeta g(x_A - x_{A0}) & \text{forzada} \end{cases} \qquad (18.6\text{-}3)$$

siendo x_{A0} una cierta **concentración** de **referencia.** La **Ec.** 18.6-2 se obtiene a partir de la **Ec.18.1—17 cuando** $R_A = 0$, y p, c, y $\mathscr{D}_{AB}$ son constantes. La **Ec.** 18.6-3 corresponde a la ecuación de movimiento expresada para considerar los términos de convección libre o de convección forzada.

Vamos a considerar en primer lugar la ***convección forzada,*** para lo cual es conveniente **definir** las variables reducidas de igual forma que en § 10.6:

$$v^* = \frac{v}{V} = \text{velocidad adimensional} \qquad (18.6\text{-}4)$$

$$p^* = \frac{p - p_0}{\rho V^2} = \text{presión adimensional} \qquad (18.6\text{-}5)$$

$$t^* = \frac{Vt}{D} = \text{tiempo adimensional} \qquad (18.6\text{-}6)$$

$$x_A^* = \frac{x_A - x_{A0}}{x_{A1} - x_{A0}} = \text{concentración adimensional} \qquad (18.6\text{-}7)$$

en las que V, D y $x_{A1} - x_{A0}$, son, respectivamente, una velocidad, una dimensión **lineal,** y una diferencia de concentración, características del sistema. Las ecuaciones de variación pueden ponerse ya en forma adimensional multiplicando la **Ec.18.6—** 1 por D/V, la **Ec.** 18.6-2 por $D/V(x_{A1} - x_{A0})$, y la **Ec.** 18.6-3 por $D/\rho V^2$:

(continuidad) $$(\nabla^* \cdot v^*) = 0 \qquad (18.6\text{-}8)$$

(continuidad de A) $$\frac{Dx_A^*}{Dt^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}\ \mathrm{Sc}}\nabla^{*2} x_A^* \qquad (18.6\text{-}9)$$

(movimiento) $$\frac{Dv^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^{*2} v^* + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\frac{g}{g} \qquad (18.6\text{-}10)$$

Los grupos adimensionales que intervienen son el número de Froude, Fr = V^2/gD, el número de Reynolds, Re = $DV\rho/\mu$, y el número de Schmidt, Sc = $\mu/\rho\mathscr{D}_{AB} = \nu/\mathscr{D}_{AB}$. Para la transferencia isotérmica de materia el número de Schmidt juega un papel análogo al del número de Prandtl en la transmisión de calor.

Para la *convección libre* se procede de forma análoga que en § 10.6. Se define una velocidad y un tiempo reducidos como en las Ecs. 10.6-14 y 15, y multiplicando la Ec. 18.6-1 por $D^2\rho/\mu$, la Ec. 18.6-2 por $\rho D^2/\mu(x_{A1} - x_{A0})$, y la Ec. 18.6-3 por $D^3\rho/\mu^2$, se obtienen las ecuaciones de variación expresadas en la siguiente forma :

(continuidad) $$(\nabla^* \cdot v^{**}) = 0 \tag{18.6-11}$$

(continuidad de A) $$\frac{Dx_A^*}{Dt^{**}} = \frac{1}{\mathrm{Sc}} \nabla^{*2} x_A^* \tag{18.6-12}$$

(movimiento) $$\frac{Dv^{**}}{Dt^{**}} = \nabla^{*2} v^{**} - x_A^* \mathrm{Gr}_{AB} \frac{g}{g} \tag{18.6-13}$$

siendo $\mathrm{Gr}_{AB} = \rho^2 \zeta g D^3 (x_{A1} - x_{A0})/\mu^2$ el numero de Grashof para la transferencia de materia. Como se ve, Gr_{AB} difiere de Gr solamente en que en el Gr_{AB} interviene $\zeta(x_{A1} - x_{A0})$ en vez de $\beta(T_1 - T_0)$ en el Gr.

En el Capítulo 21 se utilizan los grupos Sc y Gr_{AB} en la correlación de los coeficientes de transferencia de materia. Obsérvese que el tratamiento anterior es completamente análogo al que se ha seguido para la transmisión de calor, y que, a excepción de la función de disipación, las correspondientes ecuaciones de las dos secciones son las mismas. Por consiguiente, es de esperar que existan numerosas analogías íntimas entre transferencia de calor y materia. Sin embargo, la amplitud y limitaciones de estas analogías no pueden conocerse totalmente sin examinar las condiciones límite de v, T y x_A. Será muy provechoso para el estudiante que trate de encontrar estas analogías (así como otras existentes entre estos dos procesos de transferencia) en los restantes capítulos del libro.

Ejemplo 18.6— 1. Mezcla de fluidos miscibles

Desarrollar, por los métodos del análisis dimensional, la forma general de una correlación del tiempo que se requiere para mezclar dos fluidos miscibles en un tanque agitado. Supongase que los dos fluidos y sus mezclas poseen esencialmente las mismas propiedades físicas.

Solución. Supondremos que el logro de «iguales grados de mezcla» en dos operaciones cualesquiera indica que se alcanza el mismo modelo de concentración reducida en cada una de ellas; es decir, que el perfil de concentración de un componente cualquiera A

$$x_A = x_A(r^*, \theta, z^*)$$

es el mismo. En esta expresión, r^* y z^* son las variables reducidas de posición, r/D y z/D, respectivamente, siendo D el diámetro del agitador. Es conveniente definir también el tiempo, velocidad y presión reducidos, como tN, v/ND y $p/\rho N^2D^2$, respectivamente, siendo N la velocidad de rotación del agitador, en revoluciones por unidad de tiempo, yp la densidad del fluido.

De acuerdo con las Ecs. 18.6—9 y 10 se observa que $x_A(r^*, \theta, z^*)$ depende de t^*, Re, Sc, Fr, de la geometría, y de las condiciones iniciales y límite. Siendo Re $= D^2N\rho/\mu$, $Sc = \mu/\rho\mathscr{D}_{AB}$, y Fr $= DN^2/g$. De entre las condiciones iniciales son importantes las cantidades relativas de los dos fluidos, la forma en que se han introducido en el tanque, y los modelos de flujo al iniciarse la mezcla.

Frecuentemente puede reducirse con posterioridad el número de grupos adimensionales independientes. Tal es el caso, por ejemplo, si experimentalmente se ha observado que no se forman vórtices de importancia cuando el tanque está provisto de placas deflectoras[1]; es decir, que la superficie del fluido es realmente plana. En estas condiciones, o en ausencia de una superficie libre del fluido, las fuerzas gravitacionales, y por lo tanto el número de Froude, carecen de importancia. Para valores elevados del número de Reynolds, tanto Re como Sc pueden despreciarse también[2], de forma que $x_A(r^*, \theta, z^*)$ depende solamente de t^*; es decir, que el tiempo reducido de mezcla es constante para un cierto grado de mezcla. En otras palabras, que el número de revoluciones del agitador que son necesarias para producir un determinado grado de mezcla es fijo. Para la mayor parte de los agitadores de uso más frecuente, este caso se presenta para Re mayor que 10^4 a 2 $\times$ 10^4. Para menores valores de Re, el número de Reynolds ejerce un marcado efecto. Este comportamiento ha sido comprobado por numerosos investigadores.[3]

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Discútase la posible aplicación de las ecuaciones de variación desarrolladas en los capítulos 3 y 10 para describir sistemas de más de una especie química.

---

1 Un eficaz sistema de placas deflectoras frecuentemente utilizado en tanques cilíndricos verticales con agitadores dispuestos radialmente, consiste en montar cuatro placas igualmente espaciadas situadas sobre la superficie interior y dirigidas hacia el eje del tanque, ocupando por lo menos una quinta parte del radio.

2 Esta independencia del tiempo de mezcla con respecto al número de Reynolds puede preverse intuitivamente teniendo en cuenta que para elevados valores de Re el termino $(\nabla^{*2}v^*)/\mathrm{Re}$ de la Ec. 18.6— 10 es pequeño en comparación con los términos de aceleración. Sin embargo, estos argumentos de tipo intuitivo pueden conducir a error, y el efecto del Re es siempre importante en la inmediata proximidad de superficies sólidas. En este caso el efecto de mezcla que tiene lugar en las inmediaciones de las superficies sólidas es pequeño y se puede despreciar. Para una discusión más completa del efecto del número de Reynolds, véase H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, Mc Graw-Hill, Nueva York (1955), capitulo 4.

La independencia del tiempo de mezcla respecto del número de Schmidt puede apreciarse mejor a partir de la ecuación de continuidad de tiempo ajustado del capítulo 20. A elevados números de Reynolds la densidad de flujo turbulento de materia es mucho mayor que la debida a la difusión molecular, excepto en las inmediaciones de las superficies sólidas.

3 E. A. FOX y V. E. GEX, *A. I. Ch. E. Journal*, 2, 539-544 (1956); H. KRAMERS, G. M. BAARS y W. H. KNOLL, *Chem. Eng. Sri.*, 2, 35-42 (1955); J. G. VAN DE VUSSE, *Chem. Eng. Sci.*, 4, 178-200, 209-220 (1955).

2. Cuando la concentración del componente A de una mezcla binaria se hace muy pequeña, ρ y c son, prácticamente, constantes; por consiguiente, ambas Ecs. 18.1-17 y 19 son válidas. La comparación de estas dos ecuaciones sugiere que $v = v^*$. ¿Es cierto esto?

3. ¿Cuándo (V. v^*) es igual a cero?

4. ¿Es adecuada la definición de q del Capítulo 8 para describir la transferencia de calor y materia en sistemas de interdifusión de pares de isótopos? ¿De isómeros geométricos ? ¿De isómeros ópticos?

5. ¿Qué significa el término $\Sigma_i \bar{H}_i J_i$?

6. ¿Cuáles son la primera y segunda leyes de Fìck? ¿En qué circunstancias son aplicables?

7. Demostrar que la difusión forzada no puede tener lugar cuando actúa sobre todas las especies la misma fuerza externa por unidad de masa.

8. Definir el coeficiente de Soret. ¿Cuáles son sus unidades?

9. ¿Por qué el tubo de conexión de la Fig. 18.5-2 tiene que ser de pequeño diámetro? ¿Es necesario que esté aislado?

10. La relación de volúmenes *específicos* parciales del $PbNO_3$ y el agua es mayor que la relación correspondiente para la albúmina de huevo y el agua. Sin embargo, es mas difícil de separar por ultracentrifugación el primer sistema que el segundo. ¿Por que?

ll. ¿Qué le sucede al agua en el ejemplo 18.5 —4?

12. En los sistemas de difusión gaseosa el aire se considera generalmente como un solo componente. ¿Es esto racional?

13. Un gas i difunde a través de una mezcla de isótopos pesados. ¿Cuándo puede considerarse este sistema como binario?

14. Comparar los efectos de la transferencia de materia sobre la transmisión simultánea de calor, con los de la transmisión de calor sobre la transferencia simultánea de materia.

15. Comprobar las $\mathscr{D}_{AB}$ y D_{ij} utilizadas en este capítulo.

16. ¿Cuáles son los números análogos al Grashof y Prandtl para la transferencia de materia?

17. ¿En qué aspectos son análogas las transmisiones de calor y materia y en qué otros difieren?

18. ¿Por qué el segundo miembro de la Ec. 18.5-9 es mayor que la unidad?

19. ¿Hasta qué punto difieren la difusión forrada y la de presión?

PROBLEMAS

18.A$_1$ Deshumidificación de aire

Consideremos un sistema como el representado en la Fig. 18.5-1, en el que el vapor es H_2O y el gas estancado es aire. Supónganse las siguientes condiciones (que son representativas en acondicionamiento de aire): (i) para $z = 6$, $T = 26{,}7\ ^\circ C$, $y\ x_{H_2O} = 0{,}018$; (ii) para $z = 0$, $T = 10.0\ ^\circ C$.

a. Calcular la relación

$$\frac{-(N_{A,z}\bar{C}_{pA}/k)\delta}{1 - \exp{(N_{A,z}\bar{C}_{pA}/k)\delta}} \qquad (18.A\text{–}1)$$

de la Ec. 18.5-9, para $p = 1$ atm.

b. Comparar $q^{(c)}$ y $q^{(d)}$ para $z = 0$. ¿Cuál es el significado de su respuesta?

Respuesta: a. 1,004

18.B$_1$ Difusión térmica

a. Estimar la separación de H_2 y D_2 que en estado estacionario se consigue en el sencillo aparato de difusión térmica que se indica en la Fig. 18.5 -2 bajo las siguientes condiciones: T_1 es 200 °K, T_2 es 600 °K, la fracción molar de deuterio en la carga es 0,10, y la k_T media efectiva es 0,0166.

6. ¿A qué temperatura ha debido de evaluarse esta k_T media?

Respuestas: *a.* x_{H_2} es 0,0183 superior en el recipiente más frío.
b. 330 °K.

18.C_1 Ultracentrifugación de proteínas

Estimar el perfil de concentración en estado estacionario cuando una solución típica de albúmina se somete a un campo centrífugo de 50.000 veces la aceleración de la gravedad, en las siguientes condiciones:

Longitud del tubo = 1,0 cm.
Peso molecular de la albúmina = 45.000
Densidad aparente de la albúmina en solución = $M_A/\bar{V}_A$ = 1,34 g/cm³
Fracción molar de la albúmina en z = 0, x_{A0} = 5 x 10^{-6}
Densidad aparente del agua en la solución = 1,00 g/cm³
Temperatura = 23,9° C

Respuesta: $x_A = 5 \times 10^{-6} \exp(-22{,}7z)$; z está en cm.

18.D_1 Polarización de electrodo

La difusividad efectiva de Ag+ en soluciones acuosas diluidas a 20 °C es, aproximadamente, 10^{-5} cm² seg^{-1}. Estimar la densidad límite de corriente en amperios/cm² para el aparato que se indica en la Fig. 18.5 -4, si la solución es decinormal, cuando no se aplica ningún voltaje y el espesor de la solución es 0,10 cm.

Respuesta: $3{,}86 \times 10^{-3}$ amperios/cm²

18.E_1 Difusividades binarias efectivas en una mezcla gaseosa de varios componentes

Calcular $c\mathscr{D}_{im}$ para cada una de las especies en la hidrogenación catalítica superficial en fase gaseosa de benceno, suponiendo que sólo tiene lugar la siguiente reacción:

$$C_6H_6 + 3H_2 \rightarrow \text{ciclo-}C_6H_{12} \qquad (18.E-1)$$

El cálculo se realiza para un punto del reactor, próximo a la superficie catalítica, donde las condiciones son: T = 500° K, p = 10 atm, $x_1(C_6H_6)$ = 0,10, $x_2(H_2)$ = 0,80, $x_3(C_6H_{12})$ = 0,05, $x_4(CH_4)$ = 0,05. El CH_4 no reacciona en este sistema,

Las $c\mathscr{D}_{ij}$ binarias, expresadas en g-mol cm-1 seg^{-1}, son

$$c\mathscr{D}_{12} = c\mathscr{D}_{21} = 24{,}2 \times 10^{-6}$$
$$c\mathscr{D}_{13} = c\mathscr{D}_{31} = 1{,}95 \times 10^{-6}$$
$$c\mathscr{D}_{14} = c\mathscr{D}_{41} = 6{,}21 \times 10^{-6}$$
$$c\mathscr{D}_{23} = c\mathscr{D}_{32} = 20{,}7 \times 10^{-6}$$
$$c\mathscr{D}_{24} = c\mathscr{D}_{42} = 41{,}3 \times 10^{-6}$$
$$c\mathscr{D}_{34} = \text{ca,,} = 5.45 \times 10^{-6}$$

Respuesta: Componentes: C_6H_6 H_2 C_6H_{12} CH_4

$c\mathscr{D}_{im}$ g-mol cm-t seg^{-1} x 10^6: 6,63 20,8 8,71 60

18.F_2 Planteamiento de problemas de difusión

Demostrar cómo se pueden utilizar las ecuaciones generales del Capítulo 18 para plantear los siguientes problemas del Capítulo 17: (i) 17.D; (ii) 17.E; (iii) 17.F; (iv) 17.G; (v) 17.H; (vi) 17.J; (vii) 17.K; (viii) 17.L.

18.G_2 Otras formas de la ecuación de continuidad

Demostrar que la Ec. 18.1-6 puede expresarse de estas dos formas:

$$a.\ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\mathrm{V} \cdot \rho_A v) + (\nabla \cdot j_A) = r_A \qquad (18.G-1)$$

$$b.\ \frac{\partial c_A}{\partial t} + (\mathrm{V} \cdot c_A v^*) + (\mathrm{V} \cdot J_A^*) = R_A \qquad (18.G-2)$$

Discútase el significado físico de cada uno de los términos de estas ecuaciones.

18.H_2 Simplificación de las expresiones de la densidad de flujo de materia en sistemas de varios componentes para su utilización en un sistema binario

Demostrar que las Ecs. 18.4-7 a ll pueden combinarse con el fin de obtener la Ec. 18.4-14 para el caso especial de una mezcla binaria. (Probablemente será conveniente tener en cuenta la relación $j_A + j_B = 0$.)

18.1, Difusión de presión

a. Combinar la Ec. 18.5 – 17 con la ecuación análoga para la especie B, con el fin de obtener

$$\frac{g\Omega}{RT}(M_B \nabla_A - M_A \nabla_B)\, dz = -\nabla_A \frac{dx_B}{x_B} + \nabla_B \frac{dx_A}{x_A} \qquad (18.I-1)$$

Integrar esta expresión para obtener la Ec. 18.5–18.

b. Ampliar el ejemplo 18.5 -3 para el caso de que L no pueda considerarse pequeño con respecto a R_0. Obsérvese que en este caso $dp/dr = \rho\Omega^2 r$, siendo r la distancia medida desde el eje de rotación de la centrífuga.

c. Simplificar la Ec. 18.5 -18 para el caso de que la fracción molar de un componente sea despreciable. (Véase el Problema 18.C.)

18.J_2 Movilidad

a. Estimar la fuerza total necesaria para mover un equivalente de iones plata a través de una solución con una velocidad de 1 cm seg^{-1} a 25 °C, si la difusividad de la plata en la solución es de 10^{-5} cm* seg^{-1}.

b. Es evidente que para mover especies no cargadas se requieren fuerzas del mismo orden. ¿De dónde proviene la fuerza motriz para estos materiales en la difusión ordinaria?

Respuesta: *a.* 2,53 x 10^9 kilogramos fuerza.

18.K_3 Difusión binaria y ternaria en aire

En la evaluación de las propiedades de transporte el aire se considera convencionalmente como un solo componente. Así, los datos de viscosidad del aire a baja temperatura se han ajustado perfectamente utilizando la fórmula de la viscosidad de gases monoatómicos (Ec. 1.4–18), con los siguientes parámetros de Lennard-Jones:

$$\sigma = 3{,}617\ \text{Å}, \quad \frac{\epsilon}{K} = 97{,}0\ ^\circ\text{K}$$

mientras que para el O_2

$$\sigma = 3{,}433\ \text{Å}, \quad \frac{\epsilon}{K} = 113{,}0\ ^\circ\text{K}$$

y para el N_2

$$\sigma = 3{,}681\ \text{Å}, \quad \frac{\epsilon}{K} = 91{,}5\ ^\circ\text{K}$$

a. Calcular $c\mathscr{D}_{AB}$ para la difusión de metano en aire a 300 °K, considerado como un único componente cuyos parámetros de Lennard-Jones son los que se han indicado anteriormente.

b. Calcular $c\mathscr{D}_{Am}$ para la difusión de metano en aire a 300 °K, considerando el aire como una mezcla de 21 moles por ciento de oxígeno y 79 moles por ciento de nitrógeno. Admítase que el nitrógeno y el oxígeno se mueven con la misma velocidad.

Obsérvese que los dos métodos concuerdan satisfactoriamente, como generalmente es de esperar. En los casos en que las concentraciones relativas o las densidades de flujo de nitrógeno y oxígeno varían notablemente deben tratarse como comp nentes separados.

18.L_3 Diiusividad en una solución acuosa de una sola sal

Cuando una sal única $(M^{p+})_a(X^{a-})_p$ difunde a través de agua en ausencia de corriente eléctrica, las densidades de flujo molares J_i^* de las dos especies iónicas están relacionadas entre si debido al requerimiento de neutralidad eléctrica. Demostrar, mediante un procedimiento análogo al utilizado en el ejemplo 18.5−4, que, para la disolución diluida, puede utilizarse este requerimiento para hallar la siguiente relación entre la difusividad de la sal en agua, $\mathscr{D}_{sw}$, y las difusividades del anión y del catión, $\mathscr{D}_{Xw}$ y $\mathscr{D}_{Mw}$, respectivamente:

$$\mathscr{D}_{sw} = \frac{\mathscr{D}_{Mw}\mathscr{D}_{Xw}(a+p)}{p\mathscr{D}_{Mw} + a\mathscr{D}_{Xw}} \qquad (18.L\text{–}1)$$

Este resultado fue obtenido por primera vez en 1888 por Nerst.[1]

18.M_3 La ecuación de continuidad de Bedingfield-Drew

Demostrar cómo se puede llegar a la Ec. 18.1−19*a* a partir de la Ec. 18.1-19.
Nora: La solución es bastante larga.

18.N_3 Condensación de una mezcla de vapores[2]

Una mezcla equimoiar de vapores de cloroformo (C) y benceno (B), a 1 atm, condensa sobre una superficie fria. (Véase Fig. 18.N.) La temperatura T_c de la superficie fría puede variar. La especie más volátil (C) se acumula en las proximidades de la superficie fría, de forma que el proceso de condensación se retarda debido a la presencia de una «película» de gas, cuya temperatura y composición dependen de la distancia z medida desde la superficie del líquido. El espesor δ de la película es 0,1 mm, y el coeficiente de transmisión de calor h de la película de condensado es 975 kcal $hr^{-1}\,m^{-2}\,°C^{-1}$. La relación de benceno a cloroformo en el condensado puede considerarse igual a la relación de velocidades de condensación. Pueden utilizarse los siguientes datos:

$\mathscr{D}_{BC} = 0{,}050\ cm^2\,seg^{-1}$; $\bar{C}_{pC} = 16{,}5$ kcal/kg-mol °C. $\bar{C}_{pB} = 22{,}8$ kcal/kg-mol °C.

Los datos de equilibrio líquido-vapor para este sistema a 1 atm son:

x_C (vapor)	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0.90	1,00
x_C (líquido)	0	0,08	0.15	0,22	0,29	0,36	0,44	0,54	0,66	0,79	1,00
Temperatura de saturación °C.	80,6	79.8	79,0	78,2	77,3	76,4	75,3	74,0	71.9	68,9	61,4

El calor molar de vaporización $\tilde{\lambda}_{mezc}$ y la conductividad calorífica k_{mezc} de las mezclas cloroformo-benceno pueden considerarse constantes e iguales a 7.110 kcal/kg-mol y 0,010 kcal/hr m °C, respectivamente. La influencia de la temperatura sobre las propiedades físicas puede despreciarse.

---

1 W. NERNST, Z. *physik. Chem., 2,* 613-637 (1888).

2 Para una discusión acerca de la condensación de mezclas de vapores, véase A. P. COLBURN y T. B. DREW, *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs., 33,* 197-212 (1937).

a. Demostrar que la velocidad total molar de condensación es

$$-(N_{Bz} + N_{Cz}) = \frac{c\mathscr{D}_{BC}}{\delta} \ln \left\{ \frac{x_{B0} - x_B^{(i)}}{x_{B\delta} - x_B^{(i)}} \right\} = \frac{c\mathscr{D}_{BC}}{\delta} \ln \left\{ \frac{x_{C0} - x_C^{(i)}}{x_{C\delta} - x_C^{(i)}} \right\} \qquad (18.N\text{-}1)$$

en la que los subíndices 0 y δ se refieren a las condiciones para $z = 0$ y $z = \delta$, y $x_A^{(i)}$ es la fracción molar del-componente *A en* el condensado.

b. Demostrar que la densidad de flujo de energía a través de la *película de condensado* situada en $z = 0$, es

$$-q_z|_{z=0} = (T_\delta - T_0)\left(\frac{k_{mezc}}{\delta}\right)\left(\frac{\beta}{1 - e^{-\beta}}\right) - \tilde{\lambda}_{mezc}(N_{Bz} + N_{Cz}) \qquad (18.N\text{-}2)$$

siendo $\beta = +(N_{Bz} + N_{Cz})\tilde{C}_{p,\,mezc}\,\delta\,/k_{mezc}$, y $\tilde{C}_{p,\,mezc} = x_B^{(i)}\tilde{C}_{pB} + x_C^{(i)}\tilde{C}_{pC}$.

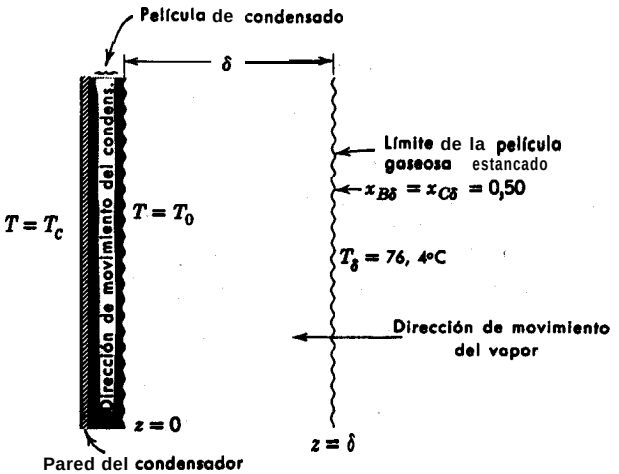


Fig. 18.N. Condensación de una mezcla de vapores.

c. Estimar las velocidades de condensación y la composición del condensado, para diversas temperaturas de la pared del condensador. Téngase en cuenta que el calculo puede simplificarse eligiendo previamente una composición del condensado. (i) Esta elección permite calcular directamente $N_{Bz} + N_{Cz}$ a partir del resultado del apartado *(a)*. (ii) La densidad de flujo de energía a través de la película de condensado puede calcularse entonces a partir del resultado del apartado *(b)*. (iii). La temperatura necesaria de la pared puede estimarse luego mediante un balance de energía a la película de condensado. Al aplicar este balance de energía, supóngase que todo el transporte de energía a través de la película de condensado tiene lugar de acuerdo con la expresión $q_z = h(T_c - T_0)$.

Ejemplo de respuesta: Si T_c es 30 °C, la velocidad de condensación será 6,15 kg-mol $hr^{-1}\,m^{-2}$, y el condensado contendrá 44 moles por ciento de cloroformo.

d. ¿Cuándo, si es que ocurre alguna vez, estará el condensado en equilibrio con el vapor saturado ?

e. ¿Cuál es la temperatura mínima (aproximada) que puede mantenerse en la interfase condensado-vapor, y cual será la composición (exacta) del condensado en estas condiciones limite? Explíquese el significado de las respuestas.

18.O_3 Mezcles de **evaporación constante**

Una mezcla de tolueno y etanol se esta evaporando a **través** de una película estancada **unidimensional** de nitrógeno, de espesor 6, hacia una corriente de **nitrógeno** puro. Todo el sistema se mantiene a **15,6 °C** y presión constante. La relación de las difusividades binarias del tolueno y el etanol en nitrógeno $(\mathscr{D}_{TN_2}/\mathscr{D}_{EN_2})$ es, aproximadamente, igual a 0,695, y los datos de equilibrio **líquido**-vapor del sistema tolueno-etanol a **15,6 °C,** son:

Fracción molar de tolueno en el líquido	**0,096**	**0,155**	**0,233**	**0,274**	**0,375**
Fracción molar de tolueno en el vapor	0,147	0,198	**0,242**	**0,256**	**0,277**
Presión total, mm Hg	**388**	**397**	**397**	**395**	**390**

Se desea determinar la composición de la mezcla de **evaporación** constante de **tolueno** y **etanol** (es decir, la composición del líquido para la cual la relación de las velocidades de **evaporación** es igual a la relación de concentraciones en el liquido) para diversas condiciones. Admítase el comportamiento **del** gas ideal.

a. Demostrar, a partir de la estequiometría de este problema, que la **relación** de tolueno a etanol en una mezcla de evaporación constante viene dada por

$$\frac{\mathscr{D}_{Em}}{\mathscr{D}_{Tm}} = \frac{\ln\left[1 - \left(1 + \frac{x_E}{x_T}\right) y_T^*\right]}{\ln\left[1 - \left(1 + \frac{x_T}{x_E}\right) y_E^*\right]} \tag{18.0-1}$$

siendo $\mathscr{D}_{Em}$ y $\mathscr{D}_{Tm}$ las difusividades binarias efectivas del etanol y del tolueno en la mezcla, e y_E^* e y_T^* las fracciones molares de etanol y tolueno en el vapor de la interfase. **(Téngase** en **cuenta** que y_T^* e y_E^* son funciones de la presión total, de la temperatura y de la composición del líquido.)

b. Demostrar que es razonable substituir las difusividades binarias $\mathscr{D}_{EN_2}$ y $\mathscr{D}_{TN_2}$ **por** $\mathscr{D}_{Em}$ **y** $\mathscr{D}_{Tm}$.

c. Utilizando los resultados de los apartados (a) y **(*b*),** estimar la composición de las **mezclas** de evaporación constante para la presión total de 396 mm **Hg,** 760 mm Hg, y para presión externa muy elevada.

Respuestas: a. 25 por ciento de tolueno a 3% mm Hg
b. 17 por ciento de tolueno a una **atmósfera**[3]
c. 13 por ciento de tolueno a **presión** elevada

18.P_3 Polarización de concentración ea presencia de un electrólito indiferente

Supóngase que el aparato descrito en el ejemplo 18.5 -4 contiene $A_g^+NO_3^-$ con una **concentración** media 10^{-6} Ny $K^+NO_3^-$ con una concentración **media 0,1 *N.*** Se comunica ala **célula** un **voltaje** que es exactamente el necesario para dar lugar a que la **concentración** de **ión** plata en el **cátodo**

[3] Robinson, A. W. **Bennet,** y W. A. Wright, ***J. Phys. Chem. 36, 658*** (1932); W. A. Wright, J. Phys. Chem., 37, 233 **(1933),** obtuvieron un valor experimental correspondiente al 20 por 100 de tolueno. Sin embargo, debido a defectos de la **técnica** experimental, sus resultados deben de estar comprendidos entre la **composición** del **azeótropo,** 25 por ciento de tolueno, y la verdadera composición de evaporación constante. El valor calculado de 17 por ciento resulta, por consiguiente, bastante razonable.

se haga prácticamente cero. Se puede suponer también que las únicas reacciones de electrodo que tienen lugar son la disolución y deposición de plata metálica; es decir, que el número de transporte del ión plata es la unidad.

a. Calcular los gradientes de concentración de las tres especies iónicas presentes, suponiendo, de igual forma que en el ejemplo 18.5-4, que difunden independientemente unas de otras y que el flujo global es despreciable.

Respuesta: Véase Fig. 18.P.

Todos los gradientes de concentración son lineales

b. Demostrar que el efecto del gradiente de potencial sobre el movimiento del ión plata a través de la solución es despreciable. El objeto del KNO_3, que es indiferente, es decir, que no se descarga, es reducir el gradiente de potencial de forma que los iones plata se muevan casi exclusivamente por difusión ordinaria. Sistemas de este tipo, aunque de geometría más complicada, se utilizan con gran frecuencia en análisis polarográfico y en la medida de coeficientes de transferencia de materia.

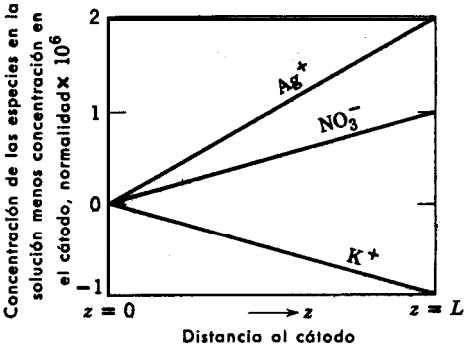


Fig. 18.P. Perfiles de concentración en una célula polarizada conteniendo exceso de un electrólito indiferente.

c. Frecuentemente se postula que en sistemas de este tipo la mayor parte de la corriente «es transportada por la especie que no descarga». ¿Es razonable esto?

18.Q_3 Difusión de *A* a través de mm película estancada de *B* y C de composición media conocida

El gas *A* difunde en estado estacionario en la dirección *z* positiva a través de una película plana estancada de espesor δ, que contiene los gases *B* y C inmóviles. La fracción molar media del gas en la película, calculada sin tener en cuenta *A*, es x_B^o. El sistema es isotérmico.

a. Demostrar que la ecuación de Stefan-Maxwell, Fc. 18.4-19, puede expresarse para los gases *B* y C como $(dx_B/d\zeta) = \nu_{AB}x_B$ y $(dx_C/d\zeta) = \nu_{AC}x_C$. Siendo $\zeta = z/\delta$ la fracción de distancia a través de la película, y $\nu_{At} = \delta N_{At}/c\mathscr{D}_{At}$.

b. Integrar estas dos ecuaciones diferenciales utilizando las condiciones limite de que para $z = 0$, $x_A = x_{A0}$, y para $z = \delta$, $x_A = x_{A\delta}$, con el fin de obtener

$$x_B = \left(\frac{(1 - x_{A0}) \exp \nu_{AC} - (1 - x_{A\delta})}{\exp \nu_{AC} - \exp \nu_{AB}}\right) \exp \frac{zN_{At}}{c\mathscr{D}_{At}} \qquad (18.Q\text{–}1)$$

$$x_C = \left(\frac{(1 - x_{A0}) \exp \nu_{AB} - (1 - x_{A\delta})}{\exp \nu_{AB} - \exp \nu_{AC}}\right) \exp \frac{zN_{At}}{c\mathscr{D}_{AC}} \qquad (18.Q\text{–}2)$$

c. Se puede escribir que $x_B^\circ = \int_0^1 x_B\, d\zeta \Big/ \int_0^1 (x_B + x_C)\, d\zeta$. Substituir el resultado del apartado (b) en esta expresión e integrar para obtener

$$x_B^\circ = \left[1 - \frac{1}{r}\left(\frac{\exp rv_{AB} - 1}{\exp rv_{AB} - Q}\right)\left(\frac{\exp v_{AB} - Q}{\exp v_{AB} - 1}\right)\right]^{-1} \qquad (18.Q\text{–}3)$$

siendo r = $\mathscr{D}_{AB}/\mathscr{D}_{AC}$ y Q = $(1 - x_{A\delta})/(1 - x_{A0})$. Obsérvese que la densidad de flujo que se desea N_{Az} está contenida en v_{AB}.

18.R$_4$ Las ecuaciones de energía mecánica y calorífica para sistemas de varios componentes

a. Obtener una expresión para la velocidad de variación de energía cinética por unidad de masa en sistemas de varios componentes, Ec. C de la Tabla 18.3-1, efectuando el producto de v y la ecuación de movimiento, Ec. 18.3-2.

b. Restar el resultado del apartado (*a*) de la Ec.B de la Tabla 18.3 → 1 para obtener la ecuación de energía interna, Ec.*D* de la Tabla 18.3-1.

18.S$_4$ Cracking catalítico para la reacción A → $pP + qQ$ controlada por difusión

Un gas ideal *A* difunde en estado estacionario en la dirección z positiva a través de una película plana gaseosa de espesor δ, tal como se indica en la Fig. 18.S. En $z = 8$ hay una superficie sólida catalítica en la que *A* experimenta una reacción irreversible de orden n: $A \rightarrow pP + qQ$. La velocidad de reacción puede expresarse como $N_{A\ z=\delta} = k_n'' x_A^n$. Para $z = 0$, $x_p = x_{p0}$ y $x_Q = x_{Q0}$; se supone que ambas fracciones molares son conocidas.

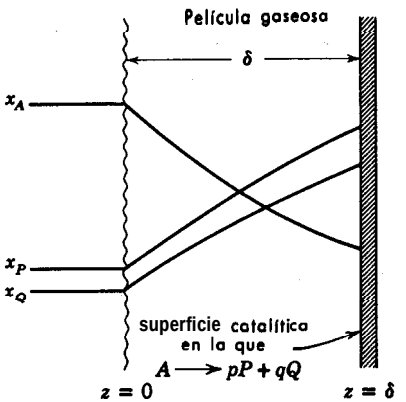


Fig. 18.S. Cracking catalítico controlado por difusión.

a. Demostrar que las ecuaciones de Stefan-Maxwell para los componentes *P* y *Q* son

$$\frac{1}{v_{PQ}}\frac{dx_P}{d\zeta} = A_P x_P + B_P x_Q + C_P \qquad (18.S\text{–}1)$$

$$\frac{1}{v_{PQ}}\frac{dx_Q}{d\zeta} = A_Q x_Q + B_Q x_P + C_Q \qquad (18.S\text{–}2)$$

siendo $v_{PQ} = N_A\delta/c\mathscr{D}_{PQ}$, $A_p = (1-p)r_p - q$, $B_p = (1-r_p)p$, $C_p = pr_p$. Las magnitudes A_Q, B_Q y C_Q, pueden obtenerse reemplazando P por Q y p por q. En estas expresiones $r_P = \mathscr{D}_{PQ}/\mathscr{D}_{AP}$ y $r_Q = \mathscr{D}_{PQ}/\mathscr{D}_{AQ}$.

b. Tomar el transformador de **Laplace** de las Ecs. 18.S - 1 y 2 con respecto a $v_{PQ}\zeta$ para obtener las siguientes expresiones algebraicas para las fracciones molares transformadas $\bar{x}_P(s)$ y $\bar{x}_Q(s)$:

$$\bar{x}_P = \frac{x_{P0} + C_P s^{-1} + B_P\bar{x}_Q}{s - A_P} \tag{18.S-3}$$

$$\bar{x}_Q = \frac{x_{Q0} + C_Q s^{-1} + B_Q\bar{x}_P}{s - A_Q} \tag{18.S-4}$$

c. Resolver simultáneamente estas ecuaciones para obtener

$$\bar{x}_P = \frac{x_{P0}s^2 + (B_P x_{Q0} - A_Q x_{P0} + C_P)s + (B_P C_Q - C_P A_Q)}{s^2 - (A_P + A_Q)s + (A_P A_Q - B_P B_Q)}\frac{1}{s} \tag{18.S-5}$$

d. Tomar el transformador inverso de $\bar{x}_p$ para obtener

$$x_P = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-}\left[x_{P0}(\alpha_+ e^{\alpha_+ v_{PQ}\zeta} - \alpha_- e^{\alpha_- v_{PQ}\zeta}) + (B_P x_{Q0} - A_Q x_{P0} + C_P)(e^{\alpha_+ v_{PQ}\zeta} - e^{\alpha_- v_{PQ}\zeta}) + (B_P C_Q - C_P A_Q)\left(\frac{e^{\alpha_+ v_{PQ}\zeta} - 1}{\alpha_+} - \frac{e^{\alpha_- v_{PQ}\zeta} - 1}{\alpha_-}\right)\right] \tag{18.S-6}$$

siendo $\alpha_\pm = \frac{1}{2}[(A_P + A_Q) \pm \sqrt{(A_P - A_Q)^2 + 4B_P B_Q}]$.

e. ¿Es válida esta solución para los siguientes casos especiales? (i) $a_+ = \alpha_-$, (ii) $a_+ \neq 0$ y $a_- = 0$?

CAPÍTULO 19

DISTRIBUCIONES DE CONCENTRACIÓN CON MÁS DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Los problemas de difusión que se han considerado en los dos capítulos anteriores presentaban gradientes de concentración, que en la mayor parte de los casos eran funciones de una sola variable independiente. Aquí se utilizan las ecuaciones generales del Capítulo 18 para plantear y resolver algunos problemas de difusión en los que intervienen dos variables independientes (bien sea la posición y el tiempo, o dos variables de posición).

Numerosos problemas de difusión pueden resolverse buscando simplemente las soluciones de los problemas análogos en conducción del calor. Cuando las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales y límite de los procesos de difusión tienen exactamente la misma forma que las de los procesos de conducción del calor, puede tomarse la solución de éstos cambiando convenientemente la notación. En la Tabla 19.0-1 se presentan las tres ecuaciones principales del transporte de calor juntamente con sus análogas del transporte de materia. En las monografías de Carlaw y Jaeger[1] y de Crank[2] se pueden encontrar numerosas soluciones de las ecuaciones sin flujo. Sneddon[3] hace un resumen de nuevas analogías que aparecen en otros campos de la física. Por otra parte, ciertos problemas de difusión de neutrones pueden resolverse teniendo en cuenta la analogía con la conducción del calor.[4]

Como los problemas de difusión descritos por las ecuaciones de la Tabla 19.0—1 son los mismos que se han tratado en el Capítulo ll, no se estudiarán de nuevo aquí. Por el contrario, se han elegido problemas en los que se presenta difusión con reacciones químicas, difusión con velocidad molar media no nula, difusión en sistemas de más de dos componentes y convección forzada con altas velocidades de transferencia de materia; estos problemas sirven para ilustrar efectos peculiares de los sistemas de transferencia de materia. Por esta razón, no se sigue el mismo esquema

---

1 H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Heat Conduction in Solids*, Oxford University Press (1959).

2 J. CRANK, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press (1956).

3 I. N. SNEDDON, *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York (1957), capítulo 4 (ecuación de Laplace) y capítulo 6 (ecuación de difusión).

4 Para una introducción a la difusión de neutrones véase, por ejemplo, R. L. MURRAY, *Nuclear Reactor Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1957), capitulo 3.

TABLA 19.0-1

ANALOGÍAS ENTRE FORMAS ESPECIALES DE LA ECUACIÓN DE CONDUCCIÓN DEL CALOR Y LAS ECUACIONES DE DIFUSIÓN

Proceso	Estado no estacionario sin flujo	Estado estacionario con flujo	Estado estacionario sin flujo
Solución obtenida en	§ 11.1 -Soluciones exactas § 11.4 -Soluciones de capa límite	§ 11.2-Soluciones exactas § 11.4 -Soluciones de capa límite	§ 11.3 -Soluciones exactas para dos dimensiones mediante funciones analíticas
Conducción del calor: Ecuaciones	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$	$(v \cdot \nabla T) = \alpha \nabla^2 T$	$\nabla^2 T = 0$
Conducción del calor: Aplicaciones	Conducción del calor en sólidos	Conducción del calor en el flujo laminar incompresible	Conducción del calor en sólidos en estado estacionario
Conducción del calor: Suposiciones	1: k = constante 2. $v = 0$	1. k, ρ = constantes 2. Sin disipación viscosa 3. Estado estacionario	1. k = constante 2. $v = 0$ 3. Estado estacionario
Difusión: Ecuaciones	$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB} \nabla^2 c_A$	$(v \cdot \nabla c_A) = \mathscr{D}_{AB} \nabla^2 c_A$	$\nabla^2 c_A = 0$
Difusión: Aplicaciones	Difusión de trazas de A a través de B	Difusión en flujo laminar (disoluciones diluidas de A en B)	Difusión en sólidos en estado estacionario
Difusión: Suposiciones	1. $\mathscr{D}_{AB}, \rho$ = constantes 2. $v = o$ 3. Sin reacciones químicas	1. $\mathscr{D}_{AB}, \rho$ = constantes 2. Estado estacionario 3. Sin reacciones químicas	1. $\mathscr{D}_{AB}, \rho$ = constantes 2. Estado estacionario 3. Sin reacciones químicas 4. $v = 0$
Difusión: Aplicaciones	Interdifusión equimolar en gases de baja densidad		
Difusión: Suposiciones	1. $\mathscr{D}_{AB}, c$ = constantes 2. $v^* = 0$ 3. Sin reacciones químicas		

que en los Capítulos 4 y ll. En § 19.1 se discuten varios problemas de difusión en estado no estacionario, y en § 19.2 se examinan dos problemas de difusión mediante los métodos aproximados de capa límite del tipo de von Kármán. En § 19.3 se presentan las soluciones exactas de las ecuaciones de Prandtl de capa límite para la transferencia simultánea de calor, materia y cantidad de movimiento, para el flujo laminar a lo largo de una lámina plana; esta sección tiene una importancia especial ya que ilustra acerca de las condiciones necesarias para la exacta analogía entre transferencia de calor, materia y cantidad de movimiento y muestra también el comportamiento de capa límite a altas velocidades de transferencia de materia.

§ 19.1 DIFUSIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO

En esta sección se presentan tres ejemplos ilustrativos. El primero de ellos indica cómo se utiliza el método de combinación de variables para describir los procesos de evaporación controlados por difusión. El segundo ejemplo trata del método de Danckwerts para la resolución de problemas de difusión con reacciones irreversibles de primer orden. En el tercero se estudia la difusión con una zona móvil de reacción.

Ejemplo 19.1-1. Evaporación en estado no estacionario

Se desea deducir una ecuación para la velocidad a la que un líquido *A* se evapora en el seno de un vapor *B* en un tubo de longitud infinita. (Véase el problema esquematizado en la Fig. 16.1 – 1*b*.) El nivel del líquido se mantiene en todo momento en la posición z = 0. Todo el sistema está a temperatura y presión constantes, y se supone que los vapores *A y B* forman una mezcla gaseosa ideal; por consiguiente, la densidad molar c es constante en toda la fase gaseosa. Se supone, finalmente, que *B* es insoluble en *A*.

Solución. Las ecuaciones de continuidad para los componentes *A y B*, son

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \qquad \frac{\partial c_B}{\partial t} = -\frac{\partial N_{Bz}}{\partial z} \tag{19.1-1,2}$$

Sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(N_{Az} + N_{Bz}) \tag{19.1-3}$$

Puesto que c es constante, resulta que $\partial c/\partial t = 0$, y $N_{Az} + N_{Bz}$ es una función exclusiva del tiempo. Pero como se sabe que para z = 0 no existe movimiento de *B*, resulta que $N_{B0} = 0$. Para la misma posición, la densidad de flujo de *A* se obtiene a partir de la Ec. 16.2-2

$$N_{A0} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1 - x_{A0}} \frac{\partial x_A}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{19.1-4}$$

en la que el subíndice 0 indica que las magnitudes están evaluadas para el plano z = 0. Por lo tanto, para cualquier valor de z

$$N_{Az} + N_{Bz} = -\frac{c\mathcal{D}_{AB}}{1 - x_{A0}} \frac{\partial x_A}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{19.1-5}$$

y la densidad de flujo de A para cualquier valor de z, de acuerdo con la Ec. 16.2-2, viene dada por

$$N_{Az} = -c\mathscr{D}_{AB}\frac{\partial x_A}{\partial z} - x_A\left(\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_{A0}}\right)\frac{\partial x_A}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{19.1-6}$$

Substituyendo la Ec. 19.1-6 en la Ec. 19.1-1, siendo $\mathscr{D}_{AB}$ constante, se obtiene

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB}\frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} + \frac{\mathscr{D}_{AB}}{1 - x x_{A0}}\frac{\partial x_A}{\partial z}\bigg|_{z=0}\frac{\partial x_A}{\partial z} \tag{19.1-7}$$

Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones inicial y límite

C.I.	para $t = 0$	$x_A = 0$	(19.1-8)
C.L. 1:	para z = 0	$x_A = x_{A0}$	(19.1-9)
C.L. 2:	para z = ∞	$x_A = 0$	(19.1-10)

siendo x_{A0} la concentración de equilibrio en la fase gaseosa' ; para una mezcla gaseosa ideal esto corresponde exactamente al cociente entre la presión de vapor de A puro y la presión total.

Teniendo en cuenta que no existe una longitud característica del sistema, y que además $x_A = 0$ tanto para $t = 0$ como para z = ∞, está indicada la aplicación del método de combinación de variables. A continuación se introduce una concentración adimensional X y una distancia adimensional Z; definidas de la siguiente forma:

$$X = \frac{x_A}{x_{A0}} \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}t}} \tag{19.1-11}$$

Adelantamos que para cualquier valor de x_{A0}, X es una función exclusiva de Z, lo que nos permite expresar la Ec. 19.1—17 de la siguiente forma:

$$X'' + 2(Z - \varphi)X' = 0 \tag{19.1-12}$$

en la que las comillas indican[2] derivadas con respecto a Z, y

$$\varphi(x_{A0}) = -\frac{1}{2(1 - x_{A0})}\frac{dX}{dZ}\bigg|_{z=0} \tag{19.1-13}$$

La Ec. 19.1—12 se resuelve con las siguientes condiciones límite:

C.L. 1:	para Z = 0	$X = 1$	(19.1-14)
C.L. 2:	para Z = ∞	x = o	(19.1-15)

---

1 Véase la nota 1 al pie de página de § 17.2, en relación con esta suposición de equilibrio en la interfase.

2 Físicamente, φ es una velocidad molar media adimensional

$$\varphi = v^*\sqrt{\frac{t}{\mathscr{D}_{AB}}} \tag{19.1-13a}$$

Teniendo en cuenta que φ no depende de Z, la Ec. 19.1-12 puede integrarse fácilmente para obtener los siguientes perfiles de concentración reducidas:

$$x_A = \frac{1 - \text{erf}(Z - \varphi)}{1 + \text{erf}\,\varphi} \tag{19.1-16}$$

Mediante las Ecs. 19.1 — 13 y 16 se obtiene φ en función de x_{A0}, aunque en la practica es mucho más fácil expresar la relación tomando x_{A0} como una función de φ:

$$x_{A0} = \frac{1}{1 + [\sqrt{\pi}(1 + \text{erf}\,\varphi)\varphi \exp \varphi^2]^{-1}} \tag{19.1-17}$$

En la Tabla 19.1 — 1 se presenta una pequeña Tabla de $\varphi(x_{A0})$, y en la Fig. 19.1 — 1 se representan gráficamente los perfiles de concentración.

Una vez determinados los perfiles de concentración se puede calcular la velocidad volumétrica de producción de vapor de A en una superficie de área S. Llamando V_A al volumen de A producido al cabo del tiempo t después de iniciada la evaporación, tendremos

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{N_{A0}S}{c} = S\varphi\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AB}}{t}} \tag{19.1-18}$$

Integrando con respecto a t se obtiene

$$V_A = S\varphi\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}t} \tag{19.1–19}$$

siendo φ una función de x_{A0} que se da en la Tabla 19.1-1

TABLA 19.1-1[a]

Tabla de φ y $\psi^{(2)}$ en función de x_{A0}

x_{A0}	φ	$\psi^{(2)} = \varphi\sqrt{\pi}/x_{A0}$
0	0,0000	1,000
1/4	0,1562	1,108
1/2	0,3578	1,268
3/4	0,6618	1,564
1	∞	∞

[a] J. H. ARNOLD, *Trans. A. I. Ch. E., 40,* 361-378 (1944)

Claramente se observa la importancia de incluir el transporte convectivo de la especie A a 10 largo del tubo. Si se hubiese utilizado la segunda ley de Fick (Ec. 18.1 —20), se hubiese obtenido para V_A

$$V_A^{(\text{Fick})} = Sx_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}t}{\pi}} \tag{19.1-20}$$

[3] Esta solución fue obtenida por J. H. ARNOLD, *Trans. A. I. Ch. E., 40,* 361-378 (1944).

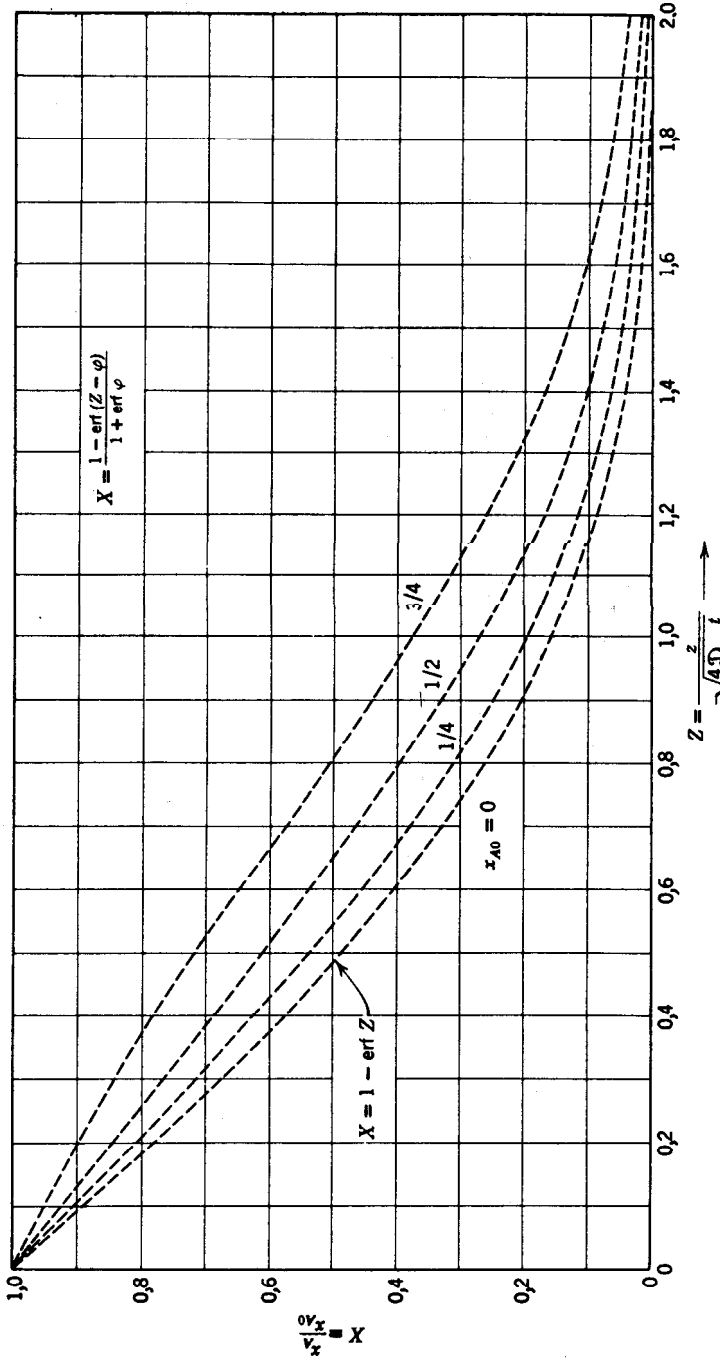


Fig. 19.1–1. Perfiles de concentración en un sistema de evaporación, en los que se observa como la desviación de la segunda ley de Fick aumenta con la volatilidad del líquido *A*.

La Ec. 19.1 – 19 puede expresarse en una forma más conveniente:

$$V_A = Sx_{A0}\sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{AB}t}{\pi}} \cdot \psi^{(2)} \qquad (19.1\text{-}21)$$

en la que $\psi^{(2)} = \varphi\sqrt{\pi}/x_{A0}$ es un factor de corrección que tiene en cuenta la desviación con respecto a la ley de Fick en un sistema de dos componentes debido a la contribución convectiva (el último término de la Ec. 19.1-7). En la Tabla 19.1-1 se da también el factor $\psi^{(2)}$.

Resolviendo la Ec. 19.1-21 se obtiene $\mathscr{D}_{AB}$

$$\mathscr{D}_{AB} = \frac{\pi}{t}\left(\frac{V_A}{2Sx_{A0}\psi^{(2)}}\right)^2 \qquad (19.1\text{-}22)$$

Esta ecuación puede utilizarse para hallar difusividades de líquidos volátiles

La principal razón de haber presentado aquí este problema es la de ilustrar acerca de las importantes desviaciones de la ley de Fick que tienen lugar en los sistemas de evaporación.

Ejemplo 19.1-2. Difusión en estado no estacionario con reacción de primer orden[4,5]

Cuando una especie *A* difunde en un medio líquido *B* y reacciona con él de acuerdo con una reacción irreversible de primer orden ($A + B \rightarrow$ C), el (proceso de difusión y reacción homogénea[6] está descrito por

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB}\nabla^2 c_A + k_1''' c_A \qquad (19.1\text{-}23)$$

suponiendo que la disolución de *A* es diluida y que la cantidad de C producida no es demasiado grande. En esta ecuación, $-k_1'''$ es la constante de velocidad para la reacción homogénea. La Ec. 19.1-23 se resuelve en algunos casos con las siguientes condiciones inicial y límite:

C.I.: para $t = 0$ $\quad c_A = 0$ (19.1-24)

C.L.: para las superficies $\quad c_A = c_{As}$ (19.1-25)

donde c_{As} puede variar con la posición pero es independiente de t. Se puede demostrar que para tales problemas la solución es:

$$c_A = -k_1'''\int_0^t f e^{k_1'''t'}dt' + f e^{k_1'''t} \qquad (19.1\text{-}26)$$

siendo f la solución de la Ec. 19.1-23 para $k_1''' = 0$, que cumple también las condiciones inicial y límite de las Ecs. 19.1-24 y 25.

---

4 P. V. DANCKWERTS, *Trans. Faraday Soc.*, **47**, 1014-1023 (1951); véase también el problema 19.J.

5 J. CRANK, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press (1956), pp. 124-125.

6 En ciertos casos la difusión de neutrones es de esta forma,

Solución. Primeramente vamos a ver si la Ec. 19.1-26 satisface la ecuación ***diferencial*** (Ec. 19.1-23); a partir de la Ec. 19.2-26 se obtienen las derivadas

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -k_1'''fe^{k_1'''t} + \frac{\partial f}{\partial t}e^{k_1'''t} + k_1'''fe^{k_1'''t} \tag{19.1-27}$$

$$\nabla^2 c_A = -k_1''' \int_0^t (\nabla^2 f)e^{k_1'''t'}\,dt' + (\nabla^2 f)e^{k_1'''t} \tag{19.1-28}$$

Substituyendo las Ecs. 19.1−26, 27 y 28 en la Ec. 19.1-23 y teniendo en cuenta que $\mathscr{D}_{AB}\nabla^2 f = \partial f/\partial t$ se demuestra que en efecto se cumple la Ec. 19.1-23.

La Ec. 19.1-26 satisface la ***condición inicial,*** puesto que

$$c_A(t=0) = -k_1''' \int_0^0 fe^{k_1'''t'}\,dt' + f\,(t=0)e^{k_1'''\cdot 0} = 0 \tag{19.1-29}$$

toda vez que $f(t = 0)$ por definición es cero.

También se cumple la ***condición límite,*** ya que en la superficie $f = c_{As}$:

$$\begin{aligned} c_A \text{ (superficie)} &= -k_1''' \int_0^t c_{As}e^{k_1'''t'}\,dt' + c_{As}e^{k_1'''t} \\ &= -k_1''' c_{As} \frac{e^{k_1'''t'}}{k_1'''}\Big|_0^t + c_{As}e^{k_1'''t} \\ &= c_{As} \end{aligned} \tag{19.1-30}$$

Ejemplo 19.1-3. Absorción gaseosa con reacción química rápida[7]

Una substancia gaseosa A es absorbida por el disolvente S, que contiene el soluto B. Se toma el plano $z = 0$ como interfase gas-líquido. La especie A reacciona con B de acuerdo con la reacción $A + B \rightarrow AB$ que es instantánea e irreversible. Se puede admitir que la segunda ley de Fick describe satisfactoriamente el proceso de difusión, puesto que las concentraciones de A, B y AB en S son bajas. Obtener expresiones para los perfiles de concentración.

Solución. Como la reacción de A con B es instantánea, existirá un plano paralelo a la interfase líquido-vapor, situado a una distancia z' de ésta, que separa la región que no contiene A de la que no contiene B. La distancia z' es una función de t, puesto que el límite entre A y B retrocede a medida que se consume B en la reacción química.

Las ecuaciones diferenciales a resolver son

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AS}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \qquad 0 < z \leqslant z'(t) \tag{19.1-31}$$

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} = \mathscr{D}_{BS}\frac{\partial^2 c_B}{\partial z^2} \qquad z'(t) \leqslant z < \infty \tag{19.1-32}$$

---

7 T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, ***Absorption and Extraction,*** McGraw-Hill, Nueva York (1952), pp. 332-337. En el capítulo IX del libro citado se tratan otros problemas de difusión con reacción química. Para problemas de conducción de calor con límites móviles debido a cambios de fase, véase H.S. CARSLAW y J. C. JAEGER, ***Heat Conduction in Solids,*** Oxford University Press, segunda edición (1959).

Se ensayan ahora soluciones de la forma

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = a_1 + a_2 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AS}t}} \tag{19.1-33}$$

$$\frac{c_B}{c_{B0}} = b_1 + b_2 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4\mathscr{D}_{BS}t}} \tag{19.1-34}$$

siendo c_{A0} la concentración interfacial de A en la fase líquida y c_{B0} la concentración inicial de B en S. Puede demostrarse a posteriori que las soluciones postuladas anteriormente son adecuadas.

Vamos a determinar ahora el movimiento del límite de separación en función del tiempo. Obsérvese que para superficie de reacción la Ec. 19.1-33 se transforma en

$$c_A(z', t) = 0 \tag{19.1-35}$$

A partir de la diferencial exacta

$$dc_A = 0 = \left(\frac{\partial c_A}{\partial z'}\right)_t dz' + \left(\frac{\partial c_A}{\partial t}\right)_{z'} dt \tag{19.1-36}$$

se obtiene

$$\frac{dz'}{dt} = -\frac{(\partial c_A/\partial t)_{z'}}{(\partial c_A/\partial z')_t} \tag{19.1-37}$$

Substituyendo la Ec. 19.1-33 (expresada en función de z') en la Ec. 19.1-37 se obtiene una ecuación diferencial de z' en función de t:

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{z'}{2t} \tag{19.1-38}$$

que puede integrarse para obtener

$$z' = \sqrt{4\alpha t} \tag{19.1-39}$$

en la que α es una constante de integración. Esta variación sencilla de z' con t podría deducirse también haciendo $c_A = 0$ y z = z' en la Ec. 19.1-33.

Tenemos que determinar en total cinco constantes, a_1, a_2, b_1, b_2, y α. Para ello se utilizan las siguientes condiciones inicial y límite:

C.I:	para $t = 0$	$c_B = c_{B0}$	(19.1-40)
C.L. 1:	para z = 0	$c_A = c_{A0}$	(19.1-41)
C.L. 2:	para z = $z'(t)$	$c_A = 0$	(19.1-42)
C.L. 3:	para z = $z'(t)$	$c_B = 0$	(19.1-43)
C.L. 4:	para z = $z'(t)$	$-\mathscr{D}_{AS}\frac{\partial c_A}{\partial z} = +\mathscr{D}_{BS}\frac{\partial c_B}{\partial z}$	(19.1-44)

La última condición límite corresponde a la necesidad estequiométrica de que un mol de A consume un mol de B. Las cinco condiciones permiten obtener las cinco constantes de integración. La constante α viene dada implícitamente por

$$1 - \operatorname{erf}\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{BS}}} = \frac{c_{B0}}{c_{A0}}\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{BS}}{\mathscr{D}_{AS}}}\operatorname{erf}\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{AS}}}\exp\left\{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{AS}} - \frac{\alpha}{\mathscr{D}_{BS}}\right\} \tag{19.1-45}$$

Las otras constantes son

$$a_1 = 1 \tag{19.1-46}$$

$$a_2 = -\left(\operatorname{erf}\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{AS}}}\right)^{-1} \tag{19.1-47}$$

$$b_1 = 1 - \left(1 - \operatorname{erf}\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{BS}}}\right)^{-1} \tag{19.1-48}$$

$$b_2 = +\left(1 - \operatorname{erf}\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{BS}}}\right)^{-1} \tag{19.1-49}$$

De acuerdo con esto, se despeja primeramente α de la Ec. 19.1-45 (para valores determinados de c_{B0}/c_{A0} y $\sqrt{\mathscr{D}_{BS}/\mathscr{D}_{AS}}$) y este valor de α se introduce después en las subsiguientes relaciones para obtener a_2, b_1, b_2. En la Fig. 19.1-2 se presentan los perfiles de concentración hallados por Sherwood y Pigford[7], que permiten obtener información cuantitativa acerca del movimiento de la zona de reacción.

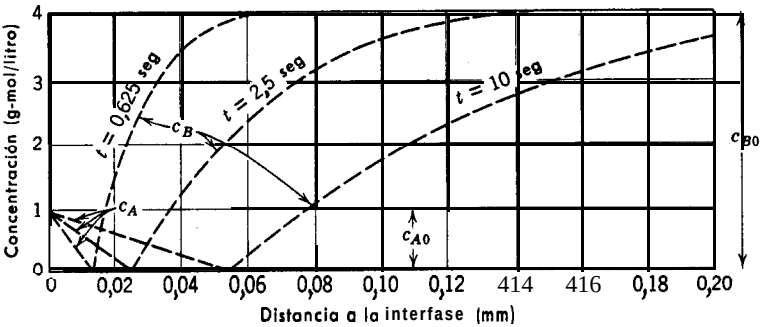


Fig. 19.1-2. Absorción gaseosa con reacción química rápida. Perfiles de concentración según las Ecs. 19.1−33 y 19.1-34 con constantes determinadas mediante las Ecs. 19.1-45, 46, 47, 48 y 49. El cálculo se ha hecho para $\mathscr{D}_{AS} = 3{,}6.10^{-6}\,m^2\,hr^{-1}$ y $\mathscr{D}_{BS} = 1{,}8.10^{-6}\,m^2\,hr^{-1}$. [T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), p. 336.]

A partir de los perfiles de concentración se puede calcular la velocidad de transferencia de materia en la interfase:

$$N_A\big|_{z=0} = -\mathscr{D}_{AS}\frac{\partial c_A}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{c_{A0}}{\operatorname{erf}\sqrt{\alpha/\mathscr{D}_{AS}}}\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AS}}{\pi t}} \tag{19.1-50}$$

La velocidad media de absorción durante el tiempo t es

$$N_{A\,\text{med}} = \frac{1}{t}\int_0^t N_{A}\,dt = 2\,\frac{c_{A0}}{\operatorname{erf}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AS}}{\pi t}} \tag{19.1-51}$$

Por consiguiente, la velocidad media durante el tiempo t es exactamente el doble de la velocidad instantánea.

§ 19.2 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE: MÉTODO APROXIMADO DE VON KÁRMÁN

En esta sección se amplía el tratamiento de la teoría de la capa límite de §§ 4.4 y 11.4. De igual forma que antes, se consideran dos tipos de problemas: transporte no estacionario, en el que el espesor de capa límite es una función del tiempo, y transporte estacionario, en el que el espesor de la capa límite aumenta a lo largo de una superficie.

Como ejemplos ilustrativos hemos seleccionado intencionadamente dos problemas que no existen análogos en transmisión de calor. En el ejemplo 19.2-1 se discute la evaporación en estado no estacionario de un líquido en una mezcla de varios componentes, lo que conduce al estudio del «efecto de difusión de barrido». En el ejemplo 19.2-2 se estudia la variación del espesor de concentración de capa límite con la posición y las propiedades del fluido en un sistema de transferencia de materia en el que tiene lugar una reacción homogénea. En la próxima sección se considera el problema de cálculo de la velocidad, temperatura y perfiles de concentración, en el flujo laminar a lo largo de una lámina plana, para elevadas velocidades de transferencia de materia en la superficie de la lámina.

La aplicación dc las técnicas de capa límite a la transferencia de materia ha constituido una ayuda muy valiosa para el desarrollo de la teoría de los procesos de separación y de cinética química. Entre los problemas interesantes que se han estudiado están la transferencia de materia desde gotas,* la convección libre en electrolisis,[2] y reacciones químicas homogéneas en capas límite no isotérmicas.3

Ejemplo 19.2–1. Evaporación en estado no estacionario en el seno de una mezcla de varios componentes[4]

Utilícese un método de capa límite para ampliar los resultados del ejemplo 19.1-1 con el fin de describir la velocidad de evaporación de un líquido «1» en el seno de un vapor constituido por «2», «3», ... «n».

Solución. (*a*) En primer lugar, volveremos a resolver el problema para el caso de dos componentes aplicando un método de capa límite. Tomaremos como punto de partida

1 S. K. FRIEDLANDER, *A. I. Ch. E. Journal*, *3, 43-49 (1957).*
2 C. R. WILKE, C. W. TOBIAS y M. EISENBERG, *Chem. Eng. Prog.*, **49, 663-674** (1953).
3 F. E. MARBLE y T. C. ADAMSON, *Jet Propulsion*, *24, 85-94* (1954).
4 H.W HSU, Ph. D. *Thessis*, Universidad de Wisconsin (1959).

una forma integrada de la Ec. 19.1-1 (la ecuación de continuidad) y la Ec. 19.1-4 (la expresión de la densidad de flujo para z = 0):

$$\frac{N_{A0}}{c} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty x_A\, dz \tag{19.2-1}$$

$$\frac{N_{A0}}{c} = -\frac{\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_{A0}}\frac{\partial x_A}{\partial z}_{z=0} \tag{19.2-2}$$

Igualando estas dos expresiones de N_{A0}/c, se llega a

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty x_A\, dz = -\frac{\mathscr{D}_{AB}}{1 - x_{A0}}\frac{\partial x_A}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{19.2-3}$$

Esta expresión se obtendría también integrando la Ec. 19.1-7 desde z = 0 hasta z = ∞.

Se puede proponer un perfil de concentración de la forma siguiente:

$$\frac{x_A}{x_{A0}} = f\left(\frac{z}{\delta}\right) = f(\zeta) \quad \text{para} \quad \zeta < 1 \tag{19.2-4}$$

$$\frac{x_A}{x_{A0}} = 0 \quad \text{para} \quad \zeta > 1 \tag{19.2-5}$$

siendo $\delta = \delta(t)$ el espesor de concentración de capa limite. La función $f(\zeta)$ ha de tener las siguientes propiedades: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y f'(l) = 0.

Substituyendo el anterior perfil aproximado en la Ec. 19.2-3, se obtiene:

$$x_{A0}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\int_0^1 f\, d\zeta = \frac{(\mathscr{D}_{AB}x_{A0}/\delta)}{1 - x_{A0}}(-f_0') \tag{19.2-6}$$

En esta expresión f_0' corresponde a $df/d\zeta$ evaluada para $\zeta = 0$. Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de δ en función de t. Al integrarla con respecto al tiempo, utilizando la condición inicial de que $\delta = 0$ para $t = 0$, se llega a

$$\delta = \sqrt{\frac{2\mathscr{D}_{AB}\, t(-f_0')}{(1 - x_{A0})\int_0^1 f\, d\zeta}} \tag{19.2-7}$$

Una vez que se conoce δ se halla la velocidad de evaporación

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{N_{A0}S}{c} = \frac{(S\mathscr{D}_{AB}\, x_{A0}/\delta)}{1 - x_{A0}}(-f_0')$$

$$= Sx_{A0}\sqrt{\frac{\left(\int_0^1 f\, d\zeta\right)(-f_0')\,\mathscr{D}_{AB}}{2(1 - x_{A0})t}} \tag{19.2-8}$$

siendo el volumen de A producido

$$V_A = Sx_{A0}\sqrt{\frac{\left(\int_0^1 f\,d\zeta\right)(-f_0')\cdot 2\mathscr{D}_{AB}\,t}{(1-x_{A0})}} \tag{19.2-9}$$

Comparando la Ec. 19.2-9 con la Ec. 19.1-21 se deduce que

$$\psi^{(2)}_{\text{cap. lím.}} = \sqrt{\frac{\left(\int_0^1 f\,d\zeta\right)(-f_0')\,\pi}{2(1-x_{A0})}} \tag{19.2-10}$$

Una función muy sencilla $f(\zeta)$ que cumple las restricciones que se han indicado anteriormente es $f(\zeta) = (1-\zeta)^2$. El lector puede comprobar que para esta función $\psi^{(2)}_{\text{cap. lím.}} = \sqrt{\pi/3(1-x_{A0})}$; los valores de $\psi^{(2)}$ así obtenidos son 1,02, 1,18, 1,44, 2,04, ∞, que corresponden a la última columna de la Tabla 19.1—1. Como se ve, esta particular elección de $f(\zeta) = (1-\zeta)^2$ da resultados que son cada vez peores a medida que nos vamos aproximando a la temperatura de ebullición del líquido. Esto es debido a que se ha despreciado la variación de la forma del perfil con x_{A0}. (Véase Fig. 19.1—1.)

b. Para un sistema de varios componentes se toma como punto de partida una forma integrada de la ecuación de continuidad para el componente «1» y las ecuaciones de Stefan-Maxwell (véase Ec. 18.4-19) para los componentes «1», «2», ... «n», expresadas para z = O

$$\frac{N_{10}}{c} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty x_1\,dz \tag{19.2-11}$$

$$\frac{N_{10}}{c} = -\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{x_{i0}}{\mathscr{D}_{1i}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial x_1}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{19.2-12}$$

$$\frac{N_{10}}{c} = +\frac{\mathscr{D}_{1j}}{\mathscr{D}_{jo}}\left.\frac{\partial x_j}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad j = 2, 3, \ldots, n \tag{19.2-13}$$

siendo x_{i0} las fracciones molares de la fase gaseosa en la interfase gas-líquido.

Utilizamos ahora los siguientes perfiles aproximados de concentración:

$$\frac{x_1}{x_{10}} = f_1\left(\frac{z}{\delta_1}\right) = f_1(\zeta_1) \text{ para } \zeta_1 < 1 \tag{19.2-14}$$

$$\frac{x_j^\circ - x_j}{x_j^\circ - x_{j0}} = f_j\left(\frac{z}{\delta_j}\right) = f_j(\zeta_j) \text{ Para } \zeta_j < 1 \quad j = 2, 3, \ldots, n \tag{19.2-15}$$

siendo x_j° la concentración de la especie j en la mezcla gaseosa en el instante $t = 0$. Es decir, que se deja que cada especie tenga su propio espesor de concentración de capa límite $\delta_j(t)$, y se especifica que $f_j(0) = 1$, $f_j(1) = 0$, y $f_j'(1) = 0$ para cualquier valor de j.

Al introducir la función f_1 en las Ecs. 19.2-11 y 12, e igualar las dos expresiones de N_{10}/c, se obtiene una ecuación diferencial de $\delta_1(t)$, que una vez resuelta da

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2(-f_{10}')t}{\int_0^1 f_1\, d\zeta_1}} \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_{i0}}{\mathscr{D}_{1i}} \right)^{-1/2} \tag{19.2-16}$$

Pueden deducirse expresiones para $\delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ igualando los segundos miembros de las Ecs. 19.2-11 y 13.

El volumen producido de la especie cl» puede hallarse por el mismo procedimiento utilizado en el apartado (u):

$$V_1 = S x_{10} \sqrt{\left(\int_0^1 f_1\, d\zeta_1 \right)(-f_{10}')2t} \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_{i0}}{\mathscr{D}_{1i}} \right)^{-1/2} \tag{19.2-17}$$

$$= S x_{10} \sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{12} t}{\pi}} \cdot \psi^{(n)}_{\text{cap. lim.}}$$

que define un factor de corrección análogo a $\psi^{(2)}_{\text{cap. lim.}}$ de la **Ec. 19.2—10.**

Si se supone que f_1 es en este caso la misma función que f en el apartado (u), la combinación de las Ecs. 19.2-10 y 19.2-17 indica que

$$\frac{\psi^{(2)}_{\text{cap. lim.}}}{\psi^{(n)}_{\text{cap. lim.}}} = \left(\frac{1 - x_{10}}{\dfrac{x_{20}}{\mathscr{D}_{12}} + \dfrac{x_{30}}{\mathscr{D}_{13}} + \cdots} \right)^{1/2} \tag{19.2-18}$$

Si se postula finalmente que la relación $\psi^{(n)}/\psi^{(2)}$ calculada por el método de capa límite no diferirá mucho de $\psi^{(n)}/\psi^{(2)}$ calculada rigurosamente, se puede escribir:

$$V_1 = S x_{10} \sqrt{\frac{4\mathscr{D}_{1,\text{ef}}\, t}{\pi}}\, \psi^{(2)} \tag{19.2-19}$$

siendo $\psi^{(2)}$ una función de x_{10}, tal como se indica en la Tabla **19.1** — 1, y $\mathscr{D}_{1,\text{ef}}$ una **difusividad** efectiva definida por

$$\mathscr{D}_{1,\text{ef}} = \frac{1 - x_{10}}{\sum_{j=2}^{n} \dfrac{x_{j0}}{\mathscr{D}_{1j}}} \tag{19.2-20}$$

Se observará que esta difusividad es la misma que $\mathscr{D}_{1m}$, definida por la **Ec.** 18.4-21, con tal de que se. especifique que $\mathscr{D}_{1m}$ ha de evaluarse para el plano z = 0. Por consiguiente se llega a la **conclusión** de que se obtiene la misma expresión para la velocidad **de** evaporación por los dos procedimientos: (i) método de capa límite tomando f_1 igual a f del problema binario, o **(ii)** ampliación del resultado binario del ejemplo 19.1-1 substituyendo $\mathscr{D}_{AB}$ por $\mathscr{D}_{1m}$, estando esta Ultima **evaluada** para la interfase liquido-vapor. La **Ec.** 19.2-19 se ha comprobado experimentalmente para diversos sistemas de evaporación y se ha encontrado que describe la velocidad de **evaporación** dentro del error de las medidas **experimentales.**[5]

---

5 D. F. FAIRBANKS y C. R. WILKE, *Ind. Eng. Chem.*, 42, 471475 (1950).

Las relaciones locales de las concentraciones de las especies que no se evaporan tienden a variar con el tiempo durante la evaporación en estado no estacionario. Es decir, que tiene lugar un efecto de separación, que se conoce con el nombre de ***efecto de difusión de barrido.*** Para describir cuantitativamente este efecto es necesario conocer los perfiles. Como los procedimientos de capa límite conducen, en general, a peores resultados para los perfiles que para las velocidades de transferencia, no se intenta dar aquí un tratamiento cuantitativo del efecto de difusión de barrido. Varios grupos de investigadores[6] han estudiado la difusión de barrido como proceso de separación.

Ejemplo 19.2-2. Difusión y reacción química en el flujo laminar isotérmico a lo largo de una lámina plana soluble

Una adecuada analogía de transferencia de materia, correspondiente al problema que se ha discutido en el ejemplo 11.4 – 1, consistiría en el flujo a lo largo de una lámina plana que contiene una especie A ligeramente soluble en el fluido B. La concentración en la superficie de la lámina es c_{A0}, correspondiente a la solubilidad de A en B, y la concentración de A lejos de la lámina es $c_{A\infty}$. En este ejemplo se toma $c_{A\infty} = 0$, y se rompe la analogía con el ejemplo 11.4 – 1 al reaccionar A con B según una reacción química homogénea de orden n, cuya constante de velocidad es k_n'''. Se desea analizar el sistema por un método de capa límite.

Solución. Se supone que la concentración de la substancia A disuelta es lo suficientemente baja para que las propiedades físicas ρ, μ y $\mathscr{D}_{AB}$, sean prácticamente constantes en todo el fluido. Las ecuaciones de capa límite para este sistema (véanse Ecs. 11.4 – 1, 2, y 3) son

(continuidad)
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{19.2-21}$$

(movimiento)
$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{19.2-22}$$

(continuidad de A)
$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathscr{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} - k_n''' c_A^n \tag{19.2-23}$$

Las dos primeras ecuaciones pueden utilizarse para hallar la distribución de velocidad $v_x(x, y)$, tal como se ha hecho ya en el ejemplo 4.4-2. Se substituye después la última de ellas en la ecuación de c_A, y se combina con la Ec. 19.2-21 para obtener

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathscr{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} - k_n''' c_A^n \tag{19.2-24}$$

Obsérvese que al expresar las últimas ecuaciones se ha supuesto que $v_y = 0$ para $y = 0$; sin embargo, esta suposición no sería correcta para altas velocidades de transferencia de materia. La Ec. 19.2-24 **puede** integrarse sobre y (véase. Ec. 11.4-23 para transmisión **de** calor y Ec. 4.4-29 para transmisión de cantidad de movimiento) con el fin **de** obtener

$$N_{Ay}|_{y=0} = \frac{d}{dx} [\delta_4 v_\infty (c_{A0} - c_{A\infty})] + k_n''' \int_0^\infty c_A^n \, dy \tag{19.2-25}$$

---

[6] M. BENEDICT y A. BOAS, *Chem. Eng. Prog.*, *47*, 51-62, 111-122 (1951); M. T. CICHELLI, W. E. WEATHERFORD, Jr. y J. R. BOWMAN, *Chem. Eng. Prog.*, **47, 63-74, 123-133 (1951).**

en la *que* el *espesor de concentración* δ_4 *es*

$$\delta_4 = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_\infty}\left(1 - \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0} - c_{A\infty}}\right) dy \tag{19.2-26}$$

La integral correspondiente a δ_4 es exactamente de la misma forma que la δ_3 de la Ec. 11.4-24.

Para este problema se toma $c_{A\infty} = 0$ y se introduce la velocidad adimensional $\phi = v_x/v_\infty$ y la concentración adimensional $\Gamma = (c_{A0} - c_A)/c_{A0}$. Por consiguiente, la Ec. 19.2-25 se transforma en

$$\frac{\mathscr{D}_{AB}}{v_\infty}\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \phi(1 - \Gamma)\, dy + \frac{k_n'' c_{A0}^{n-1}}{v_\infty}\int_0^\infty (1 - \Gamma)^n\, dy \tag{19.2-27}$$

Se introducen ahora los siguientes perfiles «semejantes»:

$$\phi = \phi(\eta) \quad \text{siendo} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \tag{19.2-28}$$

$$\Gamma = \Gamma(\eta_c) \text{ siendo } \quad \eta_c = \frac{y}{\delta_c(x)} \tag{19.2-29}$$

Es decir, que los espesores de capa límite δ y δ_c para la transferencia de cantidad de movimiento y la transferencia de materia son diferentes. Con el fin de relacionar este problema con el que se ha estudiado en el ejemplo 11.4-1, vamos a introducir la relación $\Delta = \delta_c/\delta$, que en este caso es función de x debido a la reacción química que tiene lugar. Limitaremos la discusión al caso de que $\Delta \leqslant 1$, para el que la capa límite de materia está situada totalmente dentro de la capa límite de cantidad de movimiento. Expresando la Ec. 19.2-27 en función de las variables η y η_c se obtiene

$$-\frac{\mathscr{D}_{AB}}{v_\infty}\frac{\partial \Gamma}{\partial \eta_c}_{\eta_c=0} \cdot \frac{\delta(x)}{\Delta(x)} = \frac{d}{dx}\left\{\int_0^1 \phi(\eta_c \Delta)[1 - \Gamma(\eta_c)]\, d\eta_c \cdot \delta(x)\,\Delta(x)\right\} + \left\{\frac{k_n'' c_{A0}^{n-1}}{v_\infty}\int_0^1 [1 - \Gamma(\eta_c)]^n\, d\eta_c \cdot \delta(x)\,\Delta(x)\right\} \tag{19.2-30}$$

Para hallar $\Delta(x)$ hemos de suponer formas funcionales para $\phi(\eta)$ y $\Gamma(\eta_c)$. Con el fin de reducir al mínimo el tratamiento matemático e ilustrar, sin embargo, el método, vamos a elegir funciones muy sencillas (es evidente que pueden suponerse funciones más realistas):

$$\phi(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{para } \eta \leqslant 1 \\ 1 & \text{para } \eta \geqslant 1 \end{cases} \tag{19.2-31}$$

$$\Gamma(\eta_c) = \begin{cases} \eta_c & \text{para } \eta_c \leqslant 1 \\ 1 & \text{para } \eta_c \geqslant 1 \end{cases} \tag{19.2-32}$$

El modelo se representa gráficamente en la Fig. 19.2-1.

Para esta sencilla elección el lector puede comprobar que las Ecs. 4.4-29 y 31 dan[7]

$$\delta(x) = \sqrt{12}\sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \tag{19.2-33}$$

Introduciendo en la Ec. 19.2-30 las formas supuestas para $\phi(\eta)$ y $\Gamma(\eta_c)$, y multiplicando por $\delta\Delta$ se obtiene

$$\frac{\mathcal{D}_{AB}}{v_\infty} = \delta\Delta\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{6}\delta\Delta^2\right) + \frac{k_n'' c_{A0}^{n-1}}{v_\infty(n+1)}\delta^2\Delta^2 \tag{19.2-34}$$

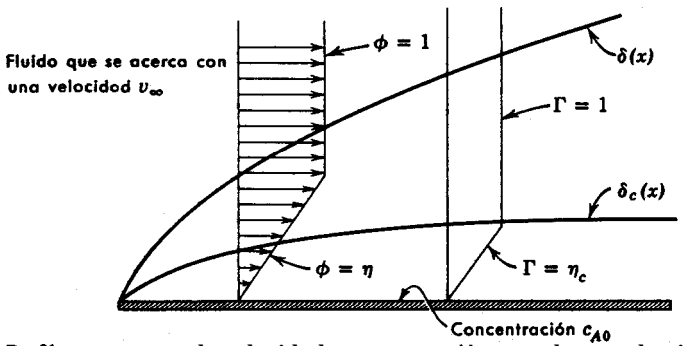


Fig. 19.2-1. Perfiles supuestos de velocidad y concentración para la capa laminar límite con reacción química homogénea.

Introduciendo $\delta(x)$ de la Ec. 19.2-33 y multiplicando por v_∞/ν se obtiene

$$\frac{1}{\mathrm{Sc}} = \frac{4}{3}x\frac{d}{dx}\Delta^3 + \Delta^3 + \frac{12}{n+1}\left(\frac{k_n'' c_{A0}^{n-1}}{v_\infty}\right)x\Delta^2 \tag{19.2-35}$$

Ésta es la ecuación diferencial de A, que es una función del número de Schmidt, Sc, y la distancia x a lo largo de la lamina.

Si *no existe reacción química* k_n'' es cero y la Ec. 19.2-35 se transforma en una ecuación lineal de primer orden de Δ^3. Al integrar esta ecuación se obtiene

$$\Delta^3 = \frac{1}{\mathrm{Sc}} + \frac{C}{x^{3/4}} \tag{19.2-36}$$

en la que C es una constante de integración. Puesto A no se hace infinito cuando x tiende a cero, en ausencia de reacción química (véase Ec. 11.4−21), se obtiene

$$\Delta = \mathrm{Sc}^{-1/3} \tag{19.2-37}$$

---

7 Véase H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), pp. 204-205. Parece que $\delta(x)$ puede evaluarse a partir de la Ec. 4.4-29 o de la Ec. 4.4-23 indistintamente. Sin embargo, para los perfiles de velocidad supuestos correspondientes, a la Ec. 19.2-31, los dos métodos anteriores para el cálculo de $\delta(x)$ no son equivalentes debido a que la derivada primera de los perfiles de velocidad supuestos presenta una discontinuidad en el borde exterior de la capa límite ($\eta = 1$). Análogas consideraciones pueden aplicarse para los perfiles de temperatura o concentración cuyas primeras derivadas son discontinuas.

Es decir, que cuando no hay reacción los espesores de capa límite de concentración y de cantidad de movimiento guardan entre sí una relación constante que depende solamente del valor del número de Schmidt.

Cuando la ***reacción es lenta,*** k_n''' es pequeño, y se puede obtener una serie como solución de la Ec. 19.2-35:

$$A = Sc^{-1/3}(1 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots) \tag{19.2-38}$$

en la que $\xi = [12/(n+1)](k_n''' c_{A0}^{n-1} x/v_\infty)$. Substituyendo esta expresión en la Ec. 19.2-35 se obtiene $a_1 = -(\frac{1}{7})Sc^{1/3}$, $a_2 = (\frac{3}{539})Sc^{2/3}$, etc. Puesto que a_1 es negativo, el espesor de capa límite disminuye **a causa** de la reacción química.

Cuando la ***reacción es muy rápida*** (o bien cuando x es muy grande), resulta más conveniente una solución en forma de una serie de $1/\xi$. Para valores grandes de ξ puede suponerse que el término predominante es de la forma $\Delta = \text{const.}\ \xi^n$, siendo $n < 0$. Substituyendo después esta función de ensayo en la Ec. 19.2-35 se puede demostrar que

$$A = (Sc\ \xi)^{-1/2} \tag{19.2-39}$$

Combinando las Ecs. 19.2-33 y 19.2-39 se demuestra que para grandes distancias del borde de ataque el espesor de concentración de capa límite $\delta_c = \delta\Delta$ se transforma en una constante independiente de v.

Una vez que se conoce A (x, Sc), se pueden hallar los perfiles de concentración y la velocidad de transferencia de materia en la superficie. En la bibliografía puede verse un tratamiento más riguroso de este problema.*

§ 19.3 TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE: SOLUCIONES EXACTAS PARA TRANSFERENCIA SIMULTÁNEA DE CALOR, MATERIA Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Los tratamientos de capa límite que se han desarrollado hasta aquí están basados en las formas integrales de von Kármán de las ecuaciones de capa límite (Ecs. 4 4-29, 11.4-23 y 19.2—25), obtenidas a partir de las ecuaciones de capa límite de Prandtl mediante integración en la dirección y. Para resolver las ecuaciones de von Kármán para los espesores de capa límite δ, δ_T y δ_c, hay que suponer las formas de los perfiles de velocidad, temperatura y concentración. En esta sección se ilustra el proceso más riguroso para la exacta1 resolución de las ecuaciones de capa límite de Prandtl; este método es más exacto e ilustra mejor los detalles de los mecanismos de transporte.

---

8 Véase P. L. CHAMBRÉ y J. D. YOUNG, *Physics of Fluids*, 1, 48-54 (1958). P. L. CHAMBRÉ y A. ACRIVOS, *J. Appl. Phys.*, *27*, 1322-1328 (1956), han estudiado reacciones catalíticas de superficie en capas límite.

1 En la bibliografía de la capa límite, el termino «solución exacta» se refiere a una solución de las ecuaciones de capa límite de *Prandtl*, para diferenciarla de otras soluciones más aproximadas. Es preciso tener en cuenta que las ecuaciones de capa limite de *Prandtl* son, en realidad, aproximaciones asintóticas de las ecuaciones de variación y son exactas para el flujo laminar bidimensional en la región $v_\infty x/\nu \gg 1$. [Véase H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory*, Pergamon Press, Nueva York (1955), capítulo VII.]

Se intenta determinar aquí lo que sucede cuando se transmiten simultáneamente calor, materia y cantidad de movimiento, a través de la capa límite de un fluido en movimiento. Este comportamiento está relacionado con numerosos procesos, tales como combustión de sólidos, catálisis heterogénea y procesos de separación. Aunque el sistema que se considera en este caso es sencillo, el estudio de los resultados obtenidos puede proporcionar un conocimiento valioso acerca del comportamiento de sistemas más complejos.

Consideremos el sistema de flujo que se indica en la Fig 19.3-1. Una lámina delgada, semi-infinita, de un sólido A sublima en condiciones estacionarias en el seno de una corriente gaseosa ilimitada de A y B, que se aproxima tangencialmente a la lámina en la dirección x con una velocidad v_∞. En la fase gaseosa sólo está presente la especie B. Se desea determinar los perfiles de velocidad, temperatura y concentración en la capa límite, para el caso de que se conozcan la temperatura uniforme y la composición del gas a lo largo de la superficie de la lámina.

Para mayor sencillez se supondrá que no existen reacciones químicas ni otras fuerzas externas distintas de las de gravedad, y se despreciarán la disipación viscosa, los calores de mezcla y la emisión o absorción de energía radiante en la capa límite gaseosa. Para la mayor parte de los sistemas gaseosos estas suposiciones resultan aceptables. Se considera también que las propiedades físicas p, μ, $\hat{C}_p$, k, c y $\mathscr{D}_{AB}$ son constantes.[2] Teniendo en cuenta estas simplificaciones, las ecuaciones de capa límite para este sistema son

(continuidad)
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{19.3-1}$$

(movimiento)
$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{19.3-2}$$

(energía)
$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{19.3-3}$$

(continuidad de A)
$$v_x \frac{\partial x_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial x_A}{\partial y} = \mathscr{D}_{AB} \frac{\partial^2 x_A}{\partial y^2} \tag{19.3-4}$$

Las condiciones. límite son:

para $x \leqslant 0$ 0 $y = \infty$: $v_x = v_\infty$ $T = T_\infty$, $x_A = x_{A\infty}$ (19.3-5, 6, 7)

para $y = 0$: $v_x = 0$, $T = T_0$ $x_A = x_{A0}$, $N_B = 0$ (19.3-8, 9, 10, 11)

La última ecuación se deduce de las suposiciones de que B sólo existe en la fase gaseosa y de que no hay reacciones químicas.

---

2 Obsérvese que estas suposiciones implican que $M_A = M_B$ y $\hat{C}_{pA} = \hat{C}_{pB}$, así como también que x_A es una función de la posición. En § 21.7 se consideran métodos aproximados para la aplicación de estas soluciones a sistemas con propiedades variables. La variación de las propiedades físicas puede tratarse con exactitud mediante el método de integración numérica de H. SCHUH, *Z. angew. Math. Mech.* **25-27,** 54-60 (1947); *NACA Tech Memo* 1275 (1950).

La ecuación de continuidad se puede integrar para obtener v_y

$$v_y = v_{y0} - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy \tag{19.3-12}$$

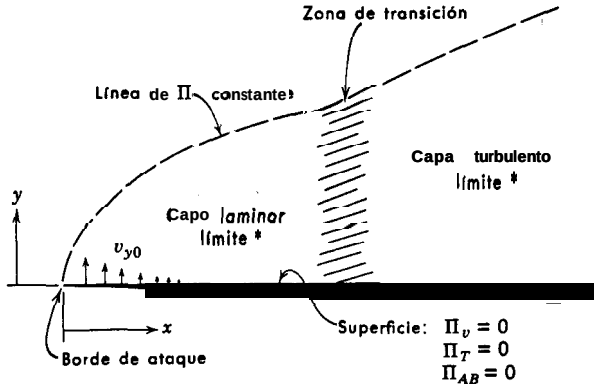
o

$$v_y = \underset{p}{M_A N_{A0}} - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy \tag{19.3-13}$$

en las que el subíndice 0 representa condiciones para $y = 0$. La segunda relación se deriva de las Ecs. *J* y S de la Tabla 16.1-3. Evaluando N_{A0} mediante la ley de Fick (Ec. 16.2–2), se obtiene

$$N_{A0} = -c\mathscr{D}_{AB} \left.\frac{\partial x_A}{\partial y}\right|_{y=0} + x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) \tag{19.3-14}$$

Flujo exterior: $\Pi_v = 1$
$\Pi_T = 1$
$\Pi_{AB} = 1$



* No se ha representado la capa límite situado por debajo de la lámina

Fig. 19.3-1. Flujo tangencial a lo largo de una lámina plana afilada semi-infinita, con transferencia de materia hacia la corriente. La transición de flujo laminar a turbulento tiene lugar, generalmente, para valores del número de Reynolds $(v_\infty x/\nu)$ del orden de 10^5.

Tomando $N_{B0} = 0$, de acuerdo con la Ec. 19.3–11, y combinando el resultado con la Ec. 19.3-13, se llega a

$$v_y = -\frac{M_A}{\rho}\frac{c\mathscr{D}_{AB}}{(1 - x_{A0})}\left.\frac{\partial x_A}{\partial y}\right|_{y=0} - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}\, dy \tag{19.3-15}$$

Esta expresión es la que se utiliza para v_y en las Ecs. 19.3-2, 3 y 4. Como se ha supuesto que $M_A = M_B$, se puede tomar $M_A c/\rho$ igual a la unidad.

Se definen ahora las variables adimensionales de perfil

$$\Pi_v = \frac{v_x - v_{x0}}{v_{x\infty} - v_{x0}} = \frac{v_x}{v_\infty} \qquad \Pi_T = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \qquad \Pi_{AB} = \frac{x_A - x_{A0}}{x_{A\infty} - x_{A0}} \qquad (19.3\text{–}16,17,18)$$

y las relaciones adimensionales de propiedades físicas

$$\Lambda_v = \frac{\nu}{\nu} = 1 \qquad \Lambda_T = \frac{\nu}{a} = \mathrm{Pr} \qquad \Lambda_{AB} = \frac{\nu}{\mathscr{D}_{AB}} = \mathrm{Sc} \qquad (19.3\text{–}19,20,21)$$

Con estas definiciones, las ecuaciones de movimiento, energía y continuidad de *A*, toman la forma común

$$v_x \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \left(\frac{\mathscr{D}_{AB}}{(1 - x_{A0})} \frac{\partial x_A}{\partial y}\bigg|_{y=0} - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\nu}{\Lambda} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \qquad (19.3\text{-}22)$$

y las condiciones límite para v_x, T y x_A, se transforman en

$$\text{para } x \leqslant 0 \qquad 0 \qquad y = \infty \qquad \Pi = 1 \qquad (19.3\text{-}23)$$

$$\text{para } y = 0 \qquad \Pi = 0 \qquad (19.3\text{-}24)$$

La forma de las condiciones límite para las variables de perfil Π, y la falta de una longitud característica en el sistema de flujo, indican que debe de utilizarse el método de combinación de variables. La Ec. 4.4-26 sugiere una combinación de la forma

$$\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} \qquad (19.3\text{-}25)$$

Expresando las derivadas de la Ec. 19.3-22 en función de η, se obtiene[3]

$$\Lambda \left[\frac{1}{\Lambda_{AB}} \left(\frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}} \right) \Pi'_{AB}(0) - \int_0^\eta 2\Pi_v \, d\eta \right] \Pi' = \Pi'' \qquad (19.3\text{-}26)$$

en la que las comillas indican diferenciación con respecto a η. De acuerdo con esta expresión, se observa que la velocidad de transferencia de materia en la pared, ex-

[3] Resulta conveniente comparar la presente deducción con la que se ha desarrollado en el ejemplo 19.1 − 1. Las magnitudes análogas en ambos casos para pequeños valores de y son:

Ejemplo 19.1-1	1 − X	Z	$-\frac{dX}{dZ}_{Z=0}$	2φ	$\frac{x_{A0}}{1 - x_{A0}}$
Esta sección	Π_{AB}	η	$\Pi'_{AB}(0)$	$K\Lambda_{AB}$	$\frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}}$

presada aquí en función del gradiente de concentración Π'_{AB} (0), afecta directamente a los tres perfiles Π_v, Π_T y Π_{AB}.

Finalmente, definimos la magnitud

$$f = -K + \int_0^\eta 2\Pi_v \, d\eta \tag{19.3-27}$$

siendo K una densidad de flujo adimensional de materia en la pared, que viene dada en este caso por

$$K = \frac{1}{\Lambda_{AB}} \left(\frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}} \right) \Pi'_{AB}(0) \tag{19.3-28}$$

y que para la capa laminar límite es constante.[4] Por consiguiente, las ecuaciones de capa límite de movimiento, energía y continuidad, resultan

$$-\Lambda f \Pi' = \Pi'' \tag{19.3-29}$$

Las condiciones límite para Π son

$$\text{para} \quad \eta = 0 \qquad \Pi = 0 \tag{19.3-30}$$

$$\text{para} \quad \eta = \infty \qquad \Pi = 1 \tag{19.3-31}$$

Las ecuaciones diferenciales y sus condiciones límite se han expresado ahora en función de la única variable independiente η, confirmando la supuesta combinación de variables.

Mediante las Ecs. 19.3-27 a 31 se pueden calcular los perfiles de velocidad, temperatura y concentración, en la capa laminar límite. Primeramente se calculan los perfiles de velocidad Π_v y la función f, con ellos relacionada, para el deseado valor de K, mediante la resolución de la Ec. 19. 3-29 para $\Lambda = 1$. La misma ecuación puede integrarse después directamente para cualquier valor de Λ con el fin de obtener el correspondiente perfil de temperatura o concentración:

$$\Pi(\eta, \Lambda, K) = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\Lambda \int_0^\eta f \, d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\Lambda \int_0^\eta f \, d\eta\right) d\eta} \tag{19.3-32}$$

[4] La densidad de flujo adimensional de materia K se define mediante la expresión

$$K = \frac{2v_{y0}}{v_\infty} \sqrt{\frac{v_\infty x}{\nu}} \tag{19.3-28a}$$

en la que v_{y0} es la velocidad del fluido en la pared en la dirección y. Esta definición es aplicable aun cuando N_{A0} y N_{B0} sean ambos distintos de cero. Obsérvese que v_{y0} es proporcional a $1/\sqrt{x}$; esta predicción es válida, desde luego, solamente en la región $v_\infty x/\nu \gg 1$ para la que es aplicable la teoría de capa límite.

En la Fig. 19.3-2 se representan algunos perfiles calculados a partir de la Ec. 19.3-32. Los perfiles de velocidad vienen dados por las curvas correspondientes a $\Lambda = 1$, y los perfiles de temperatura y concentración, para diferentes números de Prandtl y Schmidt, vienen dados por los correspondientes valores de Λ en las curvas. Obsérvese que las capas límite de velocidad, temperatura y concentración, tienen un espesor mayor cuando la velocidad adimensional de transferencia de materia K es positiva (como en evaporación), y un espesor menor cuando K es negativo (como ocurre en condensación).

Los gradientes adimensionales de velocidad, temperatura y concentración, en la pared, $\Pi'(0, \Lambda, K)$, se obtienen a partir de la derivada de la Ec. 19.3-32:

$$\Pi'(0, \Lambda, K) = \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(-\Lambda \int_0^\eta f\, d\eta\right) d\eta} \tag{19.3-33}$$

En la Tabla 19.3— 1 se presenta un resumen de los valores calculados por integración numérica de esta fórmula.

Las densidades de flujo de cantidad de movimiento, energía y materia, en la pared, están dadas por las expresiones adimensionales

$$\frac{\tau_{yx}|_{y=0}}{\rho v_\infty (0 - v_\infty)} = \frac{\Pi'(0, 1, K)}{2} \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty x}} \tag{19.3-34}$$

$$\frac{q_y|_{y=0}}{\rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty)} = \frac{\Pi'(0, \Lambda_T, K)}{2\Lambda_T} \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty x}} \tag{19.3-35}$$

$$\frac{J_{Ay}^*|_{y=0}}{c v_\infty (x_{A0} - x_{A\infty})} = \frac{\Pi'(0, \Lambda_{AB}, K)}{2\Lambda_{AB}} \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty x}} \tag{19.3-36}$$

y los valores tabulados de $\Pi'(0, \Lambda, K)$. De esta forma se pueden calcular las anteriores densidades de flujo en función de la velocidad adimensional de transferencia de materia K. En el ejemplo 19.3— 1 se presenta la solución para la velocidad de transferencia de materia en función de x_{A0} y $x_{A\infty}$.

En unos pocos casos límite, los perfiles Π_T y Π_{AB} pueden obtenerse analíticamente. Por ejemplo, para pequeñas velocidades de transferencia de materia, K, y grandes valores de Λ_T (el número de Prandtl) o Λ_{AB} (el número de Schmidt), la capa límite térmica o difusional es mucho más delgada que la capa límite de velocidad, y basta con conocer el gradiente de velocidad en la pared para hallar los perfiles completos de temperatura y concentración $\Pi(\eta, \Lambda, K)$. Como se ve, una pequeña variación de K ejerce un marcado efecto sobre el perfil de temperatura o concentración cuando Λ es grande.

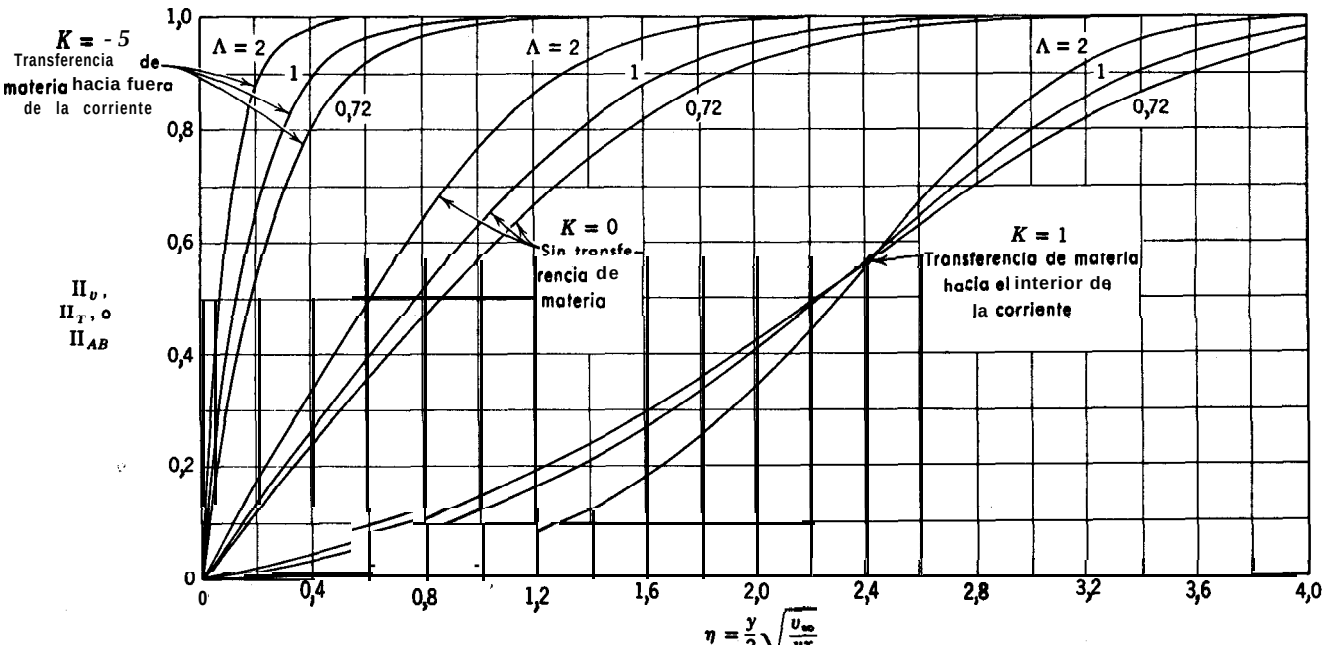


Fig. 19.3-2. Perfiles teóricos de velocidad, temperatura y composición, en la capa laminar límite existente sobre una lámina plana con transferencia de materia en la pared. [H. S. MICKLEY R. C. ROSS, A. L. SQUYERS y W. E. STEWART, *NACA Technical Note 3208* (1954).]

TABLA 19.3 –1

GRADIENTES ADIMENSIONALES DE VELOCIDAD, TEMPERATURA Y COMPOSICIÓN, CALCULADOS A PARTIR DE LA TEORÍA DE CAPA LAMINAR LÍMITE[a]

Gradiente adimensional 2 $\Pi'(0, \Lambda, K)$ para el límite de flujo

K	$\Lambda = 0{,}6$	$\Lambda = 0{,}7$	$\Lambda = 0{,}8$	$\Lambda = 0{,}9$	$\Lambda = 1{,}0$	$\Lambda = 1{,}1$	$\Lambda = 1{,}4$	$\Lambda = 2{,}0$	$\Lambda = 5{,}0$
1,0[e]	0,2321	0,2067	0,1831	0,1615	0,1419	0,1242	0,08219	0,03423	0,0002818
0,75[e]	0,4448	0,4290	0,4116	0,3933	0,3747	0,3560	0,3019	0,2098	0,02531
0,5[e]	0,6600	0,6644	0,6649	0,6626	0,6580	0,6516	0,6527	0,5587	0,2533
0,25[e]					0,9787				
0,0[c]	1,108	1,170	1,228	1,280	1,328[b]	1,374		1,689	
– 0,5[d]	1,579	1,716	1,845	1,970	2,092	2,213		3,193	
– 1,0[d]	2,069	2,288	2,501	2,709	2,916	3,121		4,892	
– 1,5[d]	2,576	2,885	3,189	3,487	3,784	4,080		6.699	
– 3,0[d]	4,174	4,765	5,354	5,943	6,529	7,115		12,41	
– 5,0[d]	6,417	7,402	8,388	9,374	10,36	11,35		20,26	

[a] Basados principalmente en los perfiles de velocidad obtenidos por H. SCHLICHTING y K. BUSSMANN, Schrift. d. deutsch· Akad. d. Luftfahrtforschung, *7B*, Heft 2 (1943); esta tabla está tomada de H. S. MICKLEY, R. C. ROSS, A. L. SQUYERS y W. E· STEWART, *NACA Tech, Note 3208* (1954).

[b] H. BLASIUS, *Z. angew. Math. Phys.*, *56*, 1, 1-37 (1908)
[c] E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.*, 1, 115-121 (1921)
[d] J. A. FEYK, *S. M. Thesis*, Massachusetts Institute of Technology (1949)
[e] R. C. ROSS, Comunicación privada (1950).

Para pequeñas velocidades de transferencia de materia ($|K| \ll 1$), el perfil de velocidad cerca de la pared es

$$\Pi_v = \left(\frac{1{,}328}{2}\right)\eta \tag{19.3-37}$$

Aquí se ha introducido el gradiente de velocidad para $\eta = 0$ y $K = 0$ que se indica en la tabla 19.3— 1. Aplicando las Ecs. 19.3-27 y 32 para pequeños valores de K y $\Lambda \gg 1$, se obtienes-

$$\Pi(\eta, \Lambda, K) \simeq \frac{\int_0^1 \exp\left(\Lambda K\eta - 1{,}328\Lambda\eta^3/3!\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(\Lambda K\eta - 1{,}328\Lambda\eta^3/3!\right) d\eta} \tag{19.3-38}$$

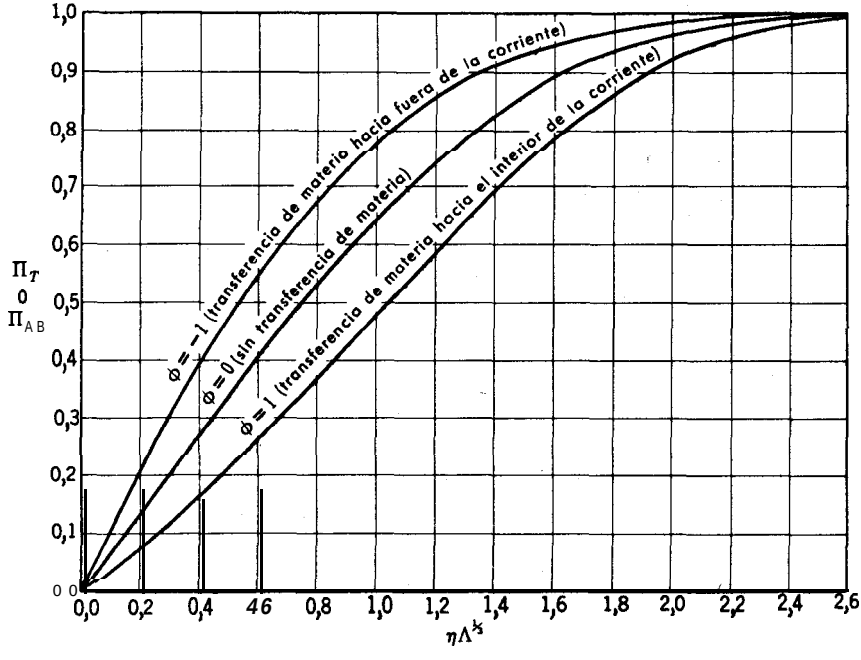


Fig. 19.3-3. Perfiles de temperatura o concentración para valores elevados del número de PRANDTL o SCHMIDT y diversas velocidades de transferencia de materia. El perfil de velocidad utilizado en estas soluciones corresponde a la línea $\Lambda = 1$ y $K = 0$ de la Fig. 19.3 -2.

[5] Se utiliza el símbolo $\simeq$ para representar una igualdad asintótica para grandes valores de Λ.

y, de acuerdo con la Ec. 19.3-33, el correspondiente gradiente de temperatura o concentración en la pared, es[6]

$$\Pi'(0, \Lambda, K) \simeq \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left(\Lambda K\eta - 1{,}328\Lambda\eta^3/3!\right) d\eta} \tag{19.3-39}$$

En los párrafos que siguen se discute la t valuación de los perfiles y los gradientes para pequeñas velocidades de transferencia de materia, K.

En el límite cuando $K \to 0$, los perfiles adquieren la forma

$$\lim_{K\to 0} \Pi(\eta, \Lambda, K) \simeq \frac{\int_0^\eta \exp\left(-1{,}328\Lambda\eta^3/3!\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-1{,}328\Lambda\eta^3/3!\right) d\eta} \tag{19.340}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{3}, u)}{\Gamma(\frac{1}{3}, \infty)} \tag{19.341}$$

siendo

$$u = 1{,}328\,\frac{\Lambda\eta^3}{3!} \tag{19.3-42}$$

y $\Gamma(x, u)$ es la función gamma incompleta.[7] Este perfil se representa en la Fig. 19.3 – 3 ; obsérvese que tiene, aproximadamente, la misma forma que los perfiles de la Fig. 19.3-2 para Λ finito y $K = 0$. De acuerdo con la Ec. 19.3-39, la pendiente del perfil en la pared es

$$\lim_{K\to 0} \Pi' y0, \Lambda, K) \simeq \frac{1}{\int_{\nu 0}^\infty \exp(-1{,}328\Lambda\eta^3/3!)\, d\eta}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3!}{1{,}328\Lambda}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1}$$

$$\doteq 0{,}6774\Lambda^{\frac{1}{3}} \tag{19.343}$$

Esta ecuación, para $\Lambda = 2$, se desvía sólo en 1 por ciento con respecto al resultado obtenido utilizando el perfil completo de velocidad y la concordancia es exacta

---

6 W. E. STEWART, Sc. *D. Thesis*, Massachusetts Institute of Technology (1951). Véase también H. S. MICKLEY, R. C. ROSS, A. L. SQUYERS y W. E. STEWART, *NACA TN 3208* (1954).

7 E. JAHNKE y F. EMDE, *Tables of Functions*, Dover, Nueva York (1945), cuarta edición, pp. 22. La función $\Gamma(x, \infty) = \Gamma(x)$ es la función gamma completa.

TABLA 19.3-2

COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE LOS GRADIENTES DE PERFIL PARA VELOCIDADES DESPRECIABLES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA

Λ	Valores previstos de $\Pi'(0, \Lambda, 0)$		
	Exactos[a]	Solución asintótica $\Pi'(0, \Lambda, 0) = 0{,}6774\Lambda^{1/3}$	Aproximación de Pohlhausen $\Pi'(0, \Lambda, 0) = 0{,}664\Lambda^{1/3}$
0,6	0,552	0,571	0,560
0,8	0,614	0,629	0,616
1,0	0,664	0,677	0,664
2,0	0,845	0,853	0,837
7,0	1,29	1,296	1,27
10,0	1,46	1,459	1,43
15,0	1,67	1,671	1,64

[a] A partir de las mismas citas bibliográficas que se indican en la Tabla 19.3 – 1.

cuando $\Lambda \to \infty$. En la Tabla 19.3-2 se presenta una comparación detallada. También se indican los resultados correspondientes a la ecuación

$$\Pi'(0, \Lambda, 0) \doteq 0{,}664\Lambda^{1/3} \qquad (19.3\text{-}44)$$

que fue obtenida por Pohlhausens mediante una curva de ajuste de los valores exactos, y que para valores inferiores a $\Lambda = 0{,}6$ el error es de ± 2 por ciento. Introduciendo la aproximación de Pohlhausen en las Ecs. 19.2-34, 35 y 36, se obtienen las siguientes analogías para bajas velocidades de transferencia de materia:

$$\frac{\tau_{yx}|_{y=0}}{\rho v_\infty(0 - v_\infty)} = \frac{q_y|_{y=0}}{\rho \hat{C}_p v_\infty(T_0 - T_\infty)}(\mathrm{Pr})^{2/3} = \frac{J^*_{Ay}|_{y=0}}{cv_\infty(x_{A0} - x_{A\infty})}(\mathrm{Sc})^{2/3} = 0{,}332\mathrm{Re}^{-1/2} \qquad (19.3\text{-}45)$$

siendo $\mathrm{Re} = v_\infty x/\nu$. Este resultado justifica las analogías de Chilton y Colburn (§§ 13.2 y 21.2) para este sistema de flujo cuando Pr o Sc son mayores que aproximadamente 1/2.

Para extender la solución analítica a velocidades de transferencia de materia algo más elevadas, se obtienen los perfiles a partir de la Ec. 19.3-38 desarrollando

[8] E. POHLHAUSEN, *Z. angew. Math. Mech.*, 1, 115-121 (1921).

en serie exp $(\Lambda K\eta)$ e integrando término a término. La solución para cualquier valor de $K \ll 1$ es

$$\Pi(\eta, \Lambda, K) \simeq \frac{\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\, u\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{m+1}{3}\, \infty\right)}{\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m} \qquad \textbf{(19.3–46)}$$

Como antes, u = 1,328 $\Lambda\eta^3/3$!, y el parámetro ϕ es una velocidad adimensional de transferencia :

$$\phi = \frac{KA}{\Pi'(0, \Lambda, \theta)} \qquad \text{‘(19.3-47)}$$

que, teniendo en cuenta la Ec. 19.3-43 para Λ grande; se transforma en

$$\phi \doteq \frac{K\Lambda^{\frac{1}{3}}}{0.6774} \qquad (19.3\text{-}48)$$

Los coeficientes c_m vienen dados por

$$c_m = \frac{1}{3}\,\frac{1}{m!}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{3}\right)\left[\Gamma\left(\tfrac{4}{3}\right)\right]^{-m-1} \qquad \textbf{(19.3–49)}$$

TABLA 19.3 - 3

EFECTO DE LA TRANSFERENCIA DE MATERIA SOBRE LOS GRADIENTES DE PERFIL PARA ELEVADOS NUMEROS DE PRANDTL 0 SCHMIDT[a]

Parámetro de densidad de flujo de materia $\lvert\phi\rvert$	$\frac{\Pi'(0, \Lambda, K)}{\Pi'(0, \Lambda, 0)}$ para ϕ positivo (transferencia de materia hacia la corriente)	$\frac{\Pi'(0, \Lambda, K)}{\Pi'(0, \Lambda, 0)}$ para ϕ negativo (transferencia de materia desde la corriente)
0,01	0,994	1,006
0,02	0,989	1,011
0,05	0,972	1,029
0,1	0,944	1,057
0,2	0,890	1,117
0,5	0,739	1,304
1,0	0,524	1,646
2,0	0,2300	2,421
3,0	0,0830	3,282
5,0	0,00613	5,140
∞	0	∞

[a] Los valores para $\lvert\phi\rvert < 5$ están tomados de W. E. STEWART, *Sc. D. Thais,* Massachusetts Institute of Technology (1951).

En la Fig. 19.3-3 se presentan algunos perfiles calculados a partir de la Ec. 19.3-46. Los perfiles son bastante semejantes a los de la Fig. 19.3-2 y presentan una variación análoga con la velocidad de transferencia de materia. Obsérvese que el parámetro ϕ, que determina la forma del perfil, puede tener un valor grande a pesar de la restricción de que $K \ll 1$, debido a que se supone que Λ es grande. (Véase Ec. 19.3-48.) Los gradientes de estos perfiles en la pared vienen dados por[6]

$$\frac{\Pi'(0, \Lambda, K)}{\Pi'(0, \Lambda, 0)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi^m \tag{19.3-50}$$

La relación de gradientes que interviene en esta ecuación es una medida adecuada del efecto de la transferencia de materia sobre las velocidades de transferencia en la interfase. En la Tabla 19.3-3 se dan algunos valores calculados a partir de esta ecuación; los resultados se interpretan y aplican en § 21.7 para varios problemas de transferencia de materia.

Ejemplo 19.3-1. Cálculo de la velocidad de transferencia de materia

Obtener una expresión para la velocidad local de sublimación desde la lámina que se indica en la Fig. 19.3-1 hacia la capa laminar límite. La fracción molar de A junto a la pared es $x_{A0} = 0{,}9$, la fracción molar de A en la corriente que llega es $x_{A\infty} = 0{,}01$, y el número de Schmidt es constante e igual a 2,0. Las propiedades físicas son constantes, y M_A y M_B son iguales.

Solución. Introduciendo en la Ec. 19.3-28 los términos conocidos, se obtiene

$$\frac{2K}{\Pi_{AB}'(0, 2, K)} = \frac{0{,}9 - 0{,}01}{1 - 0{,}9} = 8{,}9 \tag{19.3-51}$$

Para hallar K en esta ecuación se evalúa el primer miembro en función de K a partir de la Tabla 19.3-1:

K	$2\Pi'(0, 2, K)$	$2K/\Pi'(0, 2, K)$
1,00	0,03423	116,9
0,75	0,2098	14,30
0,50	0,5587	3,580
0,00	1,689	0,0000

Representando estos valores se encuentra que cuando $2K/\Pi'(0, 2, K) = 8{,}9$, $K = 0{,}65$. Por 10 tanto, la densidad de flujo local de materia viene dada por

$$K = \frac{2n_{A0}}{\rho v_\infty} \sqrt{\frac{v_\infty x \rho}{\mu}} = 0{,}65 \tag{19.3-52}$$

0

$$n_{A0} = 0{,}3 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty}{x}} \tag{19.3-53}$$

en la región $v_\infty x/\nu \gg 1$. En § 21.7 se simplifica y amplía este método para diversos problemas de transferencia de calor y materia.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Hasta dónde puede ampliarse la Tabla 19.0-1 para incluir analogías con transporte de cantidad de movimiento?

2. ¿Qué fenómenos físicos son descritos por la ecuación de conducción de calor y la ecuación de Laplace?

3. Demostrar que la Ec. 19.1 – 16 satisface la ecuación diferencial y las condiciones límite de las Ecs. 19.1 –7 a 10.

4. ¿Qué dificultades experimentales se pueden esperar al tratar de medir difusividades mediante el sistema descrito en el ejemplo 19.1 –1?

5. ¿Cuál es la utilidad del resultado del ejemplo 19.1 –2? Sugerir algunos problemas que puedan resolverse por este método.

6. Explicar cómo se halla la velocidad de movimiento de la zona de reacción en el ejemplo 19.1-3.

7. ¿Cómo se simplifica el resultado del ejemplo 19.1-3 si $\mathscr{D}_{AS} = \mathscr{D}_{BS}$?

8. Discútase, a partir de las Ecs. 19.1-50 y 51, el efecto de la reacción sobre las velocidades de absorción.

9. Obtener la Ec. 19.2-3 por el otro método que se sugiere en el texto.

10. Demostrar cuantitativamente que el método de capa limite utilizado en el ejemplo 19.2-1 predice realmente un efecto de difusión de barrido.

11. Demostrar cómo se deduce la Ec. 19.2-25.

12. ¿Es de esperar que la difusión térmica sea siempre importante en un caso de transferencia de materia de capa limite?

13. ¿Por qué los perfiles de las Figs. 19.3-2 y 3 dependen de la velocidad de transferencia de materia? Explíquelo a su modo.

14. Sugerir distintas situaciones físicas en las que podrían utilizarse los resultados de § 19.3.

PROBLEMAS

19.A_1 Estimación de la concentración puntual en la evaporación binaria difusional

Calcular x_A para $Z = 0{,}5$ en el sistema del ejemplo 19.1 – 1, para un líquido A cuya x_{A0} es igual a 0.75. Comparar el resultado con el de la. Fig. 19.1 – 1.

Respuesta: $x_A = 0{,}54$.

19.B_1 Velocidad de evaporación de n-octano

Hallar el número de gramos de n-octano líquido que a 20° C y 1 atm se evaporarán en el seno de N_2 durante 24,5 hr en un sistema como el que se ha considerado en el ejemplo 19.1 – 1, si el área de la superficie del liquido es 1,29 cm^2. La presión de vapor del n-octano a 20 °C es 10,45 mm Hg.

Respuesta: 6,71 mg

19.C_2 Resultados de capa Imite para evaporación binaria difusional

Evaluar $\psi^{(2)}_{\text{cap. lím.}}$ del ejemplo 19.2-1 utilizando el perfil de concentración $f(\zeta) = 1 - 2\zeta + 2\zeta^3 - \zeta^4$.

Respuesta: $\sqrt{\dfrac{3\pi}{10(1 - x_{A0})}}$

19.D$_3$ Absorción con reacción química en un medio semi-infinito

Consideremos un medio semi-infinito que se extiende desde el plano límite x = 0 hasta x = co. En el instante t = 0 la substancia A se pone en contacto con este medio en el plano x = 0, siendo la concentración superficial c_{A0} (para la absorción del gas A por el liquido B, c_{A0} seria la concentración de saturación). A y B reaccionan para producir C según una reacción irreversible de primer orden $A + B \rightarrow C$. Se supone que la concentración de A es pequeña, de forma que la ecuación que describe el proceso difusional es

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} - k_1''' c_A \qquad (19.D\text{–}1)$$

siendo k_1''' la constante de velocidad de reacción de primer orden. Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones inicial y limite:

C.I.:	para $t = 0$	$c_A = 0$	(19.D–2)
C.L.1:	para x = 0	$c_A = c_{A0}$	(19.D–3)
C.L.2:	para x = ∞	$c_A = 0$	(19.D–4)

y la solución es[1] :

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{1}{2}\exp\left(-x\sqrt{\frac{k_1'''}{\mathscr{D}_{AB}}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}t}} - \sqrt{k_1''' t}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(+x\sqrt{\frac{k_1'''}{\mathscr{D}_{AB}}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}t}} + \sqrt{k_1''' t}\right) \qquad (19.D\text{–}5)$$

a. Comprobar que la anterior solución satisface la ecuación diferencial y las condiciones límite.

b. Demostrar que la densidad de flujo molar de A en la interfase x = 0 es

$$N_A\Big|_{x=0} = c_{A0}\sqrt{\mathscr{D}_{AB}k_1'''}\left(\operatorname{erf}\sqrt{k_1''' t} + \frac{e^{-k_1''' t}}{\sqrt{\pi k_1''' t}}\right) \qquad (19.D\text{–}6)$$

c. Demostrar que los moles totales de A absorbidos desde el tiempo t = 0 hasta $t = t_0$ vienen dados por la expresión

$$\mathscr{M}_A = c_{A0}\sqrt{\mathscr{D}_{AB}t_0}\left[\left(\sqrt{k_1''' t_0} + \frac{1}{2\sqrt{k_1''' t_0}}\right)\operatorname{erf}\sqrt{k_1''' t_0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-k_1''' t_0}\right] \qquad (19.D\text{–}7)$$

d. Demostrar que para grandes valores de $k_1''' t_0$ la solución del apartado (c) se reduce asintóticamente a

$$\mathscr{M}_A = c_{A0}\sqrt{\mathscr{D}_{AB}k_1'''}\left(t_0 + \frac{1}{2k_1'''}\right) \qquad (19.D\text{–}8)$$

El error de esta ecuación[2] para valores de $k_1''' t_0 > 4$ es del orden del 2 por ciento.

---

[1] P. V. DANCKWERTS, *Trans. Faraday Soc.*, *46*, 300-304(1950).

[2] R. A. T. *0.* NIJSING, *Absorptie van gassen in vloeistoffen, zonder en met chemische reactie* Academisch Proefschrift, Delft (1957).

19.E$_3$ Difusión **no estacionaria en un sólido con reacción química y concentración cero en la superficie**

Demostrar que la solución de la Ec. 19.1-23 con

C.I.:	para $t = 0$	$c_A = c_0(x, y, z)$	(19.E−1)
C.L.:	en la superficie	$c_A = 0$	(19.E−2)
es	$c_A(x, y, z, t) = g(x, y, z, t) \cdot e^{k_1''' t}$		(19.E−3)

siendo $g(x, y, z, t)$ la solución de la Ec. 19.1-23 para $k_1''' = 0$, que cumple las condiciones de las Ecs. 19.E−1 y 2.

19.F$_3$ Transferencia simultánea de calor, materia y cantidad de movimiento: otras condiciones límite

Demostrar que los perfiles adimensionales $\Pi(\eta, \Lambda, K)$ satisfacen también las Ecs. 19.3-29, 30 y 31 (estando f y K definidos por las Ecs. 19.3-27 y 28) para las siguientes modificaciones del sistema de la sección § 19.3 − 1. Obtener una expresión de la constante K para reemplazar a la Ec. 19.3-28 en cada caso.

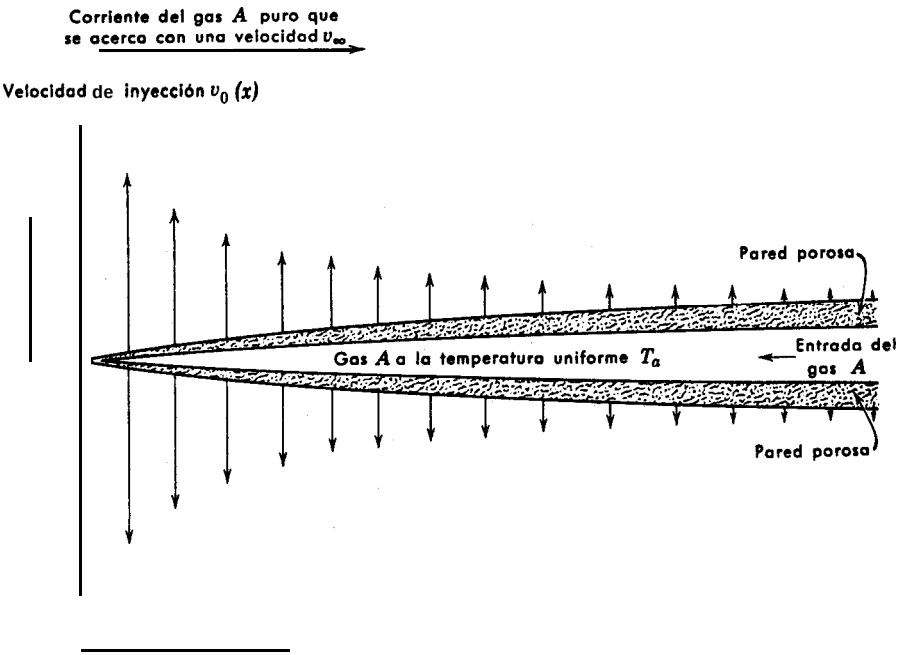


Fig. 19.F. Lámina porosa refrigerada por transpiración.

a. El mismo problema de § 19.3, excepto que la lamina es una plancha porosa saturada con las especies A y B, y la relación N_A/N_B es la misma para todos los puntos de la superficie.

b. La lámina de A se substituye por un sólido no volátil C que reacciona instantáneamente con el gas A para dar dos moles del gas B: C + A → 2B. Supóngase que $M_A = M_B$.

c. La lámina es hueca y se enfría por transpiración merced a la inyección del gas A frío todo alo largo de la lámina, con una distribución de densidad de flujo de materia tal que toda la superficie de la lámina está a una temperatura uniforme Ta. La temperatura del gas en el compartimento interior es constante e igual a T_a. La corriente que se acerca a la lámina está constituida por el gas A puro. Las demás suposiciones quedan como en § 19.3. (Véase Fig. 19.F.)

Respuestas:

$$a.\ K = \frac{1}{\Lambda_{AB}}\left(\frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\dfrac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}}\right)\Pi_{AB}'(0)$$

$$b.\ K = \frac{1}{\Lambda_{AB}}\left(\frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{-1 - x_{A0}}\right)\Pi_{AB}'(0)$$

$$c.\ K = \frac{1}{\Lambda_T}\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_a - T_0}\right)\Pi_T'(0)$$

19.G_3 Resolución de las ecuaciones de capa límite por el método de Picard

La Ec. 19.3-32 es la base de un proceso de iteración, rápidamente convergente, para el calculo de los perfiles de velocidad[3,4]. El procedimiento, para un cierto valor de K, consiste simplemente en ensayar un perfil de velocidad, introducirlo en el segundo miembro de la Ec. 19.3 -32, y evaluar las integrales para $\Lambda = 1$; la función $\Pi(\eta, 1, K)$ que resulta es una aproximación considerablemente mejorada del verdadero perfil de velocidad. Esto constituye un ejemplo del método de Picard[5] de integración sucesiva, que se ha utilizado mucho en los problemas de capa limite.

a. Tomar $\Pi_1 = A\eta$ como primera aproximación y determinar analíticamente la segunda aproximación del perfil de velocidad para $K = 0$ (sin transferencia de materia). Determinar numéricamente A haciendo que las aproximaciones primera y segunda den el mismo gradiente de velocidad en la pared. Comparar gráficamente la segunda aproximación con la solución exacta.

b. Calcular la forma límite de los perfiles de velocidad para $K \to -\infty$. Obsérvese que en este caso el resultado de la primera iteración es exacto, cualquiera que sea el perfil finito de ensayo Π_0.

c. Calcular los perfiles de temperatura y concentración para $K \to -\infty$. Esto no es una aplicación del método de Picard, puesto que la Ec. 19.3 -32 da una solución directa cuando se conoce f.

Respuestas b y c: $\Pi(\eta, \Lambda, K) = 1 - \exp(\Lambda K \eta)$.

19.H_4 Tamaño crítico de un sistema autocatalitico

Se desea utilizar el resultado del problema 19.E para discutir el tamaño crítico de un sistema en el que tiene lugar una «reacción autocatalítica». En un sistema de este tipo los productos de reacción incrementan la velocidad de reacción. Si la relación entre la superficie del sistema y el volumen del mismo es grande, los productos de la reacción tienden a escapar hacia los limites del sistema. Sin embargo, si la relación de superficie a volumen es pequeña, la velocidad de escape puede ser menor que la velocidad de formación, y la velocidad de reacción crecerá rápidamente. Para un sistema de forma determinada existirá un tamaño critico, para el cual, la velocidad de producción es exactamente igual a la velocidad de eliminación.

Un ejemplo lo constituye la fisión nuclear; en una pila nuclear la velocidad de fisión depende de la concentración local de neutrones. Si los neutrones se producen a una velocidad superior a la de escape por difusión, la reacción se automantiene y se produce una explosión nuclear.

---

3 N.A. V. PIERCY y J. H. PRESTON, *Phil. Mag., 21,* 995-1015 (1936).

4 H. SCHUH, Z. *arrgew. Math. Mech.* **23-27,** 54-50 (1947); *NACA Tech. Memo. 1275 (1950).*

5 Véase, por ejemplo, F. B. HILDEBRAND, *Advanced Calculus for Engineers,* Prentice-Hall, Nueva York (1949), pp. 107-109.

Un comportamiento análogo se encuentra también en muchos sistemas químicos, aunque en este caso el comportamiento es, en general, más complejo. Un ejemplo es la descomposición térmica del acetileno gaseoso, que es termodinámicamente inestable, de acuerdo con la reacción

$$H{-}C{\equiv}C{-}H \rightarrow H_2 + 2C \qquad (19.H\text{–}1)$$

Parece ser que esta reacción transcurre a través de una cadena ramificada mediante un mecanismo de radicales libres *en el* que éstos se comportan cualitativamente de igual forma que los neutrones en el ejemplo anterior, de forma que la descomposición es autocatalítica. De acuerdo con esto, el acetileno gaseoso puede almacenarse en condiciones de seguridad- en cilindros de hierro cuyo diámetro sea inferior al «crítico», que es tanto menor cuanto más elevada es la temperatura o la presión del gas. Si el tubo es demasiado grande, la formación de radicales libres podría dar lugar a un rápido aumento de la velocidad de descomposición y producirse una explosión.

a. Consideremos un sistema confinado en un largo cilindro en el que el proceso de difusión y reacción está representado por

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \mathscr{D}_{AB}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) + k_1''' c_A \qquad (19.H\text{–}2)$$

con $c_A = 0$ para r= R y $c_A = f(r)$ para $t = 0$, siendo f (r) una adecuada función de r. Utilii el resultado del problema 19.E para obtener una solución de c_A en función de r y t.

b. Demostrar que el radio critico del sistema es

$$R_{crit} = \alpha_1\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AB}}{k_1'''}} \qquad (19.H\text{–}3)$$

siendo α_1 el primer cero de la función J_0 de Bessel de orden cero.

c. Para el núcleo de un reactor nuclear cilíndrico sin recubrimiento6 (0,2 por ciento de uranio, 39,8 por ciento de aluminio, y 60 por ciento de agua, en volumen) el valor efectivo de $k_1'''/\mathscr{D}_{AB}$ es 9 x 10^{-3} cm^{-2}. ¿Cuál es el radio crítico?

Respuesta: c. $R_{crit} = 25.3$ cm

19.J$_4$ Difusión no estacionaria en un sólido con reacción química y transferencia de materia en la superficie[7,8]

Demostrar que la Ec. 19.1-23 puede resolverse utilizando la Ec. 19.1—26, cuando la condición limite de la Ec. 19.1-25 se substituye por

$$-(n \cdot \mathscr{D}_{AB}\nabla c_A) = k_c(c_{As} - c_{Af}) \qquad (19.1\text{-}1)$$

para las superficies del sólido. En esta expresión n es la normal dirigida hacia fuera, c_{Af} es la concentración en el fluido que rodea al sólido. y k_c es un coeficiente de transferencia de materia.

19.J$_4$ Difusión no estacionaria con reacción de primer orden

Deducir la Ec. 19.1-26. Comenzar por tomar el transformador de Laplace de la Ec. 19.1-23 y la correspondiente ecuación para f. Expresar el transformador de c_A en función del transformador de f; efectuar después la inversión para llegar a la Ec. 19.1-26.

---

6 R. L. MURRAY, *Nuclear Reactor Physics*, Prentice-Hall (1957), pp. 23, 30, 53.

7 P. V. DANCKWERTS, *Trans. Faraday Soc.*, 47, 1014-1023 (1951).

8 J. CRANK, *The Mathematics of Diffusion*, Oxford University Press (1956), pp. 124-125.

19.K$_4$ Difusión de interfase en estado no estacionario

Considérese la transferencia de materia de la substancia A entre el disolvente 1 y el disolvente II, que se consideraran totalmente inmiscibles. Se admite ademas que la concentración de A es suficientemente pequeña, de forma que se puede utilizar la segunda ley de Fick para describir la difusión en ambas regiones. Se desea resolver las ecuaciones de difusión:

$$\frac{\partial c_I}{\partial t} = \mathscr{D}_I \frac{\partial^2 c_I}{\partial z^2} \qquad -\infty < z < 0 \tag{19.K-1}$$

$$\frac{\partial c_{II}}{\partial t} = \mathscr{D}_{II} \frac{\partial^2 c_{II}}{\partial z^2} \qquad 0 < z < +\infty \tag{19.K-2}$$

siendo c_I la concentración de A en la fase 1, y c_{II} la concentración de A en la fase II. $\mathscr{D}_I$ y $\mathscr{D}_{II}$ son los coeficientes de difusión de A en las fases 1 y II. Las condiciones inicial y límite son

para $t = 0$	$c_I = c_I^\circ$	para $-\infty < z < 0$	(19.K–3)
para $t = 0$	$c_{II} = c_{II}^\circ$	para $0 < z < +\infty$	(19.K–4)
para $z = 0$	$c_{II} = mc_I$	paracualquiert<O	(19.K–5)
para $z = 0$	$-\mathscr{D}_I \frac{\partial c_I}{\partial z} = -\mathscr{D}_{II} \frac{\partial c_{II}}{\partial z}$		(19.K–6)
para $z = -\infty$	$c_I = c_I^\circ$		(19.K–7)
para z = + ∞	$c_{II} = c_{II}^\circ$		(19.K–8)

La primera condición lhnite para z = 0 pone de manifiesto la existencia de equilibrio en la interfase, siendo m un «coeficiente de distribución» o «constante de la ley de Henry». La segunda condición límite establece que la densidad de flujo molar calculada para z = 0 — es igual que para z = 0 + ; es decir, que no hay perdida de A en la interfase. Resolver estas ecuaciones simultáneas por medio del transformador-de Laplace[9], u otro método adecuado, con el fin de obtener estos perfiles de concentración:

$$\frac{c_I - c_I^\circ}{c_{II}^\circ - mc_I^\circ} = \frac{1 + \operatorname{erf} z/\sqrt{4\mathscr{D}_I t}}{m + \sqrt{\mathscr{D}_I/\mathscr{D}_{II}}} \tag{19.K-9}$$

$$\frac{c_{II} - c_{II}^\circ}{c_I^\circ - (1/m)c_{II}^\circ} = \frac{1 - \operatorname{erf} z/\sqrt{4\mathscr{D}_{II} t}}{(1/m) + \sqrt{\mathscr{D}_{II}/\mathscr{D}_I}} \tag{19.K-10}$$

19.L$_4$ Medida de difusividades gaseosas

Un tubo de difusión de longitud $2L$ y sección uniforme S contiene un tabique en el centro del tubo ($z = 0$) que se puede retirar en el instante $t = 0$ para permitir la difusión. En cada uno de sus extremos ($z = \pm L$) el tubo está conectado a un recipiente de volumen V provisto de agitadores que mantienen una concentración uniforme en el recipiente. Iniciahnente, la región $z > 0$ contiene el gas A puro, y la región $z < 0$ el B puro.

---

9 Véase, por ejemplo, W. R. MARSHALL, Jr., y R. L. PIGFORD, *Thr Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems*, University of Delaware Press, Newark, Delaware (1947). pp. 134-136. Los métodos de la transformación de Laplace han sido utilizados por E. J. SCOTT, L. H. TUNG y H. G. DRICKAMER, *J. Chem. Phys.*, 19, 10751078 (1951) para la resolución del mismo problema sin suponer que existe equilibrio en la interfase.

a. Demostrar que la concentración de ***A*** en los recipientes **al** cabo del tiempo ***t*** viene dada porto

$$x_A = \tfrac{1}{2}\left[1 \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2N}{\gamma_n} \frac{\sqrt{\gamma_n^2 + N^2}}{\gamma_n^2 + N^2 + N} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 \mathscr{D}_{AB} t}{L^2}\right)\right] \qquad \textbf{(19.L-1)}$$

siendo γ_n la raíz ***n*-ésima** de γ tan γ = N, y N = SL/V. El signo $\pm$ corresponde a los recipientes conectados a $\pm L$.

b. Comparar numéricamente los resultados de la **Ec. 19.L−1** con las medidas experimentales de **Andrew.**[11]

---

10 R. B. **BIRD,** ***Advances in Chemical Engineering,*** vol. ***I,*** **Academic Press,** Nueva York (1956). p. 207.

11 **S.** P. S. **ANDREW,** *Chem. Eng. Sci., 4, 269-272* (1955).

CAPÍTULO 20

DISTRIBUCIONES DE CONCENTRACIÓN EN FLUJO TURBULENTO

En los capítulos anteriores se han deducido las ecuaciones de difusión en un sólido o en un líquido, y se ha visto cómo pueden obtenerse expresiones para la distribución de concentración cuando el flujo no es turbulento. En este capítulo se considera el transporte turbulento de materia, del que actualmente se conoce bastante poco.

La discusión que se presenta aquí es semejante a la del Capítulo 12. En realidad se da un tratamiento bastante corto debido a que muchas cuestiones se deducen por analogía. En este capítulo se consideran solamente sistemas binarios isotérmicos cuya densidad ρ y difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ son, aproximadamente, constantes. Por consiguiente, la ecuación entre derivadas parciales que describe la difusión en un fluido en movimiento (Ec. 18.1— 17) tiene exactamente la misma forma que la del transporte de calor en un fluido incompresible (Ec. 10.1—25), excepto que aquélla incluye un término de reacción química.

§ 20.1 FLUCTUACIONES DE CONCENTRACIÓN Y LA CONCENTRACIÓN DE TIEMPO AJUSTADO

Por analogía, pueden aplicarse aquí los comentarios que con respecto al aspecto físico se han hecho en § 12.1. En este caso se operará en función de la concentración molar c_A. En una corriente turbulenta, c_A será una función del tiempo, que oscila rápidamente. Por lo tanto, es conveniente substituir c_A por la suma de un valor de tiempo ajustado $\bar{c}_A$ y una fluctuación de concentración turbulenta c_A' :

$$c_A = \bar{c}_A + c_A' \tag{20. l-l}$$

de forma análoga a la Ec. 12.1— 1 para la temperatura. Teniendo en cuenta la definición de c'_A, resulta que $\overline{c'_A} = 0$. Sin embargo, los términos tales como $\overline{v_x' c'_A}$, $\overline{v'_y c'_A}$, y $\overline{v'_z c'_A}$ son distintos de cero, debido a que las fluctuaciones locales de velocidad y concentración no son independientes entre sí. Los perfiles de concentración de tiempo ajustado $\bar{c}_A(x, y, z, t)$ son los que se hallarían, por ejemplo, tomando muestras de la corriente. Para el caso del flujo en un tubo con transferencia de materia en la pared del mismo, es de esperar que en el núcleo turbulento, en el que predomina el transporte de remolino, la concentración de tiempo ajustado $\bar{c}_A$ sólo variará

ligeramente. Sin embargo, para la corriente que se mueve lentamente junto a la pared, la concentración $\bar{c}_A$ debe de variar rápidamente a lo largo de una pequeña distancia, desde el valor en el **núcleo** turbulento hasta el valor en la pared. Por lo tanto, el pronunciado gradiente de concentración esta relacionado con el lento proceso de difusión molecular en la subcapa laminar, en oposición al rápido transporte de remolino que tiene lugar en el núcleo turbulento totalmente desarrollado.

§ 20.2 AJUSTE DE TIEMPO DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DE *A*

Comenzamos con la ecuación de continuidad de la substancia ***A,*** la cual se supone que es eliminada de acuerdo con una reacción química1 de orden ***n.*** **(Véase Ec.** 18.1-17.)

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} v_x c_A + \frac{\partial}{\partial y} v_y c_A + \frac{\partial}{\partial z} v_z c_A\right) + \mathscr{D}_{AB}\left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2}\right) - k_n''' c_A{}^n \qquad (20.2\text{-}1)$$

En esta expresión k_n''' es la constante de velocidad de reacción para la reacción homogénea de orden n, y se supone que k_n''' es independiente de la posición. En las ecuaciones 'que siguen se considerará n = 1 y n = 2 con el fin de poner de manifiesto la diferencia entre una reacción de primer orden y otra de orden superior.

Substituyendo c_A y v_i por $\bar{c}_A + c_A'$ y $\bar{v}_i + v_i'$, y promediando el tiempo, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{c}_A}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_x \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_y \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z \bar{c}_A\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{\overline{v_x' c_A'}} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\overline{v_y' c_A'}} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\overline{v_z' c_A'}}\right) + \mathscr{D}_{AB}\left(\frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial z^2}\right) - \begin{cases} k_1''' \bar{c}_A & \text{o} \\ k_2'''(\bar{c}_A{}^2 + \underline{\overline{c_A'^2}}) \end{cases} \qquad (20.2\text{-}2)$$

Comparando esta ecuación con la **Ec.** 20.2-1 se observa que la ecuación de tiempo ajustado difiere solamente en la aparición de algunos términos adicionales (subrayados con una línea de puntos). Los términos que contienen $v_i' c_A'$ describen el transporte turbulento de materia, y el componente i de esta densidad de flujo se designa por $\bar{J}_i^{(t)}$. Se obtiene así la tercera de las densidades de flujo turbulento, que podemos resumir en esta forma:

[1] S. CORRSIN, *Physics of Fluids,* 1, 42-47 (1958).

densidad de flujo turbulento de cantidad de movimiento (tensor)
$$\bar{\tau}_{ij}^{(t)} = \rho v_i' v_j' \qquad (20.2-3)$$

densidad de flujo turbulento de **energía** (vector)
$$\bar{q}_i^{(t)} = \overline{\rho \hat{C}_p v_i' T'} \qquad (20.2-4)$$

densidad de flujo turbulento de materia (vector)
$$\bar{J}_i^{(t)} = v_i' c_A' \qquad (20.2-5)$$

Todas estas expresiones están definidas como densidades de flujo con respecto a la velocidad másica media.

Es interesante observar que existe una diferencia esencial entre el comportamiento de las reacciones químicas de diferente; órdenes. La reacción de primer orden está descrita por **una** ecuación diferencial lineal, y el. termino de reacción química tiene la misma forma en la ecuaciónde tiempo ajustado que en la ecuación original. La reacción de segundo orden está descrita por una ecuación no lineal, y el **ajuste** de tiempo da lugar al término **adicional** $-k_2''' \overline{c_A'^2}$. Es decir, para una reacción de primer orden la velocidad media de conversión es independiente de las fluctuaciones de concentración, mientras que para reacciones de orden superior es de prever una variación considerable con dichas fluctuaciones.

A continuación se resumen las tres ecuaciones de variación de tiempo ajustado para el flujo turbulento de una mezcla **isotérmica** de dos fluidos de ρ, $\mathscr{D}_{AB}$, y μ, constantes :

ecuación de continuidad de tiempo ajustado
$$(\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \qquad (20.2\text{-}6)$$

ecuación de movimiento de tiempo ajustado
$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot \bar{\tau}^{(l)}] - [\nabla \cdot \bar{\tau}^{(t)}] + \rho g \qquad (20.2\text{-}7)$$

ecuación de continuidad de A de tiempo ajustado
$$\frac{D\bar{c}_A}{Dt} = -(\nabla \cdot \bar{J}_A^{(l)}) - (\nabla \cdot \bar{J}_A^{(t)}) - \begin{cases} k_1''' \bar{c}_A & \text{o} \\ k_2''' (\bar{c}_A^2 + \overline{c_A'^2}) \end{cases} \qquad (20.2\text{-}8)$$

siendo $\bar{J}^{(l)} = -\mathscr{D}_{AB} \nabla \bar{c}_A$, y la velocidad que interviene en el operador D/Dt es la velocidad de tiempo ajustado $\bar{v}$.

§ 20.3 EXPRESIONES **SEMIEMPÍRICAS** PARA LA DENSIDAD DE FLUJO TURBULENTO DE MATERIA

Para resolver la **Ec.** 20.2-8 es preciso relacionar la densidad de flujo turbulento de materia $\bar{J}^{(t)}$, que aparece en la **Ec. 20.2—8,** con $\bar{c}_A$ o su gradiente. También en

este caso, lo mismo que para las densidades de flujo turbulento de energía y cantidad de movimiento, se dispone de varias expresiones semiempíricas. Como quiera que son totalmente análogas a las que se han expuesto en § 12.3, aquí nos limitaremos casi exclusivamente a presentarlas:

La difusividad de remolino*

Por analogía con la ley de difusión de Fick,

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -\mathscr{D}_{AB}^{(t)} \frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{20.3-1}$$

en la que $\mathscr{D}_{AB}^{(t)}$ es la «difusividad turbulenta» o «difusividad de remolino». Debido a la analogía entre transferencia de calor y materia, se acostumbra admitir que $\mathscr{D}_{AB}^{(t)}/\alpha^{(t)} = 1$, siendo $\alpha^{(t)}$ la difusividad térmica de remolino. Se admite también que $\nu^{(t)}/\alpha^{(t)}$ está comprendido entre 0,5 y 1. (Véase § 12.3.)

Expresiones de la longitud de mezcla de Prandtl y Taylor

Por analogía con la Ec. 12.3-2,

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -l^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{20.3-2}$$

En esta expresión l es la longitud de mezcla, que para el flujo en conducciones se toma, generalmente, igual a $\kappa_1 y$, siendo y la distancia medida desde la pared.

Expresión basada en la hipótesis de semejanza de von Kármán

Por analogía con la Ec. 12.3-3,

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -\kappa_2^2 \left|\frac{(d\bar{v}_x/dy)^3}{(d^2\bar{v}_x/dy^2)^2}\right| \frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{20.3-3}$$

en la que κ_2 es la misma constante que aparece en las Ecs. 5.3-3 y 12.3-3.

Fórmula empírica de Deissler para la región próxima a la pared

Por analogía con la Ec. 12.3-4, Deissler propuso la expresión

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -n^2 \bar{v}_x y \left[1 - \exp\left(\frac{-n^2 \bar{v}_x y}{\nu}\right)\right] \frac{d\bar{c}_A}{dy} \tag{20.3-4}$$

siendo aquí n la misma constante que se utiliza en las Ecs. 5.3-4 y 12.3-4.

---

1 Para un resumen de las medidas experimentales de la difusividad de remolino, véase T. K. SHERWOOD Y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), capítulo II y J. B. OPFELL y B. H. SAGE, *Turbulence in Thermal and Material Transport*, capítulo de *Advances in Chemical Engineering*, vol. I, pp. 242-290 (1956).

Ejemplo 20.3-1. Perfiles de concentración para el flujo turbulento en tubos circulares lisos

Utilizar la analogía entre transferencia de calor y materia para expresar los resultados clave del ejemplo 12.3 -1, para la transferencia turbulenta de materia en tubos con densidad de flujo de materia constante en la pared.

Solución. En primer lugar, obsérvese que, sin los términos de reacción química, la Ec. 20.2-1 tiene exactamente la misma forma que la Ec. 12.2−1 sin los términos de disipación viscosa. En el ejemplo 12.3-1 se ha detenido la solución para transación de calor sin disipación viscosa; por 10 tanto, efectuando los adecuados cambios de notación, será válida para transferencia de materia sin reacciones químicas. La concentración adimensional c_A^+ se define mediante la expresión:

$$c_A^+ = \frac{v_*(\bar{c}_A - c_{A0})}{N_{A0}} \tag{20.3-5}$$

y por analogía con las Ecs. 12.3-19 y 12.3 -22, se expresan los perfiles de concentración*:

$$c_A^+ - c_{A1}^+ = \frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{s^+}{s_1^+} \qquad s^+ \geq 26 \tag{20.3-6}$$

$$c_A^+ = \int_0^{s^+} \frac{ds^+}{\frac{1}{Sc} + n^2 v^+ s^+ [1 - \exp(-n^2 v^+ s^+)]} \qquad s^+ < 26 \tag{20.3-7}$$

donde v^+ viene dada por la Ec. 5.3 -- 15, y Sc, el número de Schmidt, substituye al número de Prandtl. Al expresar la solución analógica se ha supuesto que la velocidad de transferencia de materia en la pared, N_{A0}, es suficientemente pequeña, de forma que no se perturban los modelos de flujo; los efectos de elevadas velocidades de transferencia de materia se estudian en el Capítulo 21. La conclusión de la discusión que antecede es que se puede utilizar la Fig. 12.3-2 para los cálculos de transferencia de materia, con tal de que se substituya T^+ por c_A^+ y Pr por Sc.

Ejemplo 20.3-2. Evaporación de amoniaco en una columna de pared mojada

Por la superficie exterior de un tubo cilíndrico de 5 cm de diámetro desciende amoniaco acuoso a 20° C. Por el interior del tubo asciende aire saturado con agua, con un número de Reynolds de 25.000. Para mezclas diluidas de amoniaco en aire, el número de Schmidt Sc = $\mu_{\text{aire}}/\rho_{\text{aire}} \mathcal{D}_{\text{aire-NH}_3}$ vale 0,61. El factor de fricción para la corriente ascendente de aire puede tomarse como 0,007. Representar gráficamente el petlil de concentración en la columna.

Solución. Para los cálculos se necesitan los siguientes vaiores:

$$\nu_{\text{aire}} = \frac{\text{Paire}}{\text{Paire}} = 0{,}146 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$$

$$\langle \bar{v} \rangle = \frac{(25.000)(0{,}146)}{(5)} = 730 \text{ cm seg}^{-1}$$

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\tfrac{1}{2} f \langle v_z \rangle^2} = 43{,}2 \text{ cm seg}^{-1}$$

2 Estos resultados corresponden a R. G. DEISSLER, *NACA Report* 1210 (1955).

Por lo tanto, en el centro del tubo

$$s^+ = \frac{sv_*}{\nu} = \frac{(2,5)(43,2)}{0,146} = 740$$

Éste es el valor más alto de s^+ que se encuentra.

Los perfiles de concentración de NH_3 vienen, por consiguiente, dados por

$$c^+_{NH_3} = \int_0^{s^+} \frac{ds^+}{1,64 + 0,0154 s^+ v^+ [1 - \exp(-0,0154 s^+ v^+)]} = \int_0^{s^+} X\, ds^+$$

$$(0 < s^+ < 26) \qquad (20.3\text{-}8)$$

$$c^+_{NH_3} = 9,3 + 2,78 \ln \frac{s^+}{26} = -0,3 + 2,78 \ln s^+ \qquad (26 < s^+ < 740) \qquad (20.3\text{-}9)$$

En la tabla 20.4—1 se dan los resultados del cálculo.

TABLA 20.3—1

CÁLCULO DE PERFILES DB CONCENTRACIÓN

v^+	s^+	X^{-1}	$X = \frac{dc^+_{NH_3}}{ds^+}$	$c^+_{NH_3}$
0	0	1,64 + 0	0,61	0
1				
1,5	1,5	1,64 + 0,0002	0,61	0,92
2,0	2,0	1,64 + 0,004	0,61	1,2
3.0	3,1	1,64 + 0,02	0,60	1,9
5,0	5,2	1,64 + 0,13	0,57	3,1
7,5	8,6	1,64 + 0,66	0,44	4,9
10,0	15,0	1,64 + 2,10	0,27	7,0
13,0	26,0	1,64 + 5,19	0,15	9,3
	100			10,6
	200			12,5
				14,5
	400			16,4
	740			18,1

En las Figs. 20.3-- 1 y 20.3- 2 se representan, respectivamente, los valores de X y $c^+_{NH_3}$ $c^+_{NH_3}$(ctr) frente a s^+. Se observa que la contribución del núcleo turbulento ala resistencia global es considerable, y que el perfil de concentración presenta un cambio brusco de la pendiente en el centro de la conducción. Este cambio brusco no ocurre en la realidad sino que representa un defecto inherente a la distribución simplificada de la densidad de flujo. En el presente caso el error que se comete utilizando esta expresión no es muy grande, pero a bajos números de Schmidt puede ser considerable. Para números de Schmidt más elevados, donde casi toda la variación de concentración tiene lugar en la zona de transición, este error es despreciable.

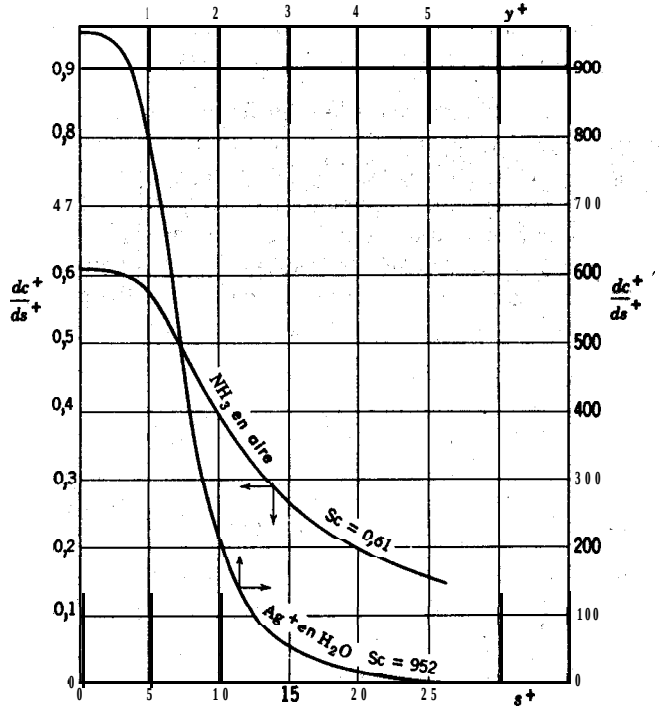


Fig. 20.3—1. Gradientes de concentración para la evaporación de amoniaco en un tubo con flujo turbulento; también se representan los gradientes de concentración para la electrodeposición de plata en un electrodo. (Véase el problema 20.8.)

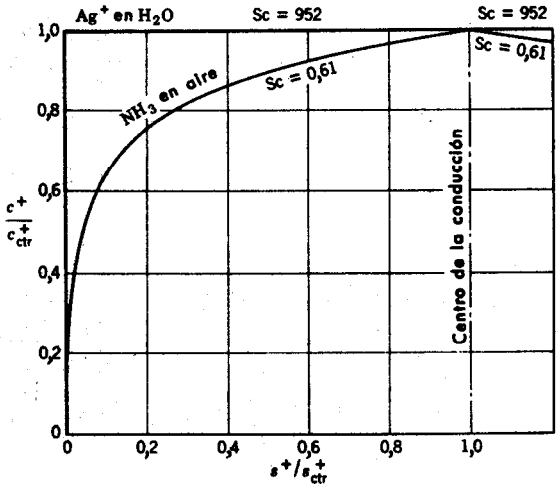


Fig. 20.3—2. Perfiles de concentración para el flujo turbulento en un *tubo.*

§ 20.4 LA DOBLE CORRELACIÓN DE CONCENTRACIÓN Y SU PROPAGACIÓN! ECUACIÓN DE CORRSIN

El método estadístico utilizado para la transferencia turbulenta de calor se ha extendido a la transferencia de materia con reacciones químicas.* El tratamiento es idéntico al de § 12.4, de forma que aquí se dará solamente el resultado. En primer lugar, vamos a definir las funciones adimensionales V_{Ai}, W_A y Q_{Ai}, de igual forma que las correlaciones correspondientes a las Ecs. 12.4— 1, 2 y 3, reemplazando siempre T' y T'' por c'_A y c''_A. Definimos también w_A y q_A como funciones análogas a w y q de las Ecs. 12.4-5 y 6. Por lo tanto, la ecuación análoga a la Ec. 12.4-10 para turbulencia isotrópica homogénea con reacción química de primer orden, es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{c_A'^2} w_A) - 2\overline{c_A'^2}\sqrt{\overline{v'^2}}\left(\frac{\partial q_A}{\partial r} + 2\frac{q_A}{r}\right) = 2\mathscr{D}_{AB}\,\overline{c_A'^2}\left(\frac{\partial^2 w_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w_A}{\partial r}\right) - 2k_1'''\overline{c_A'^2} w_A \qquad (20.4\text{-}1)$$

que fue deducida por Corrsin.[1] Este resultado difiere de la Ec. 12.4-10 solamente en que aparece un término adicional para la reacción química.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. Discútanse las semejanzas y diferencias entre el transporte turbulento de calor y materia.
2. Discútase el comportamiento de las reacciones químicas de primer orden y orden superior, por lo que respecta al ajuste de tiempo de la ecuación de continuidad para una determinada especie. ¿Qué consecuencias se deducen de esto?
3. ¿Cómo están relacionadas entre sí la difusividad, conductividad y viscosidad de remolino?
4. ¿Cuál es la analogía de transferencia de materia equivalente a la analogía de Reynolds que se ha estudiado en § 12.3 ?
5. Interpretar las curvas de las Figs. 20.3-1 y 2 en función de las tres regiones hipotéticas: núcleo turbulento, zona de transición y subcapa laminar.
6. ¿Cómo pueden medirse difusividades de remolino? ¿De qué dependerán?

PROBLEMAS

20.A$_1$ Determinación de la difusividad de remolino

En el problema 17.K se ha dado la fórmula correspondiente a los perfiles de concentración para la difusión desde un manantial puntual hacia una corriente en movimiento. Para flujo isotrópico altamente turbulento, la Ec. 17.K—2 puede modificarse substituyendo $\mathscr{D}_{AB}$ por $\mathscr{D}_{AB}^{(t)}$. Por lo tanto, la ecuación puede utilizarse para determinar la difusividad turbulenta o de remolino.

---

[1] S. CORRSIN, *Physics of Fluids, 1, 42-47 (1958).*

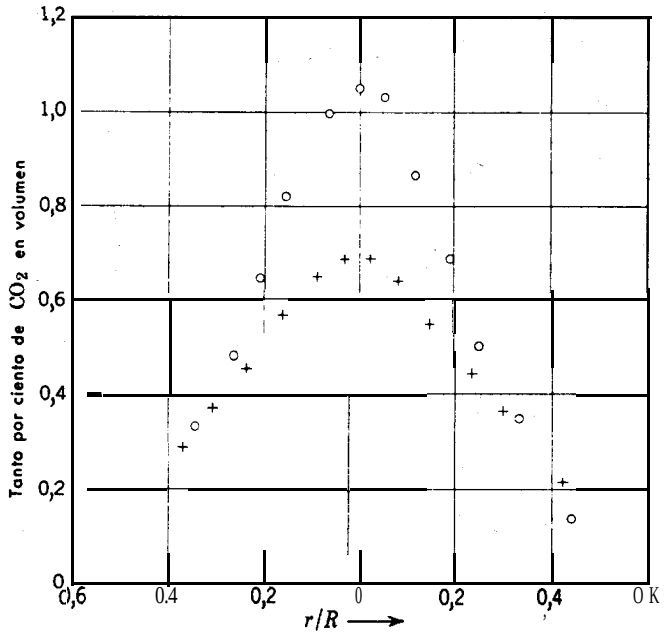


Fig. 20.A. Datos de **concentración** transversal para CO_2 inyectado en el interior de una corriente turbulenta de aire en un tubo de **15,24** cm de diámetro. El número de Reynolds para el **flujo es** 119.000. Los círculos representan concentraciones para z = **112,5** cm, y las cruces para **152,7** cm. Los puntos experimentales están tomados de W. L. **TOWLE y T. K. SHERWOOD,** *Znd. Eng. Chem.*, 31, 457-462 (1939).

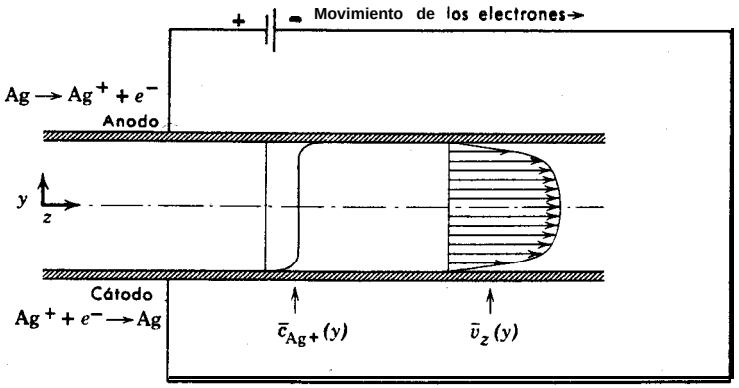


Fig. 20.B. **Electrodeposición** de Ag+ desde una corriente turbulenta que circula en la **dirección** $+z$ entre dos láminas paralelas.

a. Demostrar que si se representa $\ln sc_A$ frente a $(s - z)$, la pendiente es $-v_0/2\mathscr{D}_{AB}^{(i)}$.

b. Utilizar los datos de la difusión de CO_2 desde un manantial puntual hacia una corriente turbulenta de aire (vtase Fig. 20.A) con el fin de obtener $\mathscr{D}_{AB}^{(i)}$ para estas condiciones: diámetro del tubo 15,24 *cm, y* v_0 = 15,12 *m* seg^{-1}

Respuesta: $\mathscr{D}_{AB}^{(i)} = 19\ cm^2\ seg^{-1}$

20.B_3 Deposición de plata desde una corriente turbulenta

Una solución de KNO_3, aproximadamente O,lN, que contiene 1,00 x 10^{-6} eq-g dt. Ag NO_3 por litro, fluye entre dos láminas paralelas de Ag, tal como se indica en la Fig. 20.B. Con el fin de depositar Ag sobre el cátodo (lámina inferior) y polarizar completamente el circuito (es decir, mantener la concentración de Ag+ muy próxima a cero en el cátodo) se aplica un pequeño voltaje entre las láminas. En estas condiciones (véase ejemplo 18.P), se puede despreciar la difusión forzada y considerar que el ión Ag+ se mueve hacia el cátodo por difusión ordinaria y de remolino exclusivamente. Por otra parte, la disolución es suficientemente diluida (véase ejemplo 18.5–4), de forma que los efectos de las demás especies iónicas sobre la difusión de Ag-t son despreciables.

a. Calcular el perfil de concentración de Ag+, suponiendo: (i) que la difusividad binaria efectiva de Ag+ a través de agua es 1,06 x 10^{-5} $cm^2\ seg^{-1}$, y que la viscosidad cinemática del agua es 1,01 x 10^{-2} $cm^2\ seg^{-1}$; (ii) que la distribución de velocidad de Deissler-Prandtl para conductos circulares es válida también para el «flujo en rendijas», si se substituye el diámetro del tubo por el cuádruplo del radio hidráulico; (iii) que las láminas están a una distancia de 1.27 cm. y $\sqrt{\tau_0/\rho}$ vale 11,4 cm seg^{-1}.

b. Estimar la velocidad 'de deposición. de plata sobre el cátodo, despreciando todas las demás reacciones de electrodo.

c. ¿Predice el método de cálculo del apartado *(a)* una pendiente discontinua para el perfil de concentración en el plano central del sistema? Explíquese.

Respuestas: *a.* Véanse las Figs. 20.3-1 y 2
b. 6.7 x 10^{-12} eqvts seg^{-1} cm-2

CAPÍTULO 21

TRANSPORTE DE INTERFASE EN SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES

Las correlaciones de las velocidades de transferencia de materia en una interfase son muy utilizadas para el análisis ingenieril de procesos tales como destilación, absorción, extracción, secado y reacciones químicas heterogéneas. Estas correlaciones son en gran parte empíricas, debido a que, en general, los procesos son demasiado complejos para analizarlos detalladamente. Sin embargo, las ecuaciones de variación del Capítulo 18 proporcionan una base-adecuada para la elección de los grupos adimensionales de correlación, y cada vez enouentran mayor utilidad para el análisis y extrapolación de los datos experimentales.

Este capítulo es una ampliación de los Capítulos 6 y 13 en los que se han considerado las correlaciones de transmisión de calor y cantidad de movimiento entre un fluido y un sólido que lo limita. Aquí se utiliza la correlación de velocidades de transferencia de materia en la interfase, extendiendo a mezclas los resultados de los Capítulos 6 y 13.

En § 21.1 se resumen las definiciones de los coeficientes de transferencia de materia para mezclas binarias. En § 21.2 se dan algunas reglas sencillas para predecir coeficientes de transferencia de materia para uno de los lados de la fase límite, a bajas velocidades de transferencia de materia, utilizando las analogías entre transferencia de calor y materia. En § 21.3 se discute brevemente el cálculo de la transferencia de materia fluido-fluido para ambos lados de la interfase, basándose en la teoría de doble película de Whitman. Es preciso tener en cuenta que los resultados de §§ 21.2 y 21.3 están restringidos para sistemas binarios y bajas velocidades de transferencia de materia. En § 21.4 se definen coeficientes de transferencia de materia, calor y cantidad de movimiento, para sistemas binarios con elevadas velocidades de transferencia de materia y en las tres secciones siguientes se aborda la predicción de estos coeficientes mediante la teoría de película, la teoría de penetración y la teoría de capa límite. Finalmente, en § 21.8 se indican los métodos de estimación de coeficientes de transferencia en sistemas de varios componentes.

En este capítulo nos limitamos a considerar unas cuantas cuestiones clave sobre la transferencia de materia, y correlaciones con ella relacionadas, con el fin de intro-

ducir al lector a este tema que se está desarrollando con mucha rapidez. Una mayor información puede encontrarse en otros libros de transferencia de materia[1,2,3,4,5].

§ 21.1 DEFINICIÓN DE COEFICIENTES BINARIOS DE TRANSFERENCIA DE MATERIA EN UNA SOLA FASE

En este capítulo se estudia el movimiento de materia a través de una interfase. La interfase puede ser una verdadera fase límite, como en la Fig. 21.1— 1, o una pared porosa, como en la Fig. 21.1-2. La transferencia de materia puede tener lugar en presencia de dos especies, como en la Fig. 21.1— 1, o bien en un fluido puro como en la Fig. 21.1-2. En la mayor parte de los sistemas de transferencia de materia intervienen mezclas cuya composición varía, y en estos casos los coeficientes de transferencia de materia constituyen un medio conveniente de presentar los datos experimentales para diseño.

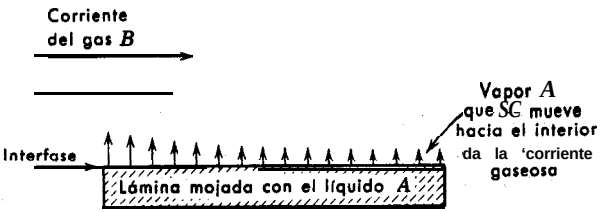


Fig. 21.1-1. Ejemplo de transferencia de materia a través de una fase límite: secado de una lámina saturada.

Consideremos el flujo de una corriente' A y B a lo largo de una superficie de transferencia de materia y = 0, a través de la cual las especies A y B penetran en la corriente con velocidades locales N_{A0} y N_{B0} moles/(unidad de área) (unidad de tiempo). En la Fig. 21.1-3 se representa un sistema típico que muestra la forma en que se aplican a un caso concreto los términos que se útilizanaquí. Obsérvese que N_{A0} y N_{B0} son los componentes de las densidades de flujo N_A y N_B en la interfase, medidas hacia el interior de la fase considerada; esta fase en la Fig. 21.1-3 es la gaseosa. El movimiento de cada especie a través de la interfase puede expresarse como la suma de una contribución difusional y una contribución de flujo global

---

1 T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952).

2 R. E. TREYBAL, *Mass Transfer Operations*, McGraw-Hill, Nueva York (1952).

3 A. P. COLBURN y R. L. PIGFORD, «General Theory of Diffusional Operations», Sección 8 de *Chemical Engineers' Hundbook*, J. H. Perry (Ed.), McGraw-Hill, Nueva York (1950).

4 W. M. RAMM, *Absorptionsprozesse in der chemischen Industrie*, Verlag Technik Berlin (1952).

5 W. MATZ, *Die Thermodynamik des Wärme- und Stoffaustausches in der Verfahrenstechnik*, Steinkopff, Frankfurt-am-Main (1949).

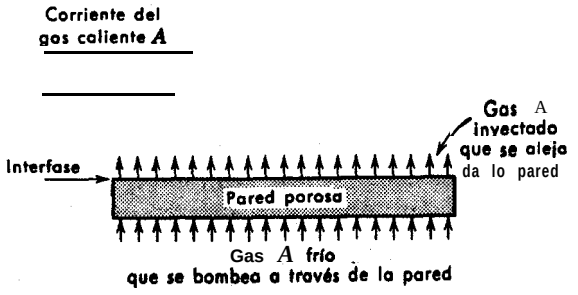


Fig. 21.1-2. Ejemplo de transferencia de materia a través de una pared porosa: enfriamiento por transpiración.

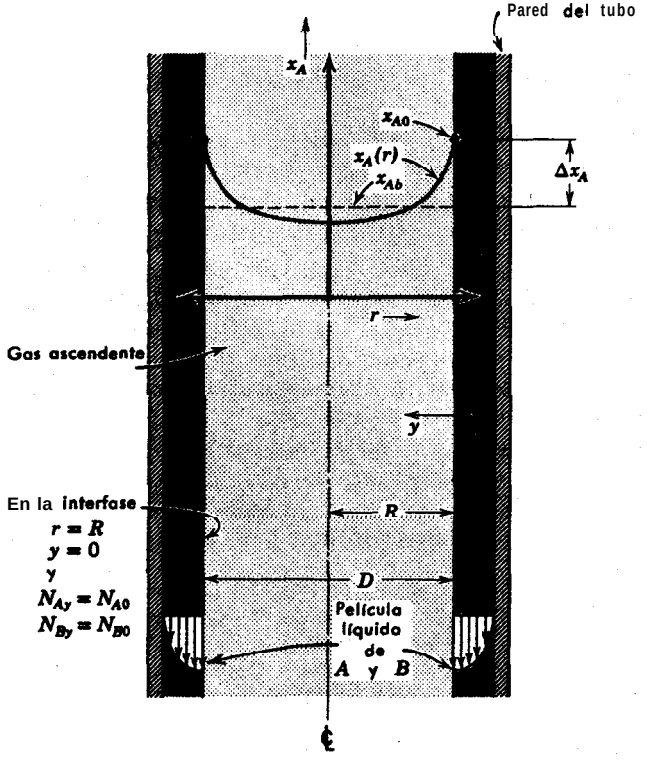


Fig. 21.1-3. Esquema de la transferencia de materia de A y *B* desde una corriente descendente de líquido a una corriente gaseosa ascendente de A y *B* en *un tubo vertical.*

(véase Ec. 16.2—2). En este caso la contribución difusional es proporcional al gradiente de concentración en la pared, y, por consiguiente, deberá de ser, aproximadamente proporcional a una diferencia característica de concentración, Δx_A, entre la del fluido en la superficie y en la corriente global. Por otra parte, la contribución debida al flujo global puede tener lugar sin ninguna diferencia de composición. (Véase, por ejemplo, la Fig. 21.1-2.) Según esto, parece conveniente definir el coeficiente de transferencia de materia, $k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}$, en función de la velocidad de *difusión* de ambas especies en dirección normal a la interfase:

$$J_{Ay}^{*}|_{y=0} = -J_{By}^{*}|_{y=0} = k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}\,\Delta x_A \tag{21.1-1}$$

Expresando esto en función de las densidades de flujo molares N_{A0} y N_{B0}, se obtiene

$$N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) = k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}\,\Delta x_A \tag{21.1-2}$$

$$N_{B0} - x_{B0}(N_{A0} + N_{B0}) = k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}\,\Delta x_B \tag{21.1-3}$$

siendo $x_{A0} = 1 - x_{B0}$ la fracción molar de la especie *A* del lado de la interfase correspondiente a la corriente. Obsérvese el paralelismo entre estas ecuaciones y la ley de Fick (Ec. 16.2-2).

Substituyendo x_B por $1 - x_A$, la Ec. 21.1-3 se transforma en la Ec. 21.1-2, de forma que sólo es necesaria una de ellas y el valor de $k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}$ es el mismo cualquiera que sea la ecuación que se utilice. En el tratamiento que sigue omitiremos las ecuaciones correspondientes a la Ec. 21.1-3.

El punto negro (●) situado sobre $k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}$ sirve para recordar que el coeficiente de transferencia de materia depende intrínsecamente de la velocidad de transferencia de materia. Este efecto se debe a la distorsión de los perfiles de velocidad y concentración que se produce a causa del flujo de *A* y *B* a través de la interfase. Como este efecto es pequeño en muchas aplicaciones, no se discutirá con detalle hasta las secciones §§ 21.4 y siguientes.

En el límite de *pequeñas velocidades de transferencia de materia* N_{A0} y N_{B0}, puede despreciarse la distorsión de los perfiles de velocidad y concentración debido a la transferencia de materia. Para' esta condición límite, es conveniente definir un coeficiente de transferencia de materia mediante la ecuación*

---

1 Los coeficientes de transferencia de materia definidos aquí no corresponden a los utilizados en la mayor parte de las publicaciones. Sin embargo, el coeficiente k_x es análogo al coeficiente *F* utilizado por A. P. COLBURN y T. B. DREW, *Trans. A. I. Ch. E.*, **33**, 197-212 (1937). Con el fin de aplicar otras correlaciones publicadas a la teoría que se describe aquí, es preciso saber en qué forma están relacionadas las distintas definiciones. Es frecuente definir coeficientes de transferencia de materia mediante expresiones tales como

$$N_{A0} = k_G\,\Delta p_A \tag{21.1-4a}$$

$$N_{A0} = k_L\,\Delta c_A \tag{21.1-4b}$$

$$\lim_{\substack{N_{A0}\to 0\\ N_{B0}\to 0}} \left\{ \frac{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})}{\Delta x_A} \right\} = k_{x,\,\mathrm{loc}} \qquad (21.1\text{-}4)$$

Según se demuestra en las secciones siguientes, para velocidades de transferencia de materia relativamente bajas se puede introducir en la Ec. 21.1-2 $k_{x,\,\mathrm{loc}}$ *en vez de* $k^{\bullet}_{x,\,\mathrm{loc}}$, es decir, despreciar la corrección de $k^{\bullet}_{x,\,\mathrm{loc}}$ debida a la velocidad de transferencia de materia. La diferencia entre $k_{x,\,\mathrm{loc}}$ y $k^{\bullet}_{x,\,\mathrm{loc}}$ puede apreciarse también, comparando la forma de las correlaciones adimensionales que se obtendrán después para estas magnitudes :

$$\frac{k_{x,\,\mathrm{loc}} D}{c\mathscr{D}_{AB}} = \text{una función de Re, Sc y la geometría} \qquad (21.14)$$

$$\frac{k^{\bullet}_{x,\,\mathrm{loc}} D}{c\mathscr{D}_{AB}} = \text{una función de Re, Sc, } \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,\,\mathrm{loc}}}\text{, y la geometría} \qquad (21.1\text{-}6)$$

La mayor parte de las correlaciones existentes para transferencia de materia por convección forzada pueden expresarse según la forma de la Ec. 21.1-5. En § 21.5 y siguientes se consideran los métodos de estimación del efecto de otros grupos adimensionales.

Por analogía con la Ec. 21.1-2 se puede definir un coeficiente medio de transferencia de materia para superficies de área finita A :

---

que se utilizan para gases y líquidos, respectivamente, para cualquier velocidad de transferencia de materia. Obsérvese que en la Ec. 21.1-2 se ha reatado el termino de flujo global, de forma que $k^{\bullet}_x \Delta x_A$ es la velocidad de transferencia de materia en la interfase debida exclusivamente a la difusión; sin embargo, las Ecs. 21.1−4*a*, *b*, representan la combinación de las contribuciones de la difusión y del flujo global. Por esta razón, k_G y k_L varían de una forma más complicada con la concentración y las velocidades de transferencia de materia que $k^{\bullet}_x$.

Para el caso frecuentemente estudiado de que $N_B = 0$, las relaciones entre estos coeficientes son

$$k^{\bullet}_x = k_G p(1 - x_{A0}) = k_G p_{B0} \quad \text{(para } p \text{ constante)} \qquad (21.1\text{−}4c)$$

$$k^{\bullet}_x = k_L c(1 - x_{A0}) = k_L c_{B0} \quad \text{(para c constante)} \qquad (21.1\text{−}4d)$$

Para *pequeñas velocidades de transferencia de materia*, $k^{\bullet}_x$ puede substituirse por k_x y p_B y c_B se hacen, aproximadamente, constantes en la sección transversal correspondiente. Por consiguiente, las Ecs. 21.1 −4c, *d*, pueden expresarse en función de la media logarítmica de p_B y c_B entre las condiciones en la interfase y en la corriente principal

$$k_x = k_G p_{B,\ln} \qquad (21.1\text{–}4e)$$

$$k_x = k_L c_{B,\ln} \qquad (21.1\text{-}4.f)$$

Hemos introducido $p_{B,\ln}$ y $c_{B,\ln}$ con el fin de indicar la forma en que se puede determinar k_x a partir de correlaciones en las que aparezcan estas magnitudes.

$$\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)}) = k_x^{\bullet} A\,\Delta x_A \qquad (21.1\text{-}7)$$

y como para pequeñas velocidades de transferencia de materia se puede suponer $k_x = k_x^{\bullet}$, resulta

$$\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)}) = k_x A\,\Delta x_A \qquad (21.143)$$

en las que $\mathcal{N}_A^{(m)}$ y $\mathcal{N}_B^{(m)}$ son las velocidades molares de adición de A y B a la corriente en toda la superficie.[2] La magnitud x_{A0} es una diferencia característica de composición.

Comparando la Ec. 21 .l -8 con la Ec. 13.1— 1 para transmisión de calor, se observa que ambas ecuaciones son fundamentalmente semejantes. De forma que la velocidad de difusión $\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)})$ corresponde a la velocidad de conducción de calor Q, Ax, corresponde a AT y k_x corresponde a h. Cualquiera de las ecuaciones utilizadas en las distintas definiciones de h en § 13.1 puede servir para transferencia de materia efectuando substituciones análogas. Por ejemplo, la ecuación de transferencia de materia análoga a la Ec. 13.1-2 es

$$\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)}) = k_{x1}(\pi DL)(x_{A0} - x_{Ab1}) \qquad (21.1\text{-}9)$$

Esta ecuación se aplica para ***lenta transferencia de materia*** entre la pared de un tubo y un fluido que circula por su interior. Aquí se considera que la composición interfacial x_{A0} es constante en la región de transferencia de materia de longitud L.. La transferencia de materia puede provenir, por mencionar sólo algunas posibilidades, de vaporización, condensación, cristalización, disolución o reacción catalítica en la pared. En esta ecuación, x_{Ab1} es la composición global (de «mezcla homogénea») de la corriente que llega a la región de transferencia de materia. En los párrafos que siguen se dan algunas definiciones, muy utilizadas, que son aplicables a sistemas de geometría complicada.

Para ***lenta transferencia de materia*** en una conducción, cuya área interfacial y y composición son conocidas, es conveniente emplear un coeficiente local de transferencia de materia para una sola fase:

$$d\mathcal{N}_A^{(m)} = k_{x,\,\mathrm{loc}}(x_{A0} - x_{Ab})\,dA + x_{A0}(d\,\mathcal{N}_A^{(m)} + d\,\mathcal{N}_B^{(m)}) \qquad (21.1\text{-}10)$$

o bien

$$N_{A0} = k_{x,\,\mathrm{loc}}(x_{A0} - x_{Ab}) + x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) \qquad (21.1\text{-}11)$$

En estas expresiones, x_{A0} y x_{Ab} son las fracciones molares locales, interfacil y de mezcla homogénea, en la fase considerada, y $N_{A0} = d\mathcal{N}_A^{(m)}/dA$ y $N_{B0} = d\mathcal{N}_B^{(m)}/dA$ son las densidades de flujo molares locales ***hacia el interior*** de dicha fase, en el elemento de área dA.

[2] El índice superior (m) representa un flujo a través de una «superficie de transferencia de materia». Si bien en este caso la notación es innecesaria, resulta, en cambio, muy útil en § 21.4 y en el Capítulo 22.

La Ec. 21.1—10 corresponde a la Ec. 13.1--5 para transmisión de calor a un fluido en un tubo circular, si se toma $dA = \pi D\ dz$ y se opera con los valores medios de N_{A0} y x_{A0} para este elemento de área de forma anular. (Véase Fig. 13.1-1.)

Para la transferencia de materia entre un objeto sumergido y un fluido que lo rodea, los coeficientes de transferencia de materia se expresan, generalmente, para el área de toda la superficie A. Si la concentración x_{A0} del fluido junto a la superficie es uniforme, la Ec. 21.1—7 se expresa así para ***bajas velocidades de transferencia de materia:***

$$\mathcal{W}_A^{(m)} = k_{xm}A(x_{A0} - x_{A\infty}) + x_{A0}(\mathcal{W}_A^{(m)} + \mathcal{W}_B^{(m)}) \qquad (21.1\text{-}12)$$

en la que $x_{A\infty}$ es la composición uniforme del fluido que se acerca al objeto. Esta definición corresponde a la Ec. 13.1-6 para la transmisión de calor desde una esfera a un fluido que la rodea.

Para sistemas de ***área interfacial desconocida,*** tales como pulverizadores de gotas o burbujas, es preciso modificar las Ecs. 21.1—10 y ll. Un procedimiento frecuente consiste en basar los coeficientes de transferencia en la unidad de volumen del sistema, lo que conduce a la siguiente modificación de la Ec. 21.1-10 para ***bajas velocidades de transferencia de materia:***

$$d\mathcal{W}_A^{(m)} = (k_x a)_{\text{loc}}(x_{A0} - x_{Ab})\ d\ V + x_{A0}(d\mathcal{W}_A^{(m)} + d\mathcal{W}_B^{(m)}) \qquad (21.1\text{-}13)$$

en la que a_{loc} es el área interfacial por unidad de volumen correspondiente al elemento de volumen dV. La magnitud conjunta $(k_x a)_{\text{loc}}$ puede medirse, mientras que $k_{x,\text{loc}}$ y a_{loc} no.

Si al otro lado de la interfase hay un sólido o un fluido puros, la composición interfacial local x_{A0} se calcula directamente. En este caso se puede obtener x_{A0} con muy buena aproximación suponiendo que hay equilibrio en la interfase, tal como se ha hecho en § 17.2 y en el Ejemplo 19.1-1. En § 21.3 y en el Ejemplo 22.5-2 se trata el problema más general en el que existen gradientes de concentración a ambos lados de la interfase.

Como se ve, las Ecs. 21.1-2 y 3 relacionan ***una*** diferencia de concentración $(\Delta x_A = -\Delta x_B)$ con ***dos*** velocidades de transferencia de materia. Por consiguiente, para resolver problemas de transferencia de materia se requiere más información que para los problemas de los Capítulos 6 y 13. Por ejemplo, el especificar k_x, $_{\text{loc}}$, x_{A0}, e Δx_A en la Ec. 21.1-2 no determina, en general, N_{A0} o N_{B0}, sino tan sólo la velocidad de ***difusión*** de A o B relativa al flujo global a través de la interfase; para completar la solución se necesita una relación distinta entre N_{A0} y N_{B0}. Ejemplos de estas relaciones pueden verse en § 17.2, donde la relación $N_B = 0$ se ha obtenido a partir de la solubilidad, en § 17.3, en la que la relación $N_{A_2 z} = -\frac{1}{2}N_{A_1}$ se obtuvo a partir del balance de materia (estequiometría) de una reacción química, y, finalmente en § 17.4, donde la relación $c_A(N_{A_2} + N_{B_2}) \doteq 0$ se ha obtenido teniendo en cuenta la solubilidad. A veces, como ocurre en el Problema 18.N, la relación que se necesita puede obtenerse mediante un balance de energía o de cantidad de movimiento.

§ 21.2 CORRELACIONES DE COEFICIENTES BINARIOS DE TRANSFERENCIA DE MATERIA EN UNA SOLA FASE PARA BAJAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA

Las soluciones de muchos problemas de transferencia de materia para bajas velocidades de transferencia de materia pueden obtenerse por analogía con los correspondientes problemas de transmisión de calor y viceversa. Por lo tanto, en esta sección no se presentan nuevas correlaciones, sino que se indica simplemente cómo se pueden convertir los resultados del Capítulo 13 en las correlaciones análogas para transferencia de materia. Algunos de los resultados del Capítulo 13 se han obtenido a su vez por analogía con los datos de transferencia de materia. Para ilustrar el fundamento de estas analogías y las condiciones en que son aplicables, vamos a estudiar la transferencia de materia desde el punto de vista del análisis dimensional análogo al expuesto en § 13.2.

Consideremos el flujo isotérmico estacionario de una solución líquida de A y B en el tubo que se indica en la Fig. 21.2— 1. Supongamos que se conoce la distribución de velocidad en el plano «1» y que la concentración del fluido en la región $z < 0$ es constante e igual a x_{A1}. Desde $z = 0$ hasta $z = L$, la pared del tubo está recubierta con una solución sólida de A y B que se disuelve lentamente y mantiene la composición del líquido, x_{A0}, constante a lo largo de la superficie de disolución. Supóngase además que las propiedades físicas ρ, μ, c y $\mathscr{D}_{AB}$ son constantes.

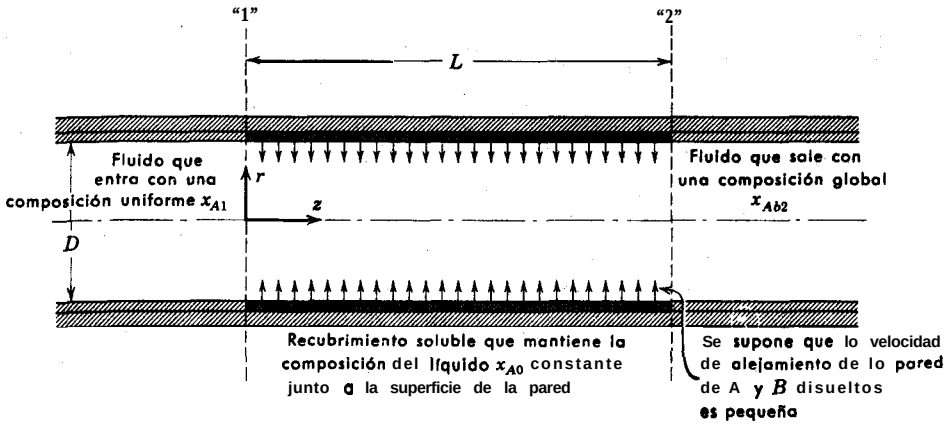


Fig. 21.2-1. Transferencia de materia en un tubo con una pared soluble.

El problema de transferencia de materia que acabamos de describir es matemáticamente análogo al de convección de calor descrito al comenzar la sección § 13.2. Para poner de manifiesto esta analogía, vamos a presentar conjuntamente las ecuaciones para los dos sistemas. Así, la velocidad de adición de calor entre «1» y «2»

en la Fig. 13.1 — 1 y la velocidad molar de adición de la especie *A* por difusión entre «1» y «2» en la Fig. 21.2-1, vienen dadas por las siguientes expresiones, válidas tanto para flujo laminar como turbulento1 :

transmisión de calor:
$$Q = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \right) R \, d\theta \, dz \qquad (21.2\text{-}1$$

transferencia de materia:
$$\mathcal{W}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{W}_A^{(m)} + \mathcal{W}_B^{(m)}) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+c\mathcal{D}_{AB} \left. \frac{\partial x_A}{\partial r} \right|_{r=R} \right) R \, d\theta \, dz \qquad (21.2\text{-}2)$$

Evaluando los primeros miembros de estas ecuaciones en función de h_1 y k_{x1}, tal como se han definido en las Ecs. 13.1-2 y 21.1-9, se obtiene

transmisión de calor: **(21.2—3)**
$$h_1 = \frac{1}{\pi DL(T_0 - T_1)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \right) R \, d\theta \, dz$$

transferencia de materia: *(21.2-4)*
$$k_{21} = \frac{1}{\pi DL(x_{A0} - x_{A1})} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(+c\mathcal{D}_{AB} \left. \frac{\partial x_A}{\partial r} \right|_{r=R} \right) R \, d\theta \, dz$$

Se introducen ahora las variables adimensionales $r^* = r/D$, $z^* = z/D$, $T^* = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ Y $x_A^* = (x_A - x_{A0})/(x_{A1} - x_{A0})$ y se efectúan algunas operaciones con el fin de obtener

transmisión de calor:
$$\mathrm{Nu}_1 \equiv \frac{h_1 D}{k} = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(- \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2} \right) d\theta \, dz^* \qquad (21.2\text{–}5)$$

transferencia de materia:
$$\mathrm{Nu}_{AB1} \equiv \frac{k_{x1} D}{c\mathcal{D}_{AB}} = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(- \left. \frac{\partial x_A^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2} \right) d\theta \, dz^* \quad (21.2\text{-}6)$$

En estas expresiones Nu es el número de Nusselt para la transmisión de calor sin transferencia de materia, y Nu_{AB} es el número de Nusselt de transferencia de materia para lenta transferencia de materia. Evidentemente existe una intima semejanza entre estos dos números.2

Los gradientes que aparecen en las Ecs. 21.2-5 y 6 pueden, en principio, evaluarse a partir de las ecuaciones diferenciales 10.6-9, 10 y ll, para transmisión

---

1 Si el flujo es turbulento, es necesario considerar en la deducción que sigue todos los perfiles como de tiempo ajustado. Para simplificar se han omitido las líneas situadas sobre las variables de tiempo ajustado.

2 Este sencillo resultado pone de manifiesto la conveniencia de definir k_{x1} en función de la velocidad de difusión $\mathcal{W}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{W}_A^{(m)} + \mathcal{W}_B^{(m)})$ en vez de $\mathcal{W}_A^{(m)}$.

de calor, y las 18.6-8, 9 y 10 para transferencia de materia, con las siguientes condiciones límite para ***bajas velocidades de transferencia de materia:***[3]

transferencia de cantidad de movimiento:

$$v^* = \text{una determinada función de } r^* \text{ y } \theta \text{ para } z^* = 0 \qquad (21.2\text{-}7)$$

$$v^* = 0 \text{ para } r^* = \tfrac{1}{2} \qquad (21.2\text{-}8)$$

$$p^* = 0 \text{ para } z^* = r^* = 0 \qquad (21.2\text{-}9)$$

transferencia de calor:

$$T^* = 1 \quad \text{para } z^* = 0 \qquad (21.2\text{-}10)$$

$$T^* = 0 \quad \text{para } r^* = \tfrac{1}{2},\ z^* > 0 \qquad (21.2\text{-}11)$$

transferencia de materia:

$$x_A^* = 1 \quad \text{para } z^* = 0 \qquad (21.2\text{-}12)$$

$$x_A^* = 0 \quad \text{para } r^* = \tfrac{1}{2},\ z^* > 0 \qquad (21.2\text{-}13)$$

Si el término de disipación de la Ec. 10.6-11 es despreciable y pueden despreciarse también las reacciones químicas del fluido, como en la Ec. 18.6-10, las ecuaciones diferenciales para el sistema de transmisión de calor y el sistema de transferencia de materia son análogas; y despreciando la velocidad de transferencia de materia en la pared resultan también análogas las condiciones límite. Por consiguiente, los perfiles de T^* y x_A^* son semejantes

$$\begin{cases} T^* = \text{una función de } (r^*, \theta, z^*, Re, \text{Pr}) & (21.2\text{-}14) \\ x_A^* = \text{la misma función de } (r^*, \theta, z^*, \text{Re, Sc}) & (21.2\text{-}15) \end{cases}$$

Es decir, que para obtener perfiles de concentración en vez de perfiles de temperatura basta simplemente con substituir en la Ec. 21.2-14 el número de Prandtl $\text{Pr} = \hat{C}_p\mu/k$ por el número de Schmidt $\text{Sc} = \mu/\rho\mathscr{D}_{AB}$ y poner x_A^* en vez de T^*.

Introduciendo estas expresiones de los perfiles en las Ecs. 21.2-5 y 6, se obtiene

$$\begin{cases} \text{Nu}_1 = \text{una función de (Re, Pr, } L/D) & (21.2\text{-}16) \\ \text{Nu}_{AB1} = \text{la misma función de (Re, Sc, } L/D) & (21.2\text{-}17) \end{cases}$$

La misma semejanza funcional existe entre Nu_a, Nu_{ln}, Nu_{loc} y las correspondientes formas de Nu_{AB}. Esta importante analogía permite deducir correlaciones de transferencia de materia a partir de correlaciones de transmisión de calor, para condiciones límite equivalentes, con tan sólo substituir Nu por Nu_{AB} y Pr por Sc. Esto

---

3 La suposición de que la velocidad del fluido en la pared es cero (Ec. 21.2-8) limita las analogías estudiadas aquí al caso de que la velocidad de transferencia de materia sea pequeña. En §§ 21.4, 5, 6 y 7, se considera la velocidad del fluido a través de la interfase.

puede hacerse para cualquier geometría y lo mismo para flujo laminar que turbulento. ***Obsérvese*** que para obtener esta analogía hay que suponer: (i) que las propiedades físicas son constantes, (ii) que la velocidad de transferencia de materia es pequeña, (iii) que no hay reacciones químicas en el fluido, (iv) que no hay disipación viscosa, (v) que no hay absorción ni emisión de energía radiante, (vi) que no existe difusión de presión, térmica, ni forzada. La discusión que sigue se refiere fundamentalmente a las restricciones (i) y (ii), ya que las demás carecen de importancia en muchos casos.

Análogamente, se puede demostrar que para convección libre alrededor de objetos sumergidos de una forma determinada cualquiera,

$$\begin{cases} \mathrm{Nu}_m = \text{una función de (Gr, Pr)} & (21.2\text{-}18) \\ \mathrm{Nu}_{ABm} = \text{la misma función de } (\mathrm{Gr}_{AB}, \mathrm{Pr}) & (21.2\text{-}19) \end{cases}$$

siendo Gr_{AB} el número de Grashof para la difusión binaria. (Véase \$18.6.) Esta analogía y la de las Ecs. 21.2— 16 y 17 se han confirmado experimentalmente para numerosos sistemas de flujo.

En la Tabla 21.2— 1 se presenta un resumen de magnitudes análogas para transferencia de calor y materia. Para convertir una correlación de transmisión de calor en la correspondiente de transferencia de materia, basta con substituir los nuevos grupos adimensionales de acuerdo con la tabla. Este procedimiento puede utilizarse para determinar perfiles de concentración a partir de perfiles de temperatura, o coeficientes de transferencia de materia a partir de coeficientes de transmisión de calor. Téngase en cuenta que es preciso transformar también las condiciones límite para saber en qué condiciones es aplicable la correlación obtenida.

Poco se puede decir acerca de lo establecido en sistemas de transferencia de materia para propiedades físicas variables. Los efectos de las propiedades físicas variables en los problemas isotérmicos de transferencia de materia serán algo diferentes de los qúe se encuentran en transmisión de calor en fluidos puros, debido a que interviene una serie diferente de propiedades físicas, y que lo que interviene en este caso es su variación con la concentración en vez de con la temperatura.

Como ilustración de la utilización de analogías, vamos a considerar la correlación de transferencia de calor y cantidad de movimiento de la Fig. 13.3-3, para flujo tangencial en torno a una lámina plana isotérmica sin transferencia de materia. Esta correlación es de la forma

$$j_{H,\mathrm{loc}} = \tfrac{1}{2} f_{\mathrm{loc}} = \text{una función de Re} \qquad (21.2\text{-}20)$$

en la que Re es el número de Reynolds distancia1 $v_\infty \rho_f x/\mu_f$. Introduciendo la magnitud correspondiente para transferencia de materia, j_D, se obtiene la analogía

$$j_{D,\mathrm{loc}} = j_{H,\mathrm{loc}} = \tfrac{1}{2} f_{\mathrm{loc}} = \text{una función de Re} \qquad (21.2\text{-}21)$$

o bien

$$\frac{k_{x,\mathrm{loc}}}{c_f v_\infty}\left(\frac{\mu}{\rho \mathscr{D}_{AB}}\right)_f^{2/3} = \frac{h_{\mathrm{loc}}}{\rho_f \hat{C}_{pf} v_\infty}\left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\right)_f^{2/3} = \tfrac{1}{2} f_{\mathrm{loc}} = \text{una función de Re} \qquad (21.2\text{-}22)$$

TABLA 21.2-1

ANALOGÍAS ENTRE TRANSMISIÓN DE CALOR **Y MATERIA A BAJAS** VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE **MATERIA**

	Magnitudes de **transmisión** de calor	**Magnitudes** de **transferencia** binaria de materia
Perfiles	T	x_A
Difusividad	$\alpha = \dfrac{k}{\rho \hat{C}_p}$	$\mathscr{D}_{AB}$
Efecto de los **perfiles** sobre la densidad	$\beta = -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,x_A}$	$\zeta = -\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x_A}\right)_{p,T}$
Densidad de flujo	$q^{(c)}$	$J_A^* = N_A - x_A(N_A + N_B)$
Velocidad de transferencia	Q	$\mathscr{W}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathscr{W}_A^{(m)} + \mathscr{W}_B^{(m)})$
Coeficiente de transferencia	$h = \dfrac{Q}{A\,\Delta T}$	$k_x = \dfrac{\mathscr{W}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathscr{W}_A^{(m)} + \mathscr{W}_B^{(m)})}{A\,\Delta x_A}$
Grupos adimensionales que son iguales en ambas correlaciones	$\mathrm{Re} = \dfrac{DV\rho}{\mu} = \dfrac{DG}{\mu}$ $\mathrm{Fr} = \dfrac{V^2}{gD}$ $\dfrac{L}{D}$	$\mathrm{Re} = \dfrac{DV\rho}{\mu} = \dfrac{DG}{\mu}$ $\mathrm{Fr} = \dfrac{V^2}{gD}$ $\dfrac{L}{D}$
Grupos **adimensionales** básicos que son **diferentes** en ambas **correlaciones**	$\mathrm{Nu} = \dfrac{hD}{k}$ $\mathrm{Pr} = \dfrac{\hat{C}_p\mu}{k} = \dfrac{\nu}{a}$ $\mathrm{Gr} = \dfrac{D^3\rho^2 g\beta\,\Delta T}{\mu^2}$ $\mathrm{St} = \dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{RePr}} = \dfrac{h}{\rho \hat{C}_p V}$	$\mathrm{Nu}_{AB} = \dfrac{k_x D}{c\mathscr{D}_{AB}}$ $\mathrm{Sc} = \dfrac{\mu}{\rho\mathscr{D}_{AB}} = \dfrac{\nu}{\mathscr{D}_{AB}}$ $\mathrm{Gr}_{AB} = \dfrac{D^3\rho^2 g\zeta\,\Delta x_A}{\mu^2}$ $\mathrm{St}_{AB} = \dfrac{\mathrm{Nu}_{AB}}{\mathrm{ReSc}} = \dfrac{k_x}{cV}$
Combinaciones **especiales** de grupos adimensionales	$\mathrm{Pé} = \mathrm{RePr} = \dfrac{DV\rho\hat{C}_p}{k}$ $j_H = \mathrm{NuRe^{-1}Pr^{-1/3}}$ $= \dfrac{h}{\rho\hat{C}_p V}\left(\dfrac{\hat{C}_p\mu}{k}\right)^{2/3}$	$\mathrm{Pé}_{AB} = \mathrm{ReSc} = \dfrac{DV}{\mathscr{D}_{AB}}$ $j_D = \mathrm{Nu}_{AB}\mathrm{Re^{-1}Sc^{-1/3}}$ $= \dfrac{k_x}{cV}\left(\dfrac{\mu}{\rho\mathscr{D}_{AB}}\right)^{2/3}$

en la que el subíndice f indica que las propiedades están evaluadas a la «temperatura de película» $T_f = 1/2(T_0 + T_\infty)$ y a la «composición de película» $x_{Af} = \frac{1}{2}(x_{A0} + x_{A\infty})$. Como la correlación de transmisión de calor se ha obtenido para temperatura uniforme de la pared y sin transferencia de materia, la correlación de transferencia de materia esta restringida para composición uniforme de la interfase x_{A0} y bajas velocidades de transferencia de materia. Esta correlación de j_H, j_D y f, puede aplicarse también a la transferencia simultánea de calor, materia y cantidad de movimiento, con bajas velocidades de transferencia de materia.

La Ec. 21.2—21 es una de las analogías de **Chilton-Colburn**[4], que concuerda muy bien con las predicciones de la teoría de capa límite para la lámina plana cuando Pr y Sc son superiores a 0,5 (véanse Ecs. 19.3-43, 44 y 45), y resulta bastante satisfactoria para flujo turbulento. Como en el flujo alrededor de superficies curvas hay resistencia de forma (véanse §§ 2.6 y 6.3), $f/2$ puede ser considerablemente mayor que j_H y j_D (véanse Fig. 13.3-1). Aún para conducciones rectas, la concordancia entre $f/2$ y los factores-j es solamente aproximada. (Véase Fig. 13.2-1.) Sin embargo, la analogía empírica de carácter más limitado

$$j_H = j_D = \left\{ \begin{array}{l} \text{una función de Re} \\ \text{geometría, y} \\ \text{condiciones límite} \end{array} \right\} \tag{21.2-23}$$

resulta útil para numerosos casos de flujo, tales como flujo transversal por el exterior de cilindros (Fig. 13.3—1), flujo a través de lechos de relleno (§ 13.4), y flujo en tubos a elevados números de Reynolds (Fig. 13.2-1). La Ec. 21.2-23 es la forma habitual de la analogía de Chilton-Colbum.

Como segunda ilustración, consideremos la correlación de transmisión de calor correspondiente a la Ec. 13.3— 1 para convección forzada alrededor de una esfera de diámetro D:

$$\frac{h_m D}{k_f} = 2{,}0 + 0{,}60\left(\frac{Dv_\infty \rho_f}{\mu_f}\right)^{1/2}\left(\frac{\hat{C}_p \mu}{k}\right)_f^{1/3} \tag{21.2-24}$$

Substituyendo las correspondientes 'magnitudes de transferencia de materia, de acuerdo con la Tabla 21.2-1, se obtiene:

$$\frac{k_{xm} D}{c_f \mathscr{D}_{ABf}} = 2{,}0 + 0{,}60\left(\frac{Dv_\infty \rho_f}{\mu_f}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\rho \mathscr{D}_{AB}}\right)_f^{1/3} \tag{21.2-25}$$

Las Ec. 21.2-24 y 25 son válidas para temperatura de la superficie constante y composición constante, y para pequeñas velocidades de transferencia de materia. También puede aplicarse, con las mismas restricciones, para la transferencia simultánea de calor y materia. Obsérvese que la analogía de Chilton-Colbum no es válida para este sistema de flujo, salvo con carácter aproximado, cuando Nu y $Nu_{AB} \gg 2$.

4 T. H. CHILTON y P. A. COLBURN, *Ind. Eng. Chem.*, **26**, 1183 (1934).

Ejemplo 21.2— 1. Evaporación de una gota que cae libremente

Una gota esférica de agua, de 0,05 cm de diámetro, cae con una velocidad de 215 cm seg^{-1} en el seno de aire seco en reposo a 1 atm. Estimar la velocidad instantánea de evaporación en la gota si la superficie de la misma está a 21" C y el aire a 60° C. La presión de vapor del agua a 21" C es 0,0245 atm. Supónganse condiciones de pseudo-estado estacionario.

Solución. Sea el agua la especie A y el aire la especie B. La solubilidad de aire en agua puede considerarse despreciable, de forma que $\mathcal{N}_B^{(m)} = 0$, Suponiendo que la velocidad de evaporación es pequeñas, se puede aplicar la Fc. 21.1-12 a la fase gaseosa que rodea a la esfera, para obtener

$$\mathcal{N}_A^{(m)} = k_{xm}\pi D^2 \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}} \qquad (21.2\text{–}26)$$

y el coeficiente de transferencia de materia k_{xm} se puede predecir a partir de la Ec. 21.2-25 o de la Fig. 13.3-2.

Las temperaturas y composiciones que se necesitan para este problema son

$$T_0 = 21\ ^\circ\text{C} \qquad T_\infty = 60\ ^\circ\text{C} \qquad T_f = \frac{T^\circ + T_\infty}{2} = 40{,}5^\circ\ \text{c}$$

$$x_{A0} = 0{,}0245 \qquad x_{A\infty} \sim 0 \qquad x_{Af} = \frac{x_{A0} + x_{A\infty}}{2} = 0{,}0123$$

Para calcular x_{A0} se ha supuesto: comportamiento de gas ideal, equilibrio en la interfase e insolubilidad total del aire en el agua. La fracción molar media, x_{Af}, en la fase gaseosa es muy pequeña y puede despreciarse en la evaluación de las propiedades físicas:

$$c_f = 3{,}89 \times 10^{-5}\ \text{g-mol cm}^{-3}$$

$$\rho_f = 1{,}12 \times 10^{-3}\ \text{g cm}^{-3}$$

$$\mu_f = 1{,}91 \times 10^{-4}\ \text{g cm}^{-1}\ \text{seg}^{-1}\ \text{(de la -Tabla 1.1-1)}$$

$$\mathcal{D}_{ABf} = 0{,}292\ \text{cm}^2\ \text{seg}^{-1}\ \text{(de la Ec. 16.3-1)}$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}\right)_f = 0{,}58$$

$$\frac{Dv_\infty\rho_f}{\mu_f} = \frac{(0{,}05)(215)(1{,}12 \times 10^{-3}}{1{,}91 \times 10^{-4}} = 63$$

Introduciendo estos valores en la Ec. 21.2-25 se obtiene

$$k_{xm} = \frac{c_f\mathcal{D}_{AB}}{D}\left[2 + 0{,}60\left(\frac{Dv_\infty\rho_f}{\mu_f}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}\right)_f^{1/3}\right]$$

$$= \frac{(3{,}89 \times 10^{-5})(0{,}292)}{0{,}05}[2 + 3{,}96]$$

$$= 1{,}35 \times 10^{-3}\ \text{g-mol seg}^{-1}\ \text{cm}^{-2}$$

[5] En el ejemplo 21.5 -2 se demuestra que para estas condiciones es valida la suposición de que la velocidad de transferencia de materia es pequeña.

La velocidad de evaporación puede hallarse a partir de la Ec. 21.2-26

$$N_A^{(m)} = (1{,}35 \times 10^{-3})(\pi)\,(0{,}05)^2\,\frac{0.0245 - 0}{-0{,}0245}$$

$$= 2.66 \times 10^{-7} \text{ g-mol seg}^{-1}$$

Este resultado corresponde a una disminución de $1{,}25 \times 10^{-3}$ cm seg^{-1} del diámetro de la gota e indica que una gota del tamaño indicado caerá una distancia considerable antes de que se evapore totalmente.

En este ejemplo se han dado, para simplificar, la velocidad y la temperatura de la superficie de la gota. En general, estas condiciones hay que calcularlas mediante balances de energía y cantidad de movimiento, tal como se indica en el Problema 21.E.

Ejemplo 21.2-2. El psicrómetro de bulbo húmedo y seco

El efecto de enfriamiento por evaporación desde una superficie mojada puede utilizarse para analizar ciertas mezclas gaseosas sencillas. Considérese, por ejemplo, el dispositivo de la Fig. 21.2 -2, en el que una mezcla de un vapor condensable A y un gas no condensable B fluyen sobre dos termómetros. El bulbo de uno de los termómetros (el bulbo seco) está desnudo, mientras que el otro (el bulbo húmedo) se recubre con una muselina saturada con el líquido A. De forma continua asciende, por acción capilar a través de la muselina desde el depósito inferior, el líquido A que está a la temperatura del bulbo húmedo. Deducir una expresión para la composición de la corriente gaseosa en función de las lecturas de los termómetros de bulbo seco y húmedo.

Solución. Para simplificar, se supone que la velocidad del fluido es suficientemente elevada, de forma que las lecturas de los termómetros no vienen afectadas por la radiación ni la conducción de calor a lo largo de las varillas de los termómetros, pero no demasiado elevada para que el calentamiento por fricción sea insignificante.[6] Estas suposiciones son, generalmente, satisfactorias para termómetros de vidrio y velocidades del gas de 10 a 30 m seg^{-1}. Por consiguiente, la temperatura del bulbo seco es igual a la temperatura T_∞ del gas que se acerca, y la temperatura del bulbo húmedo es idéntica a la temperatura T_0 de la parte exterior de la muselina.

Aplicando un balance de energía a un sistema que contiene una longitud L de la mecha de muselina (véase Fig. 21.2−2), se obtiene

$$N_A^{(m)}(\bar{H}_{Ag0} - \bar{H}_{A1}) = Q \qquad (21.2\text{-}28)$$

en la que Q es el flujo de calor desde la fase gaseosa hacia la muselina en la interfase, y $N_A^{(m)}$ es la velocidad de evaporación. La magnitud $\bar{H}_{Ag0}$ es la entalpia parcial molar de A correspondiente a la fase gaseosa en la interfase. Despreciando la radiación, así como el efecto que la transferencia de materia ejerce sobre h, se puede escribir $Q = h_m \pi\, DL(T_\infty - T_0)$. Despreciando también los calores de mezcla en la fase gaseosa, se puede substituir $\bar{H}_{Ag0} - \bar{H}_{A1}$ por el calor de vaporización de A puro a la temperatura T_0. Con estas variaciones, el balance de energia puede expresarse de forma aproximada por

$$N_A^{(m)}\,\Delta\bar{H}_{A\ \text{vap.}} = h_m \pi DL(T_\infty - T_0) \qquad (21.2\text{-}29)$$

6 En el Problema 21.F se presenta una solución más detallada.

A partir de la Ec. 21. 1 -12 se obtiene una segunda expresión para $\mathcal{W}_A^{(m)}$, en función de las composiciones de la corriente y de la interfase:

$$\mathcal{W}_A^{(m)}(1 - x_{A0}) = k_{xm}\pi DL(x_{A0} - x_{A\infty}) \qquad (21.2\text{-}30)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\frac{(x_{A0} - x_{A\infty})}{(T_\infty - T_0)(1 - x_{A0})} = \frac{h_m}{k_{xm}\,\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap.}}} \qquad (21.2\text{-}31)$$

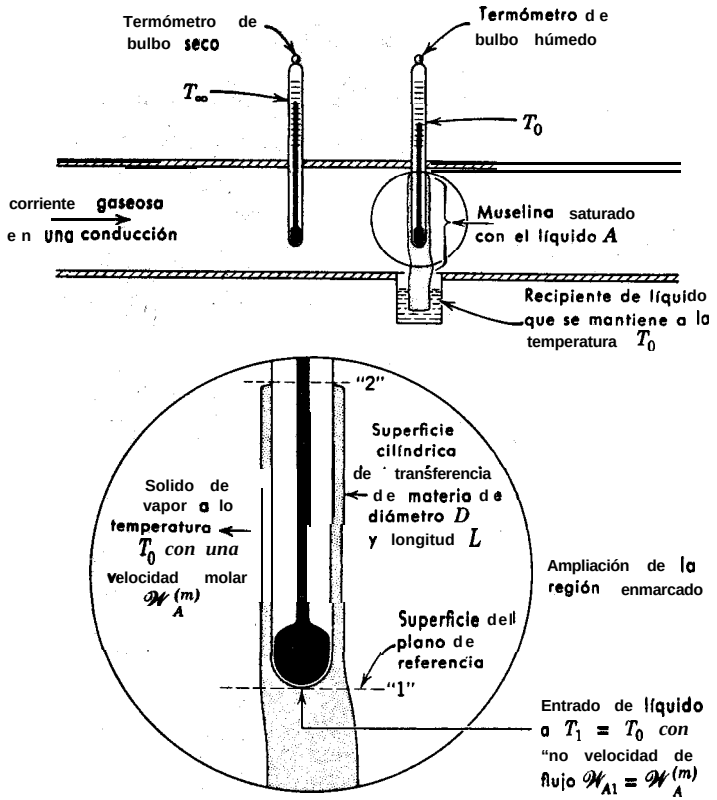


Fig. 21.2-2. Esquema de una instalación de los termómetros de bulbo seco y de bulbo húmedo. Se admite que no existe flujo de calor ni de materia a través del plano «2».

Los datos de transmisión de calor en cilindros con temperatura de superficie constante y sin transferencia de materia se han representado empíricamente en la Fig. 13.3-1 en forma de j_H frente a Re; la correlación correspondiente de transferencia de materia para

composición constante de la superficie y lenta velocidad de transferencia de materia se obtiene tomando

$$j_H = j_D \tag{21.2-32}$$

o

$$\frac{h_m}{\rho_f \bar{C}_{pf} v_\infty} \mathrm{Pr}_f^{2/3} = \frac{k_{xm}}{c_f v_\infty} \mathrm{Sc}_f^{2/3} \tag{21.2-33}$$

Teniendo en cuenta que $\rho \bar{C}_p = c\bar{C}_p$, al simplificar la ecuación anterior se obtiene la fórmula[7] empírica

$$\frac{h_m}{k_{xm}} = \bar{C}_{pf} \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)_f^{2/3} \tag{21.2-34}$$

y substituyendo este valor en la Ec. 21.2−31 se llega a

$$\frac{(x_{A0} - x_{A\infty})}{(T_\infty - T_0)(1 - x_{A0})} = \frac{\bar{C}_{pf}}{\Delta \bar{H}_{A,\mathrm{vap.}}} \left(\frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}}\right)_f^{2/3} \tag{21.2-35}$$

La composición interfacial del gas, x_{A0}, puede predecirse con exactitud, para bajas velocidades de transferencia de materia, despreciando la resistencia a la transferencia de calor y materia de la interfase en sí. (Para una más amplia discusión véase § 21.3.) Por consiguiente, x_{A0} puede representarse mediante la relación del equilibrio líquido-vapor:

$$x_{A0} = x_{A0}(T_0, p) \tag{21.2-36}$$

Una relación de este tipo será válida para las especies A y B si el líquido es A puro, como se ha supuesto anteriormente. Una aproximación de esta relación que se utiliza con frecuencia es

$$x_{A0} = \frac{p_{A,\mathrm{vap.}}}{p} \tag{21.2-37}$$

en la que $p_{A,\mathrm{vap}}$ es la presión de vapor de A puro a la temperatura T_0. Esta relación implica las suposiciones adicionales de que la presencia de B no altera la presión parcial de A en la interfase, y que A y B forman una mezcla gaseosa ideal.

La Ec. 21.2−36 ó 37 puede combinarse con la Ec. 21.2−35 con el fin de relacionar la composición del gas que se acerca $x_{A\infty}$ con las lecturas termométricas T_0 y T_∞ para cualquier presión del sistema. Por ejemplo, si para una mezcla de aire húmedo a 1 atm de presión la temperatura del termómetro húmedo T_0 es 21 °C y la temperatura del termómetro seco 60 °C, los cálculos se efectúan de la siguiente forma:

$x_{A0} = 0{,}0245$, de acuerdo con la Ec. 21.2−37

$\bar{C}_{pf} = 6{,}98$ kcal (kg-mol)$^{-1}$ °C^{-1} para el aire a 40,5 °C

$\Delta \bar{H}_{A,\mathrm{vap.}} = 10.500$ kcal (kg-mol)$^{-1}$ a 21 °C

$\mathrm{Sc}_f = 0{,}58$ (véase el Ejemplo 21.2-1)

$\mathrm{Pr}_f = 0{,}74$, de acuerdo con la Ec. 8.3−16

---

7 C. H. BEDINGFIELD y T. B. DREW, *Ind. Eng. Chem.* **42**, 1164-1173 (1950), recomiendan utilizar para el aire la potencia 0,56 del Sc.

Substituyendo en la Ec. 21.2–35, se obtiene

$$\frac{(0.0245 - x_{A\infty})}{(60 - 21)(1 - 0{,}0245)} = \frac{6{,}98}{10\,500}\left(\frac{0{,}58}{0{,}74}\right)^{2/3}$$

de donde se obtiene que la fracción molar de agua vapor en la corriente de aire que llega es

$$x_{A\infty} = 0{,}0030$$

Estos cálculos se han efectuado suponiendo, como primera aproximación, que $x_{Af} = 0$. Debiera de efectuarse una segunda aproximación tomando el valor mejorado de $x_{Af} = \frac{1}{2}(0{,}0245 + 0{,}0030) = 0{,}0138$; sin embargo, las propiedades físicas no se conocen con suficiente exactitud y no esta justificado el calculo en este caso.

El resultado obtenido en el cálculo anterior concuerda satisfactoriamente con los valores de la gráfica de humedad[8], que da $x_{A\infty} = 0$ en las condiciones *indicadas.*

§ 21.3 DEFINICIÓN DE COEFICIENTES BINARIOS DE TRANSFERENCIA DE MATERIA EN DOS FASES PARA BAJAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA1

En la mayor parte de los sistemas de transferencia de materia existe una- interfase con gradientes de concentración a ambos lados de la misma. Como ejemplo sencillo consideremos el contacto de una mezcla de los gases *A* y *B* con un líquido no volátil C que absorbe solamente a la especie *A* ; los gradientes de concentración en las dos fases se representan en la Fig. 21. 3-1. El símbolo y_A se utiliza para la fracción molar de *A* en la fase gaseosa, y x_A para la fracción molar de dicho componente en la fase líquida.

En general, existen tres resistencias que se oponen al movimiento de la especie *A* entre las fases: la fase gaseosa, la fase líquida y la interfase en sí. En la mayor parte de las aplicaciones la resistencia de la interfase es despreciable; excepciones a este hecho se presentan,' por ejemplo, cuando se concentra en la interfase una especie tensoactiva o cuando la velocidad de transferencia de materia es excesivamente elevada. Aquí se supone que la resistencia de la interfase es despreciable y que las fluctuaciones de x_A e y_A son pequeñas, de forma que las composiciones de tiempo ajustado del líquido y del gas están[2] prácticamente situadas sobre la curva de equilibrio :

$$y_{A0} = f(x_{A0}) \qquad (21.3\text{-}1)$$

---

[8] *0. A.* HOUGEN, K. *M.* WATSON *y* R. A. RAGATZ, *Chemical Process Principles*, Wiley, Nueva York, Parte I (1954), segunda edición, p. 120.

[1] En esta sección se sigue el tratamiento original de W. G. WHITMAN, *Chem. Met. Eng.*, 29, 146-148 (1923), pero la notación es diferente.

[2] Todas las magnitudes que intervienen en la deducción que sigue son de tiempo ajustado; sin embargo, para mayor sencillez se omite la raya superior.

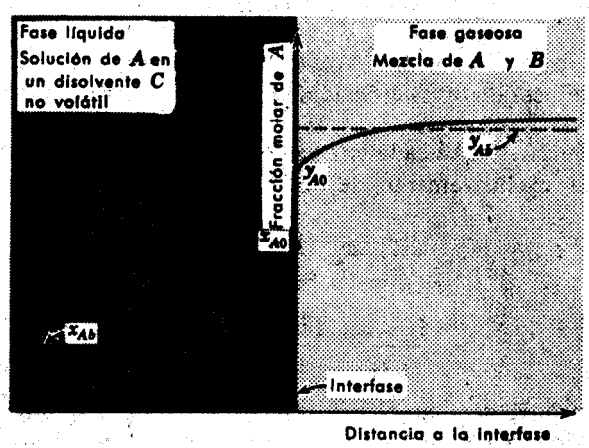


Fig. 21.3-1. Perfiles de concentración de *A* en las proximidades de una interfase gas-líquido.

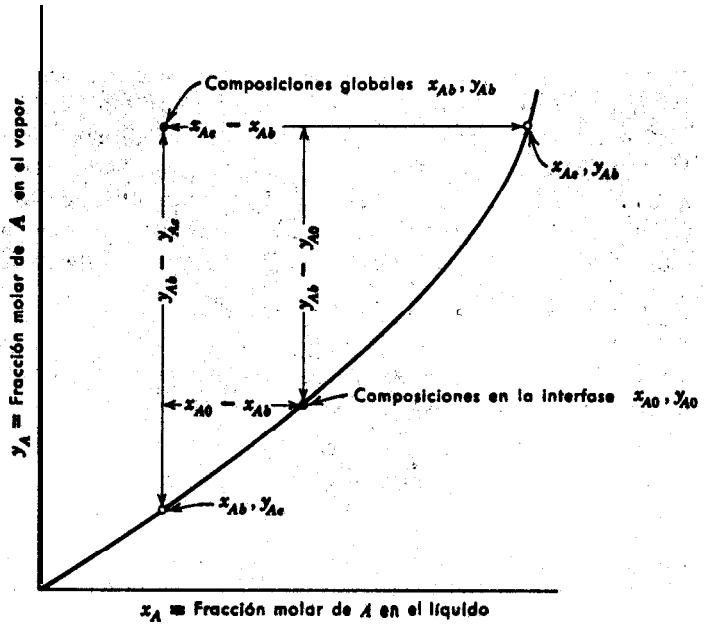


Fig. 21.3-2. Fuerzas impulsoras existentes en la interfase de transferencia de materia.

En la Fig. 21.3-2 se representa un ejemplo de curva de equilibrio y composiciones de interfase.

La diferencia de concentracibn a través de cada fase puede expresarse en función de la velocidad local de transferencia de materia y el coeficiente de transferencia de materia en dicha fase.

Aplicando la Ec. 21.1—10 a cada una de las fases, para lenta transferencia de materia de la especie A 'exclusivamente, se obtiene:

$$\frac{1 - x_{A0}}{k_x} \frac{d\mathcal{W}_{Ax}^{(m)}}{dA} = x_{A0} - x_{Ab} \tag{21.3-2}$$

$$\frac{1 - y_{A0}}{k_y} \frac{d\mathcal{W}_{Ay}^{(m)}}{dA} = y_{A0} - y_{Ab} \tag{21.3-3}$$

y como la densidad de flujo local $(d\mathcal{W}_{Ax}^{(m)}/dA = N_{Ax0})$ que *entra* en el líquido es igual a la densidad de flujo local $(-d\mathcal{W}_{Ay}^{(m)}/dA = -N_{Ay0})$ que *sale* del gas, estas ecuaciones pueden combinarse para dar

$$\frac{y_{Ab} - y_{A0}}{x_{Ab} - x_{A0}} = -\frac{k_x/(1 - x_{A0})}{k_y/(1 - y_{A0})} \tag{21.3-4}$$

Esta ecuación y la Ec. 21.3-1 determinan las dos composiciones desconocidas y_{A0} y x_{A0} cuando se conocen las composiciones globales y los coeficientes de transferencia de materia. De esta forma, se puede calcular la velocidad local de fransferencia de materia a partir de una cualquiera de las ecuaciones 21.3—2 6 21.3-3.

Los coeficientes de transferencia en una-soia fase son difíciles de medir, excepto en aquellas experiencias proyectadas de forma que se pueda despreciar la diferencia de concentración a través de una de las fases. Para expresar los datos experimentales resulta conveniente definir un coeficiente global de transferencia de inateria K_x o K_y mediante una modificación de las Ecs. 21.3-2 y 3. Para transferencia de A a través de B estancado, se puede escribir

$$\frac{1 - x_{Ae}}{K_x} \frac{d\mathcal{W}_{Ax}^{(m)}}{dA} = x_{Ae} - x_{Ab} \tag{21.3-5}$$

o

$$\frac{1 - y_{Ae}}{K_y} \frac{d\mathcal{W}_{Ay}^{(m)}}{dA} = y_{Ae} - y_{Ab} \tag{21.36}$$

La fracción molar y_{Ae} es la composición que tendría la fase gaseosa si estuviese en equilibrio con la composición global de la fase líquida x_{Ab}; es decir, que $y_{Ae} = f(x_{Ab})$, siendo f la función de equilibrio de la Ec. 2 1.3 — 1. De igual forma, x_{Ae} se define por $y_{Ab} = f(x_{Ae})$. (Véase Fig. 21.3-2.)

La relación entre K_x o K_y y los coeficientes de transferencia de materia en una sola fase es fácil de deducir. Se comienza por dividir en dos partes la «fuerza impulsora global de la fase gaseosa», $y_{Ae} - y_{Ab}$,

$$(y_{Ae} - y_{Ab}) = (y_{Ae} - y_{A0}) + (y_{A0} - y_{Ab})$$

$$= \left(\frac{y_{Ae} - y_{A0}}{x_{Ab} - x_{A0}}\right)(x_{Ab} - x_{A0}) + (y_{A0} - y_{Ab})$$

$$= m_y(x_{Ab} - x_{A0}) + (y_{A0} - \text{YA} \qquad (21.34)$$

En esta expresión, m_y es la pendiente de la línea que une el verdadero punto de la interfase. (y_{A0}, x_{A0}) con el ficticio (y_{Ae}, x_{Ab}), utilizado en el cálculo de la fuerza impulsora global de la fase gaseosa. Introduciendo las Ecs. 21.3−2, 3 y 6 y dividiendo por $d\mathcal{V}_A^{(x)}/dA = -d\mathcal{V}_A^{(y)}/dA$, se obtiene[3]

$$\frac{1 - y_{Ae}}{K_y} = \frac{m_y(1 - x_{A0})}{k_x} + \frac{1 - y_{A0}}{k_y} \qquad (21.3\text{–}8)$$

Procediendo de forma análoga con $(x_{Ae} - x_{Ab})$ se llega a

$$\frac{1 - x_{Ae}}{K_x} = \frac{1 - x_{A0}}{k_x} + \frac{1 - y_{A0}}{m_x k_y} \qquad (21.3\text{-}9)$$

en la que m_x es la pendiente de la recta que une los puntos (y_{A0}, x_{A0}) y (y_{Ab}, x_{Ae}). Si la línea de equilibrio es una recta de pendiente m, se cumple que $m_y = m_x = m$. De esto se deduce que

$$\frac{1 - y_{Ae}}{K_y} = m\frac{1 - x_{Ae}}{K_x} \qquad (21.3\text{–}10)$$

lo que pone. de manifiesto que K_x y K_y poseen la misma información básica.

---

[3] Se puede proceder de igual forma en función de k_G y k_L (véanse Ecs. 21 .l -43 y 4*b*) definiendo un coeficiente global mediante la expresión

$$N_{A0} = K_G(p_{Ae} - p_{Ab}) \qquad (21.3\text{–}8a)$$

con lo que el resultado que se obtiene para K_G es

$$\frac{1}{K_G} = \frac{H}{k_L} + \frac{1}{k_G} \qquad (21.3\text{-}8b)$$

Esta ecuación se aplica cuando la función de equilibrio correspondiente a la Ec. 21.3-1 es, aproximadamente, igual a la función lineal $p_{A0} = Hc_{A0}$ (ley de Henry). Nonosotros preferimos utilizar la Ec. 21.3-8 debido a que los coeficientes de transferencia de materia que intervienen en ella tienden a variar menos con la concentración; por otra parte, la utilización de k_x y k_y simplifica los cálculos cuando hay transferencia de ambos componantes A y *B*, como ocurre en destilación o en condensación parcial. (Véase el Problema 21.G.)

Es conveniente conocer la resistencia relativa de las dos fases a la transferencia de materia en un determinado sistema. Los términos de la Ec. 21.3-8 6 9, representan, respectivamente, las resistencias de la fase líquida y de la fase gaseosa, La resistencia que ofrece cualquiera de las fases disminuye al aumentar el coeficiente de transferencia de materia k_x o k_y, o al aumentar la concentración de A en dicha fase; de forma que las experiencias en las que una de las fases es prácticamente A puro son útiles para determinar los coeficientes de transferencia en una fase. Si m es muy grande, es decir, si A es practicamente insoluble en C, la resistencia de la fase líquida tiende a predominar y viceversa.

Este método puede aplicarse a la transferencia de dos o más componentes. (Véase el Problema 21.G.)

La mayor parte de los datos de diseño existentes sobre transferencia de materia en sistemas de dos fluidos están expresados en coeficientes-globales de transferencia de materia o magnitudes con ellos relacionadas. En diferentes referencias bibliográficas pueden hallarse extensos resámenes de datos.[4,5,6]

Los sistemas de transferencia de materia entre dos fluidos presentan numerosos problemas: el comportamiento de flujo es complicado; la interfase móvil es prácticamente inaccesible a la toma de muestra, el área interfacial es, generalmente, desconocida, y en muchos de los sistemas de interés práctico intervienen reacciones químicas en la fase líquida. Hace falta un mejor conocimiento básico de estos sistemas.

§ 21.4 DEFINICIÓN DE LOS COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA PARA ELEVADAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA

La transferencia de materia en la, interfase implica, generahnente, un flujo global de materia a través de la misma. Para *bajas velocidades de transferencia de materia,* este flujo global sólo es importante en el cálculo de las densidades de flujo de las distintas especies a través de la superficie de separación; por lo tanto, se pueden calcular las velocidades de transferencia de cantidad de movimiento, calor y materia, en una interfase de área A, mediante las sencillas expresiones correspondientes a las Ecs. 6.1-1, 13.1-1 y 21.1-8:

$$F_{kz} = fA\tfrac{1}{2}\rho V^2 \qquad (21.4\text{-}1)$$

$$Q = hA\,\Delta T \qquad (21.4\text{-}2)$$

$$\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)}) = k_x A\,\Delta x_A \qquad (21.4\text{-}3)$$

4 T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York, segunda edición (1952).

5 R. E. TREYBAL, *Mass Transfer Operations*, McGraw-Hill, Nueva York (1955).

6 *Chemical Engineers' Handbook*, J. H. Perry (Ed.), McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición.

siendo F_{kz} la fuerza que ejerce el fluido sobre la interfase en la dirección del flujo principal, Q la velocidad de *conducción* de calor hacia el interior del fluido en la interfase, y $\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)})$ la velocidad de *difusión* de la especie *A* hacia el interior del fluido en la interfase.

Para *altas velocidades de transferencia de materia* es conveniente utilizar definiciones análogas pero añadiendo un punto negro (●) superior para indicar que en este caso los coeficientes de transferencia dependen de la velocidad de transferencia de materia:

$$F_{kz} = f^{\bullet} A \tfrac{1}{2} \rho V^2 \qquad (21.4\text{–}4)$$

$$Q = h^{\bullet} A \, \Delta T \qquad (21.4\text{–}5)$$

$$\mathcal{N}_A^{(m)} - x_{A0}(\mathcal{N}_A^{(m)} + \mathcal{N}_B^{(m)}) = k_x^{\bullet} A \, \Delta x_A \qquad (21.4\text{–}6)$$

Los puntos negros se utilizarán solamente cuando los coeficientes de transferencia hayan sido corregidos para la velocidad de transferencia de materia. Estas correcciones, que provienen de la variación de los perfiles de, velocidad, temperatura y concentración, con la velocidad de flujo a través de la interfase, constituyen el tema de las secciones §§ 21.5–6 y 7. 'Para bajas velocidades de transferencia de materia se pueden tomar los coeficientes de transferencia no corregidos *f, h y k,* con lo que estas ecuaciones se transforman en las Ecs. 21.4—1, 2 y 3.

, Obsérvese que la fuerza F_{kz} y la velocidad de conducción de calor Q representan solamente parte del flujo de cantidad de movimiento y de energía a través de la superficie. Pata altas velocidades de transferencia de materia, la transferencia adicional de cantidad de movimiento y de energía debida al paso de fluido a través de la interfase puede ser' considerable. Estos flujos adicionales de cantidad de movimiento y energía *hacia el interior* del fluido los designamos por*

$$F_z^{(m)} = (\mathcal{N}_A^{(m)} M_A + \mathcal{N}_B^{(m)} M_B) v_{z0} \qquad (21.4\text{-}7)$$

$$Q^{(m)} = (\mathcal{N}_A^{(m)} \hat{H}_{A0} + \mathcal{N}_B^{(m)} \hat{H}_{B0}) \qquad (21.44)$$

en las que el índice superior-(m) indica que estos términos se deben solamente a la existencia de transferencia: de materia, y el subíndice 0 se refiere a condiciones del fluido junto a la interfase.

---

[1] La expresión de $Q^{(m)}$ se ha simplificado omitiendo los términos de energía cinética y potencial, que, en general, son de poca importancia. La expresión completa de $Q^{(m)}$ es

$$Q^{(m)} = \mathcal{N}_A^{(m)} \hat{H}_{A0} + \mathcal{N}_B^{(m)} \hat{H}_{B0} + (\mathcal{N}_A^{(m)} M_A + \mathcal{N}_B^{(m)} M_B)\left(\hat{\Phi}_0 + \frac{v_0^2}{2}\right) \qquad (21.4\text{–}8a)$$

si la energía potencial y la velocidad media de masa del' fluido son constantes para los valores de $\hat{\Phi}_0$ y v_0 a lo largo de la interfase.

Sumando los términos de flujo global $F_z^{(m)}$, $Q^{(m)}$ y $x_{A0}\,(\mathcal{W}_A^{(m)} + \mathcal{W}_B^{(m)})$ a las Ecs. 21.4-4, 5 y 6, se obtiene

$$-F_{kz} + F_z^{(m)} = -f^{\bullet} A \tfrac{1}{2}\rho V^2 + (\mathcal{W}_A^{(m)} M_A + \mathcal{W}_B^{(m)} M_B) v_{z0} \qquad (21.4\text{-}9)$$

$$Q + Q^{(m)} = h^{\bullet} A\,\mathrm{AT} + (\mathcal{W}_A^{(m)} \bar{H}_{A0} + \mathcal{W}_B^{(m)} \bar{H}_{B0}) \qquad (21.4\text{–}10)$$

$$\mathcal{W}_A^{(m)} = k_x^{\bullet} A\,\Delta x_A + (\mathcal{W}_A^{(m)} + \mathcal{W}_B^{(m)}) x_{A0} \qquad (21.4\text{–}11)$$

siendo $-F_{kz} + F_z^{(m)}$ la velocidad total de **adición** de cantidad de movimiento al . fluido, $Q + Q^{(m)}$ la velocidad, de adición de cualquier forma de **energía** que no sea trabajo*, y $\mathcal{W}_A^{(m)}$ la **velocidad molar** de adición de la especie A, siempre a través de la interfase de área A.

La evaluación de $f^{\bullet}$, $h^{\bullet}$ y $k_x^{\bullet}$, se considera en §§ 21.5, 6 y 7. Como la mayor parte de la información existente sobre coeficientes de transferencia se **limita** a **pequeñas** velocidades de' **transferencia** de materia, tiene **gran interés** evaluar los ***factores de corrección*** por los que **hay que** multiplicar f, h y k, para obtener **los coeficientes de** transferencia **corregidos:**

$$\theta_v = \frac{f^{\bullet}}{f} \qquad \theta_T = \frac{h^{\bullet}}{h} \qquad \theta_{AB} = \frac{k_x^{\bullet}}{k_x} \qquad (21.4\text{–}12,13,14)$$

El empleo de los subíndices v, T y AB, se debe a **que estos factores de** corrección dependen de los ***perfiles*** de ***velocidad, temperatura y concentración de A o B. Estos*** factores de corrección se pueden predecir para algunos **casos** sencillos resolviendo las ecuaciones de variación **para velocidad** finita a **través de** la **interfase.** Los sistemas tipo que se consideran **son** necesariamente **idealizados,** pero muchos de ellos representan aproximaciones titiles del comportamiento de numerosos sistemas reales.

§21.5 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA PARAELEVADAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA: TEORÍA DE PELÍCULA

En esta sección se utiliza un -modelo simplificado de transporte unidireccional para predecir la **variación** de los coeficientes de transferencia de cantidad de movimiento, calor y materia, con **la velocidad** de transferencia de **materia.** Las soluciones que se presentan aquí han sido. **obtenidas** por **distintos investigadores.**[1,2,3,4]

1 W. K. LEWIS y K. C. CHANO, *Trans. A. I.* Ch. *E.*, 21, 127-136 (1928) aplicaron la teorfa de película al transporte de ambas especies en la interfase de una mezcla binaria para altas velocidades de transferencia de materia.

2 G. ACKERMANN, *Forschungsheft*, 382, 1–16 (1937) aplicó la teoría de película a la transmisión de calor en presencia de una rápida transferencia de materia.

3 A. P, COLBURN y T. B. DREW, *Trans.* A. *I.* Ch. *E.*, 33, 197-212 (1937) confirmaron independientemente el análisis de Ackermann y aplicaron los resultados de las citas bibliográficas 1 y 2 a la condensación rápida 'de mezclas de vapores.

4 H. S. MICKLEY, R. C. Ross, A. L. SQUYERS y W. E. STEWART, *NACA Tech. Nota 3208 (1954)* han resumido los resultados de las citas 1, 2 y 3, en una forma analógica extendiendo la analogía a la transferencia de cantidad de movimiento en sistemas de presión constante.

Consideremos el caso de flujo estacionario que se indica en la Fig. 21.5—1, en el que una mezcla de dos fluidos circula horizontalmente a lo largo de una superficie plana, teniendo lugar una transferencia simultanea de calor, materia y cantidad de movimiento. Se supone que la presión p, la velocidad v_x, la temperatura T y la composición x_A, dependen solamente de la distancia y medida desde la pared,. y se

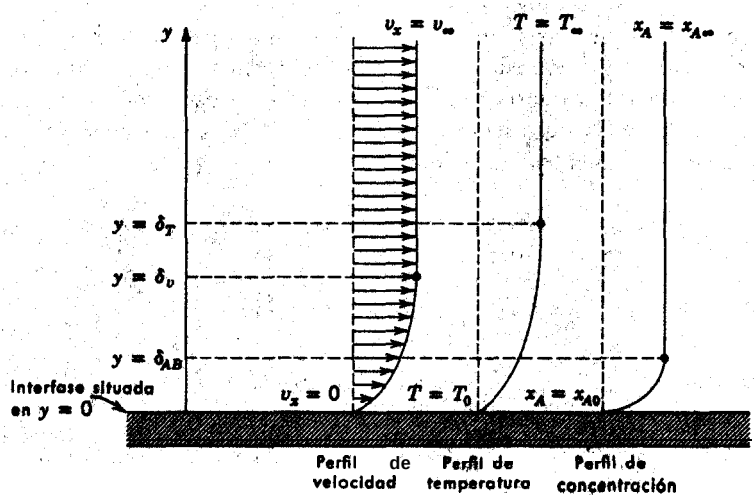


Fig. 21.5—1. Flujo estacionario unidimensional a lo largo de una superficie plana. Para $y > \delta$, los perfiles se consideran constantes.

hacen constantes cuando y es superior al correspondiente «espesor de película» δ_v, δ_T, y δ_{AB}. Se supone que el espesor de película es constante a lo largo de la pared e independiente de la velocidad de transferencia de materia. Se admite también que el flujo en la película es laminar, y que las propiedades de transporte μ, k y $c\mathscr{D}_{AB}$ son constantes. Se desprecian las reacciones químicas, la disipación viscosa y la emisión o absorción de energía radiante en el fluido.

Se supone que se conocen las siguientes condiciones del sistema:

para y = 0	$v_x = 0$	(21.5—1)
	$T = T_0$	(21.5—2)
	$x_A = x_{A0}$	(21.5—3)
	$\frac{N_{Ay}}{N_{By}} = \frac{N_{A0}}{N_{B0}}$	(21.5—4)
para y = 8,	$v_x = v_\infty$	(21.5-5)
para y = δ_T	$T = T_\infty$	(21.5-6)
para y = δ_{AB}	$x_A = x_{A\infty}$	(21.5-7)

Es decir, que se conocen los valores terminales de los tres perfiles, y además, la relación de las densidades de flujo molares en la pared. ge desea calcular los perfiles de velocidad, temperatura y composición, así como también Zas densidades de flujo de cantidad 'de movimiento, calor y materia, 'en las paredes. Después veremos cómo se evalúa el espesor de película, de forma que los resultados pueden aplicarse a sistemas de interés práctico.

Las ecuaciones de variación para este sistema pueden expresarse adecuadamente en función delas densidades de flujo de cantidad de movimiento, energía y materia, con relación a coordenadas estacionarias. A partir de las Ecs. 18.3-11 y 12 y 18.1— 10, y de las suposiciones de que p, v_x, T y x_A, dependen solamente de y, se obtienen las siguientes ecuaciones:

(movimiento) $$\frac{d\phi_{yx}}{dy} = 0 \qquad (y \leqslant \delta_v) \tag{21.5-8}$$

(energía) $$\frac{de_y}{dy} = 0 \qquad (y \leqslant \delta_T) \tag{21.5-9}$$

(continuidad) $$\frac{dN_{Ay}}{dy} = 0 \qquad (y \leqslant \delta_{AB}) \tag{21.5-10}$$

$$\frac{dN_{By}}{dy} = 0 \qquad (y \leqslant \delta_{AB}) \tag{21.5-11}$$

Integrando estas ecuaciones y evaluando ϕ_{yx}, e_y y N_{Ay}, a partir de las Ecs. 18.3 -8, 18.4-6 y 16.2—2, se-obtiene para los mismos intervalos de y:

(movimiento) $$\phi_{yx} = \rho v_y v_x - \mu \frac{dv_x}{dy} = \text{const.} \tag{21.5—12}$$

(energía) $$e_y = N_{Ay}\bar{H}_A + N_{By}\bar{H}_B - k\frac{dT}{dy} = \text{const.}' \tag{21.5—13}$$

(continuidad) $$N_{Ay} = x_A(N_{Ay} + N_{By}) - c\mathscr{D}_{AB}\frac{dx_A}{dy} = \text{const.} \tag{21.5—14}$$

$$N_{By} = \text{const.} \tag{21.5-15}$$

En lo sucesivo, las densidades de flujo constantes N_{Ay} y N_{By} se representarán por N_{A0} y N_{B0}. En el caso de que 6,. o δ_T sean superiores a δ_{AB}, a falta de otra información, las densidades de flujo N_{Ay} y N_{By} se siguen considerando como constantes en todc el intervalo de las Ecs. 21.5—8 y 21.5-9.

Expresando las constantes en función de las densidades de flujo en la pared (hasta ahora desconocidas), se obtienes

---

[5] Obsérvese que τ_0, q_0, N_{A0} y N_{B0} se emplean aquí como constantes de integración adecuadas. Por lo tanto, después de una segunda integración, existirán siete constantes de integración que se evaluarán mediante las Ecs. 21.5 — 1 a 7.

(movimiento) $$(v_x - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B) - \mu \frac{dv_x}{dy} = \tau_{yx}|_{y=0} \equiv -\tau_0 \qquad (21.5\text{-}16)$$

(energla) $$(T - T_0)(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}) - k \frac{dT}{dy} = q_y|_{y=0} \equiv q_0 \qquad (21.5\text{-}17)$$

(continuidad) $$(x_A - x_{A0})(N_{A0} + N_{B0}) - c\mathscr{D}_{AB} \frac{dx_A}{dy} = J_{Ay}^*|_{y=0} \equiv N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) \qquad (21.5\text{-}18)$$

En estas expresiones, ρv_y se ha evaluado a partir de la **Tabla** 16.1-3, y $\bar{H}_A$ y $\bar{H}_B$ están calculadas suponiendo que los calores específicos molares son constantes y que no hay calor de mezcla. Para hacer τ_0 positivo se adopta la **convención** habitual $\tau_{yx}|_{y=0} = -\tau_0$. **Obsérvese** que para un determinado **sistema** las Ecs. **21.5**— 16, 17 y 18 no contienen más magnitudes variables que v_x, T, x_A y la variable independiente y. Integrando las Ecs. 21.5-16, 17 y 18 y aplicando **las condiciones límite** de las **Ecs.** 21.5-1, ‘2 y 3, se obtienen las siguientes soluciones **para** los perfiles:

$$1 - \frac{(v_x - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)}{-\tau_0} = \exp(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)\frac{y}{\mu} \qquad (21.5\text{-}19)$$

$$1 - \frac{(T - T_0)(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})}{q_0} = \exp(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})\frac{y}{k} \qquad (21.5\text{-}20)$$

$$1 - \frac{(x_A - x_{A0})(N_{A0} + N_{B0})}{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})} = \exp(N_{A0} + N_{B0})\frac{y}{c\mathscr{D}_{AB}} \qquad (21.5\text{-}21)$$

Aplicando las condiciones límite de las **Ecs. 21.5—5, 6** y 7, se obtienenlas siguientes ecuaciones para las densidades **de** flujo τ_0, q_0 y $N_{A0} + N_{B0}$:

$$1 + \frac{(v_\infty - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)}{\tau_0} = \exp(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)\frac{\delta_v}{\mu} \qquad (21.5\text{-}22)$$

$$1 + \frac{(T_0 - T_\infty)(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})}{q_0} = \exp(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})\frac{\delta_T}{k} \qquad (21.5\text{-}23)$$

$$1 + \frac{(x_{A0} - x_{A\infty})(N_{A0} + N_{B0})}{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})} = \exp(N_{A0} + N_{B0})\frac{\delta_{AB}}{c\mathscr{D}_{AB}} \qquad (21.5\text{-}24)$$

Estas seis ecuaciones dan los perfiles y las densidades de flujo. En estos resultados están comprendidos los obtenidos anteriormente para casos más restringidos en **§** 17.2 (difusión a **través** de unapelículadegasestancado) y en el Ejemplo 18.5-1 (**condensación** de A en presencia de un gas B estancado). Para densidades de flujo, propiedades físicas, y espesores **de** pared determinados, se obtendría **una solución numérica procediento** de la siguiente forma:

Conociendo	*Se puede utilizar la Ec.*	*Para calcular*
x_{A0}, $x_{B\infty}$, $\frac{N_{A0}}{N_{B0}}$	21.5—24	N_{A0} y N_{B0}
N_{A0}, N_{B0}, T_0, T_∞	21.5-23	q_0
N_{A0}, N_{B0}, v_∞	21.5—22	τ_0

Una vez calculadas las densidades de flujo N_{A0}, N_{B0}, q_0, y τ_0, se pueden obtener directamente los perfiles a partir de las Ecs. 21.5—19, 20, y 21.

Para aplicar estos resultados a sistemas de interés práctico es preciso evaluar el espesor de película en función de magnitudes susceptibles de medida, y se eligen como tales los coeficientes de transferencia no corregidos Ji,, h_{loc}, y $k_{x,loc}$. Estos coeficientes son los valores límite de los coeficientes locales de transferencia corregidos, cuando N_{A0} y N_{B0} tienden hacia cero:

$$f_{loc}^{\bullet} = \frac{-\tau_0}{\frac{1}{2}\rho v_\infty (0 - v_\infty)} \qquad (21.5—25)$$

$$h_{loc}^{\bullet} = \frac{q_0}{(T_0 - T_\infty)} \qquad (21.4\text{-}26)$$

$$k_{x,loc}^{\bullet} = \frac{N_{AO} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})}{(x_{A0} - x_{A\infty})} \qquad (21.5—27)$$

Las Ecs. 21.5—22, 23 y 24 pueden ahora expresarse en función de estos coeficientes locales corregidos:

$$1 + \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{loc}^{\bullet}} = \exp\,(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)\frac{\delta_v}{\mu} \qquad (21.5\text{-}28)$$

$$1 + \frac{N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}}{h_{loc}^{\bullet}} = \exp\,(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})\frac{\delta_T}{k} \qquad (21.5\text{–}29)$$

$$1 + \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}^{\bullet}} = \exp\,(N_{A0} + N_{B0})\frac{\delta_{AB}}{c\mathscr{D}_{AB}} \qquad (21.5\text{–}30)$$

En el limite, cuando N_{A0} y N_{B0} tienden a cero, se obtienen las siguientes expresiones para los espesores de película:

$$\frac{\delta_v}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{loc}}\ \mu \qquad (21.5\text{-}31)$$

$$\frac{1}{h_{loc}} = \frac{\delta_T}{k} \qquad (21.5\text{-}32)$$

$$\frac{1}{k_{x,loc}} = \frac{\delta_{AB}}{c\mathscr{D}_{AB}} \qquad (21.5\text{–}33)$$

Estos valores límite se pueden hallar fácilmente desarrollando en serie los segundos miembros de las Ecs. 21.5-28, 29 y 30. Substituyendo estas expresiones del espesor' de película en las Ecs. 21.5-22, 23 y 24, se obtiene

$$1 + \frac{(v_\infty - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)}{\tau_0} = \exp\frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{f_{loc}} \tag{21.5-34}$$

$$1 + \frac{(T_0 - T_\infty)(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})}{q_0} = \exp\frac{N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}}{h_{loc}} \tag{21.5-35}$$

$$1 + \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}} = \exp\frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}} \tag{21.5-36}$$

Estas ecuaciones representan los principales resultados de la teoría de película, e indican cómo varían con N_{A0} y N_{B0} los esfuerzos cortantes, las densidades de flujo conductivo de energía, y la densidad de flujo de difusión en la pared. En este sencillo sistema de, flujo existe una evidente analogía entre los efectos de la transferencia de materia sobre las tres relaciones de densidad de flujo. Aunque las Ecs. 21.5-34, 35 y 36, se han deducido para flujo laminar y propiedades físicas constantes, sus resultados resultan también útiles para. flujo turbulento y propiedades físicas variables. (Véase el Problema 21.M.)

La mayor parte del resto de esta sección se dedica a definir las variables adimensionales ϕ, R, θ y Π, que son de gran utilidad para resumir los resultados de las distintas teorías de transferencia de materia. También se presentan los resultados anteriores de la teoría de película en función de estas variables adimensionales.

Los términos adimensionales del segundo miembro de las Ecs. 21.5-34, 35 y 36, varían directamente con las velocidades de transferencia de materia, y por eso se denominan *factores de velocidad*, ϕ:

$$\phi_v = \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{loc}} \tag{21.5-37}$$

$$\phi_T = \frac{N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}}{h_{loc}} \tag{21.5-38}$$

$$\phi_{AB} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}} \tag{21.5-39}$$

Los términos adimensionales del primer miembro de las Ecs. 21.5-34, 35 y 36, se denominan *relaciones de densidad de flujo*, R:

$$R_v = \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{loc}} = \frac{(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)(v_\infty - 0)}{\tau_0} \tag{21.5-40}$$

$$R_T = \frac{N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}}{h_{loc}} = \frac{(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})(T_0 - T_\infty)}{q_0} \tag{21.5-41}$$

$$R_{AB} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,loc}} = \frac{x_A - x_{A\infty}}{\frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}} \tag{21.5-42}$$

Obstrvese que R_v, R_T y R_{AB} son relaciones entre densidades de flujo de cantidad de movimiento, energía y materia, debidas al flujo global y las densidades de flujo debidas al transporte molecular en la interfase. Las Ecs. 21.5—34, 35 y 36 pueden expresarse ahora en una forma más compacta

$$\left.\begin{aligned} R &= e^{\phi} - 1 \\ \phi &= \ln(1 + R) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} (21.5\text{-}43) \\ (21.5\text{–}44) \end{matrix}$$

Al final de esta sección se exponen algunos ejemplos de, cálculo de velocidades de transmisión de calor y transferencia de materia mediante' estas ecuaciones. Los resultados correspondientes a $h^{\bullet}$ y $k_x^{\bullet}$ son válidos también para líneas de corriente curvas. (Véanse los. Problemas 21.K y L).

Los *factores de corrección* 8, para corregir el efecto de la transferencia de materia sobre los coeficientes de transferencia, vienen dados por

$$\theta_v = \frac{f^{\bullet}}{f} = \frac{\phi_v}{R_v} \qquad (21.5\text{-}45)$$

$$\theta_T = \frac{h^{\bullet}}{h} = \frac{\phi_T}{R_T} \qquad (21.5\text{-}46)$$

$$\theta_{AB} = \frac{k_x^{\bullet}}{k_x} = \frac{\phi_{AB}}{R_{AB}} \qquad (21.5\text{-}47)$$

Los valores de 'estos factores de corrección que predicen las Ecs. 21.5—43 y 44, de acuerdo con la teoría de película, son

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\phi}{e^{\phi} - 1} \\ \theta &= \frac{\ln(R + 1)}{R} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix} (21.5\text{–}48) \\ (21.5\text{-}49) \end{matrix}$$

Estas ecuaciones resultan convenientes para examinar el valor de las correcciones de transferencia de materia, mientras que las Ecs. 21.5-43 y 44 conducen a resultados más directos para las densidades de flujo.

En la Fig. 21.5-2 se representa la Ec. 21.5-48. Una información más detallada se presenta en las Figs. 21.7—1, 2 y 3, en las que se representan en forma adecuada para el cálculo los resultados de la teoría de película y otras diversas teorías. Los resultados indican que la transferencia de materia de *A y B hacia el interior* de la corriente hace que ϕ_v, ϕ_T y ϕ_{AB} sean positivos y que los coeficientes de transferencia *disminuyan,* mientras que si la transferencia de materia de *A* y *B* tiene lugar *hacia fuera* de la corriente, ϕ_v, ϕ_T y ϕ_{AB} son negativos y los coeficientes de transferencia *aumentan.* Si *A* y *B* se transmiten en direcciones opuestas, los factores ϕ pueden ser

de distinto signo, y en este caso, se corregirán en direcciones opuestas los correspondientes coeficientes de. transferencia. (Obsérvese una vez más que N_{A0} es *positivo* cuando *A se adiciona* a la fase en consideración y *negativo* cuando *A se substrae*, y análogamente para la espie *B*. La necesidad de este convenio acerca del signo resulta ahora evidente.)

Los perfiles que se obtienen a partir de las Ecs. 21.5—19 a 24 pueden ponerse en las formas adimensionales:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \frac{e^{\phi\eta} - 1}{e^{\phi} - 1} \qquad (\eta \leqslant 1) \end{aligned}\right\} \qquad (21.5\text{–}50)$$

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \frac{(1 + R)^{\eta} - 1}{R} \qquad (\eta \leqslant 1) \end{aligned}\right\} \qquad (21.5\text{–}51)$$

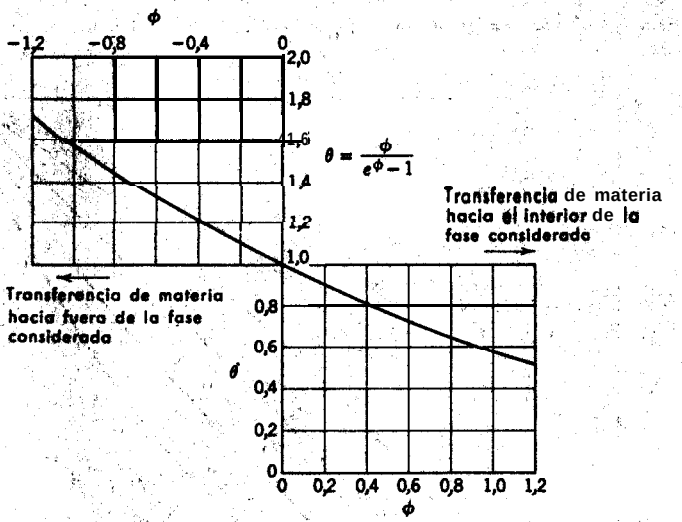


Fig. 21.5-2. Variación de los coeficientes de transferencia con la velocidad de transferencia de materia, según la Ec. 21.5—48.

siendo Π una velocidad, temperatura o fracción molar; adimensionales

$$\Pi_V = \frac{v_x - 0}{v_\infty - 0} \qquad \Pi_T = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, \qquad \Pi_{AB} = \frac{x_A - x_{A0}}{x_{A\infty} - x_{A0}} \qquad (21.5\text{–}52,53,54)$$

y η una coordenada adimensional

$$\eta_v = \frac{y}{\delta_v} \qquad \eta_T = \frac{y}{\delta_T} \qquad \eta_{AB} = \frac{y}{\delta_{AB}} \qquad (21.5\text{–}55,56,57)$$

En el limite de pequeñas velocidades de transferencia de materia, las Ecs. 21.5—50 y 51 se reducen a la forma lineal

$$\lim_{\substack{R\to 0\\ \phi\to 0}} \Pi = \eta \tag{21.5-58}$$

En § 17.2 (difusión de *A* a través de *B* estancado) y en el Ejemplo 18.5— 1 (condensación de *A* en presencia de *B* estancado) se han obtenido diversas formas especiales de estos perfiles Π.

En la' Fig. 21.5-3 se representan gráficamente algunos ejemplos de perfiles. El efecto de la transferencia de materia sobre la forma de los perfiles está de acuerdo con los efectos que ejerce sobre los coeficientes de transferencia que se han indicado anteriormente. Los perfiles completos sólo tienen aquí un interés incidental, pero sirven para poner de manifiesto que este tratamiento sólo puede aplicarse con carácter aproximado a la mayor parte de, los sistemas de flujo..

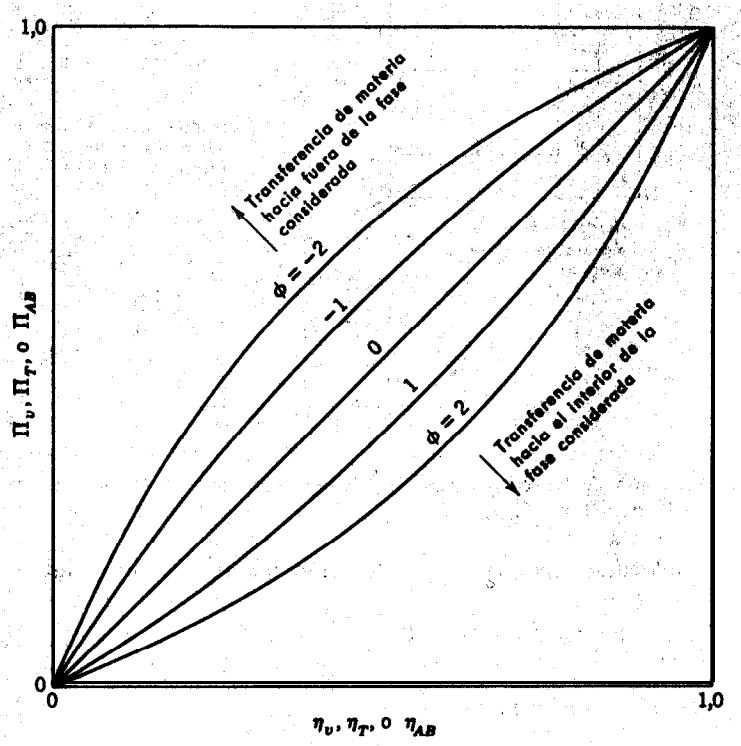


Fig. 21.5-3. Perfiles de velocidad, temperatura y concentración, en una película laminar, calculados a partir de la Ec. 21.5—50.

Las anteriores deducciones están expresadas en función de las condiciones de la corriente v_∞, T_∞ y $x_{A\infty}$, a una gran distancia de la superficie. Para conducciones cerradas, los resultados se aplican ordinariamente sin más que substituir las condiciones «globales» de la corriente, v_{xb}, T_b y x_{Ab}. Esta substitución equivale a cortar cada perfil en el punto en que se alcanza el valor global, y de esta forma las correcciones de transferencia de materia pueden resultar demasiado bajas; sin embargo, no se dispone hasta ahora de una mejor interpretación de la teoría de película.

La principal limitación de la teoría de película reside en la supuesta dependencia unidimensional de p, v_x, T y x_A. En general, resulta difícil valorar la utilidad de esta suposición, pero parece probable que los resultados serán al menos cualitativamente correctos para el flujo en conducciones cerradas con perfiles totalmente desarrollados. Puesto que se ha despreciado el gradiente de presión a lo largo de la pared, los resultados de f_{loc} no serán aplicables a flujos con resistencia de forma ni a flujos en los que el gradiente de presión en la película paralela a la pared sea responsable de una fracción considerable del esfuerzo cortante de pared. La suposición de que los espesores de película no se afectan por la transferencia de materia está en discusión, y sólo se puede comprobar por experimentación o mediante métodos de cálculo más realistas. Las suposiciones de flujo laminar y propiedades de transporte constantes pueden suprimirse sin dar lugar a una gran complicación de los resultados. (Vtase el Problema.21.M.)

Se ha expuesto con detalle la teoría de película debido a su importancia histórica en la bibliografía de la transferencia de materia. En §§ 21.6 y 7 se predicen por métodos más específicos los factores de corrección para otros dos sistemas de flujo.

En §§ 17.3 y 4 se ilustra sobre la aplicación de la teoría de película a sistemas que reaccionan químicamente. Otras aplicaciones pueden verse en el resumen de Sherwood y Pigford.[6]

Ejemplo 21.5— 1. Evaporación rápida de un líquido puro

Un líquido A se evapora sobre una lamina porosa mojada que esta sumergida en una corriente tangencial de un gas no condensable B.

En un punto de la superficie, el coeficiente de transferencia de materia en la fase gaseosa $k_{x,loc}$, evaluado para las propiedades medias del fluido, vale 0,5 kg-mol hr^{-1} m^{-2} y la composición interfacial del gas es x_{A0} = 0,80. Estimar la velocidad local de evaporación.

Solución. Puesto que B no condensa, $N_{B0} = 0$. Aplicando la Ec. 21.5-36 a la fase gaseosa, se obtiene

$$\ln\left\{1 + \frac{0{,}80 - 0}{1{,}0 - 0{,}80}\right\} = \frac{N_{A0} + 0}{0{,}5} \qquad \text{(21.5-59)}$$

de donde

$$N_{A0} = 0{,}5 \ln\{1 + 4{,}0\}$$
$$= 0{,}805 \text{ kg-mol hr}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

---

[6] T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption nnd Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), Capitulo IX.

Mediante la teoría de capa límite se obtiene una velocidad de evaporación considerablemente menor. (Véase el Ejemplo 21.7— 1).

Es interesante comparar el resultado anterior con el que se obtiene utilizando la Ec. 21.1-2, tomando $k_{x,\mathrm{loc}}$ en vez de $k_{x,\mathrm{loc}}$. De esta forma se obtiene

$$N_{A0} = 0{,}80\,(N_{A0} + 0) = 0{,}5(0{,}80 - 0{,}00) \qquad (21.5-60)$$

$$N = 2{,}0 \text{ kg-mol } \mathrm{hr}^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}$$

Este resultado es mucho más alto e indica que las correcciones de transferencia de materia son importantes en este sistema.

En este sencillo problema han aparecido los términos R_{AB} y $\phi_{A\,B}$ aunque no se les haya aplicado esta notación (compárense las Ecs. 21.5-44 y 59). Sin embargo, la utilización de los símbolos R y ϕ son muy útiles para proceder a la resolución de problemas más complejos. (Véanse los Ejemplos 21.5-3 y 21.8-1.)

Ejemplo 21.5-2. Utilización de factores de corrección en la evaporación de una gotita

Ajustar los resultados del Ejemplo 21.2— 1 para la velocidad de transferencia de materia existente, aplicando un adecuado factor de corrección.

Solución. La relación de densidad de flujo molar R_{AB} en un punto cualquiera de la superficie de la gota del Ejemplo 21.2-1 es

$$R_{A\,B} = \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\dfrac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}} = \frac{0{,}0245}{1 - 0{,}0245} = 0{,}025\,1 \qquad (21.5\text{-}61)$$

El factor de corrección que se predice a partir de la Ec. 21.5 -49 o la Eig. 21.7 -3 es $\theta_{AB} = 0{,}987$ para todos los puntos de la superficie de la gota. Por lo tanto, la velocidad de transferencia de materia corregida es

$$\mathcal{W}_A^{(m)} = \theta_{AB} k_{xm} \pi D^2 \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}} \qquad (21.5\text{-}62)$$

$$= (0{,}987)\ (2{,}66 \times 10^{-7})$$

$$= 2{,}63 \text{ x } 10^{-7} \text{ g-mol seg}^{-1}$$

Este resultado concuerda casi exactamente con el que se ha obtenido en el Ejemplo 21.2— 1, lo que indica que, en las condiciones citadas, se cumple satisfactoriamente la suposición de baja velocidad de transferencia de materia.

Ejemplo 21.5-3. Comportamiento del bulbo húmedo a altas velocidades de transferencia de materia

Ampliar el análisis del Ejemplo 21.2-2 para altas velocidades de transferencia de materia.

Solución. Planteando de nuevo el balance de energía, Ec. 21.2-29, para una velocidad finita de transferencia de materia y para un punto situado sobre la muselina, se obtiene

$$N_{A0}\,\Delta H_{A,\mathrm{vap.}} = h_{\mathrm{loc}}(T_\infty - T_0) \qquad (21.5\text{–}63)$$

Multiplicando los dos miembros por $\tilde{C}_{pA}/\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap}}h_{\text{loc}}$ y teniendo en cuenta que $N_{B0} = 0$, resulta

$$R_T = \frac{N_{A0}\tilde{C}_{pA}}{h_{\text{loc}}} = \frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap.}}} \tag{21.5-64}$$

El segundo miembro de esta ecuación se puede calcular fácilmente si se conocen T_0, T_∞, y p.

Aplicando la Ec. 21.5-44 para la transmisión de calor, siendo $N_{B0} = 0$, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad local de evaporación:

$$N_{A0} = \frac{h_{\text{loc}}}{\tilde{C}_{pA}} \ln (1 + R_T) \tag{21.5-65}$$

Aplicando la Ec. 21.5 -44 a la difusión de A o B, y tomando de nuevo $N_{B0} = 0$, se obtiene una segunda expresión para N_{A0}:

$$N_{A0} = k_{x,\text{loc}} \ln (1 + R_{AB}) \tag{21.5–66}$$

Igualando las dos expresiones de N_{A0} resulta

$$\ln (1 + R_{AB}) = \frac{h_{\text{loc}}}{k_{x,\text{loc}}\tilde{C}_{pA}} \ln (1 + R_T) \tag{21.5-67}$$

Al introducir las expresiones de R_{AB} y R_T para este problema, se obtiene

$$\ln \left(1 + \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}}\right) = \frac{h_{\text{loc}}}{k_{x,\text{loc}}\tilde{C}_{pA}} \ln \left(1 + \frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap}}}\right) \tag{21.568}$$

Esta ecuación indica que x_{A0} y T_0 solamente pueden ser constantes en la superficie de la muselina si $h_{\text{loc}}/k_{x,\text{loc}}\tilde{C}_{pA}$ es constante, y por consiguiente, igual a $h_m/k_{xm}\tilde{C}_{pA}$. Para mayor sencillez se supone en este caso que dicha constancia se cumple; tal suposición es especialmente satisfactoria para el sistema H_2O-aire, para el que Pr y Sc son prácticamente iguales. Con esta suposición, la Ec. 21.5-68 se transforma en

$$\ln \left(1 + \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}}\right) = \frac{h_m}{k_{xm}\tilde{C}_{pA}} \ln \left(1 + \frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap}}}\right) \tag{21.5-69}$$

que se convierte exactamente en la Ec. 21.2-31 para bajas velocidades de transferencia de materia.

Para el problema numérico del Ejemplo 21.2-2, se aplican los siguientes *valores:*

$$x_{A0} = 0{,}0245$$

$$\tilde{C}_{pA} = 8{,}03 \text{ kcal (kg-mol)}^{-1}\,^\circ\text{C}^{-1} \text{ para el vapor de agua a } 40{,}5\,^\circ\text{C}$$

$$\frac{h_m}{k_{xm}} = 5{,}93 \text{ kcal (kg-mol)}^{-1}\,^\circ\text{C}^{-1}, \text{ de la Ec. 21.2-34}$$

$$\frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta\tilde{H}_{A,\text{vap}}} = \frac{(8{,}03)\ (60 - 21)}{10.500} = 0{,}0298$$

Introduciendo estos valores en la Fc. 21.5-69, se obtiene

$$\ln\left(1 + \frac{0{,}0245 - x_{A\infty}}{1 - 0{,}0245}\right) = \frac{5{,}93}{8.03} \ln (1{,}0298) = 0{,}0217$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra

$$x_{A\infty} = 0{,}0031$$

Este resultado difiere muy poco del valor $x_{A\infty}$=0.,0030 obtenido en el Ejemplo 21.2-2 y justifica el que se hayan despreciado las correcciones de transferencia de materia en las citadas condiciones.

Mediante **cálculos** numéricos se encuentra que la sencilla **Ec.** 21.2-31 constituye una buena aproximación de la **Ec.** 21.5-69 para todas las condiciones previsibles del termómetro de bulbo húmedo. Esto se debe a que las Ecs. 21.2-29 y 30 estiman por exceso la velocidad de transferencia de materia en una forma muy parecida, y al igualar estas ecuaciones, los errores se compensan en gran parte.

§ 21.6 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA PARA ALTAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA: **TEORÍA** DE PENETRACIÓN

En esta sección se **utiliza** la **teoría** de penetración para predecir la influencia de los coeficientes de transferencia de calor y materia sobre la velocidad de transferencia de materia. Esta teoría supone que el perfil de velocidad es plano junto a la interfase, y por lo tanto, es especialmente aplicable a la fase llquida en los sistemas gas-líquido. (Véase, por ejemplo, Figs. **17.5—** 1 y 2.) **Higbie**[1] aplicó por primera vez esta **teoría** a las operaciones de transferencia de materia, y posteriormente han aparecido en la literatura numerosas variantes. En primer lugar discutiremos un caso en el que la teoría es prácticamente exacta, para ver después las modificaciones para otros sistemas de flujo.

Consideremos el contacto de una corriente gaseosa de *A* y *B* con una película **descendente** de una mezcla líquida de *A* y *B,* tal como se indica en la Fig. 21. 6-1. En § 17.5 se ha visto que, para flujo laminar sin ondulaciones, y cortos tiempos de exposición de la superficie del líquido, el proceso de difusión en la fase líquida penetra **sólo** parcialmente dentro de la película descendente, y es análogo a la difusión no estacionaria en un fluido infinito en reposo.

El análisis de § 17.5 es sólo valido para pequeñas velocidades de transferencia de materia y en ausencia de reacción química; aquí se amplía el análisis* para altas velocidades de transferencia de materia, utilizando la solución de Amold expuesta en el Ejemplo 19.1-1.

---

1 R. **HIGBIE,** *Trans.* A. *I. Ch. E.,* **31, 365-389 (1935).**

2 W. E. **STEWART,** próxima publicación.

El análisis de § 19.1 describe la **difusión** en estado no estacionario que tiene lugar **cuando** una gran masa estacionaria del gas ***B*** puro se expone **súbitamente** a lo largo de la **superficie** plana z = 0, a un líquido ***A*** puro que no disuelve a ***B.*** Aquí se establece la solución en una forma más general' para sistemas en los que

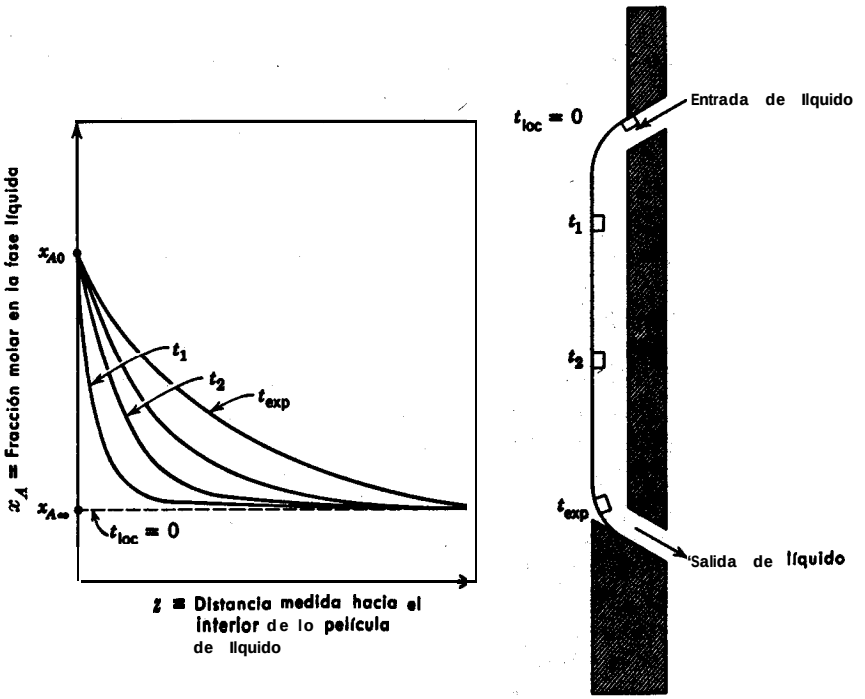


Fig. 21.6-1. **Difusión** hacia el interior de una **película** líquida descendente; t_{exp} es el tiempo total de exposición de un elemento típico de volumen próximo a la superficie.

ambas especies atraviesan la interfase con una determinada relación N_{A0}/N_{B0}. Las dos fases pueden contener inicialmente A y ***B.*** La solución se. expresa para la región líquida o gaseosa z > 0, en la que la composición inicial es $x_{A\infty}$, y la **composición** de la interfase para $t > 0$ es constante e igual a x_{A0}. Las propiedades c y $\mathscr{D}_{AB}$ se consideran constantes para $z > 0$.

La velocidad instantánea de transferencia de materia viene dada implícitamente por la siguiente **generalización** de la **Ec. 19.1—** 17:

$$\frac{\dfrac{x_{A0} - x_{A\infty}}{N_{A0}}}{\dfrac{}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}} = \sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf} \varphi)\varphi \exp \varphi^2 \qquad (21.61)$$

en la que φ es la velocidad adimensional de transferencia de materia de la Ec. 19.1−13*a*:

$$\varphi = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{c}\sqrt{\frac{t}{\mathscr{D}_{AB}}} \tag{21.6-2}$$

La Ec. 21.6-1 indica que φ es constante durante el proceso de difusión, y, por consiguiente, N_{A0} y N_{B0} varían con $t^{-1/2}$. El perfil de concentración para $z > 0$ viene dado por la Ec. 19.1-16 y la Fig. 19.1-1, substituyendo la **composición adimensional** X por

$$X_{AB} = \frac{x_A - x_{A\infty}}{x_{A0} - x_{A\infty}} = 1 - \Pi_{AB} \tag{21.6-3}$$

La coordenada adimensional $Z = z/\sqrt{4\mathscr{D}_{AB}t}$ utilizada en el Ejemplo 19.1-1 permanece invariable.

Para aplicar la solución anterior a la película **descendente** de líquido de la Fig. 21.6-1, basta simplemente con substituir t por t_{loc}, el tiempo durante el cual se ha expuesto al gas un determinado elemento de la superficie móvil del líquido. Si la velocidad superficial $v_{máx}$ es constante y no se forman ondulaciones, $t_{loc} = x/v_{máx}$, siendo x la distancia que desciende en la pared. Obsérvese que la solución de ***flujo estacionario*** que se obtiene de esta forma incluye el transporte **convectivo** hacia abajo en la pared, pero no tiene en cuenta la difusión en esta dirección; esta suposición es satisfactoria excepto para la pequeñísima región inmediata a x = 0. La solución transformada está supeditada a las condiciones límite de que han de ser constantes tanto x_{A0} y N_{A0}/N_{B0} a lo largo de la interfase, como la composición $x_{A\infty}$ en el interior de la película descendente.

El coeficiente local de transferencia de materia $k^{\bullet}_{x,loc}$, a una determinada **distancia** medida hacia abajo en la pared mojada, se define, de acuerdo con la Ec. 21.1-2, por

$$k^{\bullet}_{x,loc} = \frac{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})}{x_{A0} - x_{A\infty}} \tag{21.6-4}$$

Aquí se ha tomado $\Delta x_A = x_{A0} - x_{A\infty}$, siendo $x_{A\infty}$ la composición del líquido a la entrada.

Introduciendo la Ec. 21.6-4 en la Ec. 21.6-1 se obtiene

$$\frac{N_{A0} + N_{B0}}{k^{\bullet}_{x,loc}} = \sqrt{\pi}\varphi(1 + \operatorname{erf}\varphi)\exp\varphi^2 \tag{21.6-5}$$

que en el límite de bajas velocidades de transferencia de materia se transforma en

$$\left\{\lim_{\varphi\to 0} k^{\bullet}_{x,loc}\right\} = k_{x,loc} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{\varphi\sqrt{\pi}} \tag{21.6-6}$$

Calculando el valor de φ que interviene en esta ecuación a partir de la Ec. 21.6-2, se obtiene

$$k_{x,\mathrm{loc}} = c\sqrt{\frac{\mathscr{D}_{AB}}{\pi t_{\mathrm{loc}}}} \qquad (21.6\text{-}7)$$

que corresponde al resultado obtenido por Higbie[1] para bajas velocidades de transferencia de materia.

La variación de $k_{x,\mathrm{loc}}$ con la velocidad de transferencia de materia puede expresarse convenientemente en función de las magnitudes adimensionales que intervienen en la teoría de película:

$$R_{AB} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,\mathrm{loc}}} = \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\dfrac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}} \qquad (21.6\text{-}8)$$

$$\phi_{AB} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,\mathrm{loc}}} \qquad (21.6\text{-}9)$$

$$\theta_{AB} = \frac{k_{x,\mathrm{loc}}}{k_{x,\mathrm{loc}}} \qquad (21.610)$$

La relación de densidades de flujo R_{AB} es la misma del primer miembro de la Ec. 21.6-1. El factor de velocidad puede relacionarse con la densidad de flujo adimensional φ combinando las Ecs. 21.6-6 y 9:

$$\phi_{AB} = \varphi\sqrt{\pi} \qquad (21.6\text{–}11)$$

La Ec. 21.6–1 puede expresarse ahora en función de R_{AB} y ϕ_{AB} con el fin de facilitar los cálculos de transferencia de materia:

$$R = \phi\left(1 + \operatorname{erf}\frac{\phi}{\sqrt{\pi}}\right)\exp\frac{\phi^2}{\pi} \qquad (21.612)$$

y el factor de corrección $\theta_{AB} = \phi_{AB}/R_{AB}$ viene dado por

$$\theta = \left(1 + \operatorname{erf}\frac{\phi}{\sqrt{\pi}}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{\phi^2}{\pi}\right) \qquad (21.613)$$

Estas relaciones predicen una mayor variación de $k_{x,\mathrm{loc}}$ con la velocidad de transferencia de materia que los resultados correspondientes de las Ecs. 21.5-43 y 48 de la teoría de película. En las Figs. 21.7-2 y 3 se representan gráficamente los resultados de ambas teorías.

Las Ecs. 21.6-12 y 13 pueden servir para transmisión de calor si k, ρ, y C_p son constantes en todo el fluido e iguales para ambas especies. Puede obtenerse una solución aproximada para el caso de propiedades del fluido variables, definiendo R_T y ϕ_T

de igual forma que en las Ecs. 21.5-38 y 41. También resulta útil la ecuación para transmisión de calor análoga a la Ec. 21.6-7 :

$$h = \rho C_p \sqrt{\frac{\alpha}{\pi t_{loc}}} \tag{21.6-14}$$

Combinando esta expresión con la Ec. 21.6-7, se obtiene

$$h_{loc} = k_{x,loc} C_p \sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}_{AB}}} \tag{21.645}$$

La Ec. 21.6— 15 proporciona un método sencillo para predecir coeficientes de transmisión de calor para bajas velocidades de transferencia de materia a partir de correlaciones de transferencia de materia. El coeficiente corregido h● puede calcularse mediante la Ec. 21.6— 12 6 13, o a partir de las gráficas de § 21.7.

Si hay ondulaciones o turbulencia en la película descendente, se puede utilizar también la teoría de penetración con carácter aproximado, suponiendo que las distintas partes de la superficie del líquido se renuevan de cuando en cuando con material fresco en virtud de algún proceso de mezcla. Se supone después que t_{loc} representa un tipo de «edad media» de los distintos elementos de superficie que llegan a un determinado lugar del aparato en un dilatado periodo de tiempo. Si se acepta esta interpretación, se puede *definir* t_{loc} mediante la Ec. 21.6-7 6 14, y aplicar sin variación las Ecs. 21.6-4 y siguientes. Esta interpretación sugiere que t_{loc} dependerá de las condiciones de flujo y de la simetría del sistema, pero no de a o $\mathscr{D}_{AB}$.

La variación de k_x con $\mathscr{D}_{AB}^{1/2}$,quepara las citadas condiciones prevée la Ec. 21.6-7, se ha confirmado experimentalmente para la fase líquida en diversos sistemas de transferencia de materia gas-líquido, tales como columnas cortas de pared mojada, columnas de relleno, y en ciertos casos de flujo de líquidos en torno a burbujas gaseosas. (Véase el Ejemplo 17.5— 1.) Téngase en cuenta que esta variación con $\mathscr{D}_{AB}$ se aplica solamente a sistemas en los que la velocidad de la fase líquida es, aproximadamente, constante en toda la región de difusión; otros perfiles de velocidad dan resultados bastante diferentes. (Véase el Problema 17.5 acerca de la disolución en una película descendente.)

La teoría de penetración se ha aplicado también a la absorción con reacción química. En la obra de Sherwood y Pigford[3] se exponen numerosos ejemplos de este método. (Véase también el Ejemplo 19.1-3 y el Problema 19.D.)

§ 21.7 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA PARA ALTAS VELOCIDADES DE TRANSFERENCIA DE MATERIA: TEORÍA DE CAPA LÍMITE

En esta sección se estudia el efecto de la transferencia de materia sobre los coeficientes de transferencia para el flujo laminar bidimensional a lo largo de una lámina

[3] T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952), Capitulo IX.

plana. (Véase Fig. 19.3-1). Este análisis difiere de las teorías de película y penetración en que se consideran con detalle los perfiles bidimensionales de velocidad.

En § 19.3 se han obtenido los perfies de velocidad, temperatura y composición para la transferencia simultánea de cantidad de movimiento, calor y energía, en la capa laminar límite situada sobre una lámina plana. El análisis corresponde a una mezcla binaria con propiedades constantes del fluido y en ausencia de disipación viscosa o reacción química homogénea. Las soluciones son aplicables cuando la temperatura y la composición del fluido son constantes a lo largo de la superficie de la lámina y cuando N_{A0}/N_{B0} es también constante. Los perfiles de velocidad, temperatura y composición, que resultan vienen dados por la función sencilla

$$\Pi = \Pi(\eta, \Lambda, K) \tag{21.7-1}$$

que representa la variación de los perfiles Π_v, Π_T y $\Pi_{A\ B}$, con la coordenada de posición $\eta = (y/2)\sqrt{v_\infty/\nu x}$, el grupo Λ de propiedades físicas (es decir, 1, Pr, o Sc), y la densidad de flujo de materia adimensional en la pared, $K = (2v_{y0}/v_\infty)\sqrt{v_\infty x/\nu}$. En la Fig. 19.3-2 se representan gdficamente algunos ejemplos de estos perfiles. La deducción de § 19.3 se ha hecho para $N_B = 0$; sin embargo, los resultados son válidos para la transferencia de materia de A y B si K se evalúa en la forma que se indica aquí. (Véase el Problema 19.F).

Los coeficientes locales para la transferencia simultánea de cantidad de movimiento, calor y materia, se pueden obtener directamente a partir de las expresiones que se dan en las Ecs. 19.3—34, 35 y 36, para la densidad de flujo de pared; las ecuaciones análogas que se obtienen son las siguientes:

$$\frac{f_{loc}}{2} = \frac{\Pi'(0, 1, K)}{2}\left(\frac{v_\infty x}{\nu}\right)^{-1/2} \tag{21.7-2}$$

$$\frac{h_{loc}}{\rho \hat{C}_p v_\infty} = \frac{\Pi'(0, \mathrm{Pr}, K)}{2\ \mathrm{Pr}}\left(\frac{v_\infty x}{\nu}\right)^{-1/2} \tag{21.7-3}$$

$$\frac{k_{x,loc}}{c v_\infty} = \frac{\Pi'(0, \mathrm{Sc}, K)}{2\ \mathrm{Sc}}\left(\frac{v_\infty x}{\nu}\right)^{-1/2} \tag{21.711}$$

En la Tabla 19.3-1 se indican los valores numéricos de $2\Pi'(0, \Lambda, K)$.

Para mayor facilidad de utilización y también para compararlos con otras teorías de las correcciones de transferencia de materia, vamos a presentar estos resultados en función de los términos R, ϕ y 8, que intervienen en las teorías de película y penetración. Cuando las propiedades físicas de la mezcla son constantes e iguales para las especies A y B, las Ecs. 21.5-40, 41 y 42, se transforman en

$$R_v = \frac{\rho v_{y0}}{\rho v_\infty f_{loc}/2} \qquad R_T = \frac{\rho \hat{C}_p v_{y0}}{h_{loc}} \qquad R_{AB} = \frac{c v_{y0}}{k_{x\,loc}} \tag{21.7–5,6,7}$$

Introduciendo las soluciones de capa límite para $f^{\bullet}$, $h^{\bullet}$ y $k_x^{\bullet}$, se obtiene

$$R_v = \frac{K}{\Pi'(0, 1, K)} \qquad R_T = \frac{K \Pr}{\Pi'(0, \Pr, K)}$$

$$R_{AB} = \frac{K\,Sc}{\Pi'(0, Sc, K)} \qquad \text{(21.7–8,9,10)}$$

que pueden compendiarse en esta única solución

$$R = \frac{KA}{\Pi'(0, \Lambda, K)} \qquad \text{(21.7-11)}$$

Para evaluar ϕ basta simplemente con substituir $f^{\bullet}$, $h^{\bullet}$ y $k^{\bullet}$, de las Ecs. 21.7-5, 6 y 7, por los valores correspondientes para $K = 0$; el resultado es

$$\phi = \frac{KA}{\Pi'(0, \Lambda, 0)} \qquad \text{(21.7–12)}$$

y las correcciones de transferencia de materia para f, h y k, vienen dadas por las siguientes relaciones de las pendientes de perfil en la pared:

$$\theta = \frac{\Pi'(0, \Lambda, K)}{\Pi'(0, \Lambda, 0)} \qquad \text{(21.7-13)}$$

En las Figs. 21.7-1, 2 y 3, se representan gráficamente las relaciones teóricas entre R, ϕ y θ, y en la Tabla 21.7— 1 se da un resumen de la notación utilizada. Los valores para $\Lambda = \infty$ se han obtenido analíticamente a partir de la Ec. 19.3-50. Las soluciones de capa limite sólo son estrictamente válidas si las propiedades físicas ρ, μ, $\hat{C}_p$, k, c y $\mathscr{D}_{AB}$ son constantes; sin embargo, las gráficas están representadas en función de las definiciones de R y ϕ para propiedades variables, con el fin de que se puedan aplicar con carácter aproximado a un mayor número de problemas.

En las Figs. 21.7-1, 2 y 3, se han representado también los resultados de las teorías de película y penetración. Obsérvese que las soluciones de capa límite presentan una variación con Λ que no existe en las demás soluciones; esto se debe a que en las teorías de penetración y película se ha suprimido el efecto del perfil-v, sobre los perfiles de temperatura y concentración. La teoría de película es la que predice el menor efecto de la transferencia de materia sobre los coeficientes de transferencia.

La principal conclusión que se deduce de la comparación de las tres series de resultados de las Figs. 21.7— 1, 2 y 3, es que las correcciones de transferencia de materia dependen de la geometría del flujo y de las condiciones límite, de forma que cada teoría tiene un intervalo preferente de aplicación. Los resultados de capa límite obtenidos aquí son, evidentemente, preferibles para el flujo laminar a lo largo de superficies planas estacionarias y para la entrada de tubos, mientras que la teoría de penetración es, generalmente, la mejor para líquidos en las interfases gas-líquido.

TABLA 21.7-1

RESUMEN DE COORDENADAS UTILIZADAS EN LAS GRÁFICAS PARA LA CORRECCIÓN DE TRANSFERENCIA DE MATERIA

Proceso	Relación de difusividad, Λ	Relación de densidad de flujo, R	Factor de velocidad, ϕ	Factor de corrección, $\theta = \frac{\phi}{R}$
Transferencia de cantidad de movimiento	1	$R_v = \frac{(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)(v_\infty - 0)}{\tau_0}$	$\phi_v = \frac{N_{A0}M_A + N_{B0}M_B}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{1oc}}$	$\theta_v = \frac{f^*_{1oc}}{f_{1oc}}$
Transferencia de calor	$\frac{\hat{C}_p\mu}{k}$	$R_T = \frac{(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})(T_0 - T_\infty)}{q_0}$	$\phi_T = \frac{N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}}{h_{1oc}}$	$\theta_T = \frac{h^*_{1oc}}{h_{1oc}}$
Difusión de la especie A o B	$\frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}$	$R_{AB} = \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{\frac{N_{A0}}{N_{A0} + N_{B0}} - x_{A0}}$	$\phi_{AB} = \frac{N_{A0} + N_{B0}}{k_{x,1oc}}$	$\theta_{AB} = \frac{k^*_{x,1oc}}{k_{x,1oc}}$

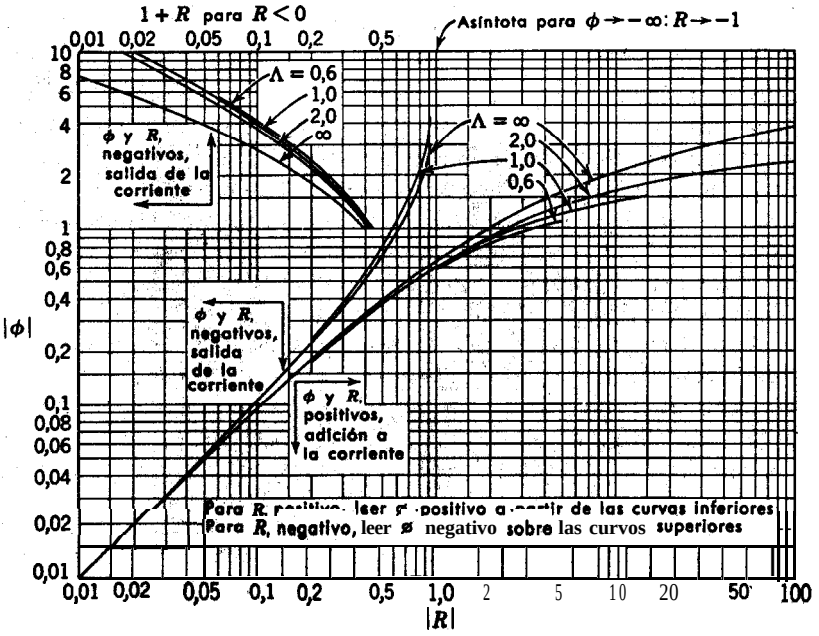


Fig. 21.7-1. Densidades de flujo de cantidad de movimiento, calor y materia, entre una lámina plana y una capa laminar límite. [W. E. STEWART, Sc. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1950).]

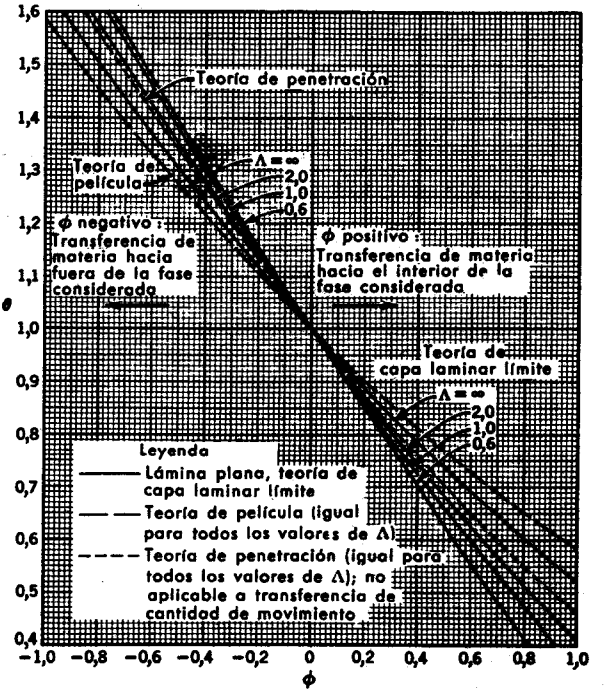


Fig. 21.7-2. Variación de los coeficientes de transferencia con la velocidad de transferencia de materia, según la predicción de diversas teorías.

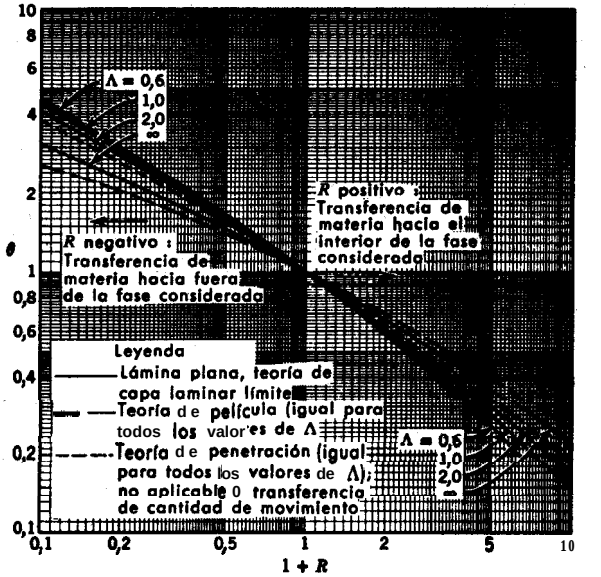


Fig. 21.7-3. Variación de los coeficientes de transferencia con la relación de densidades de flujo R, según la predicción de diversas teorías.

(Véanse §§ 17.5 y 19.1). En los demás-casos, la elección debe de hacerse según criterio o, si es posible, mediante comprobación experimental.

Las Figs. 27.1-1, 2 y 3. contienen todas la misma información básica. A continuación se presenta un ejemplo con el fin de informar acerca de las condiciones en las que son importantes las correcciones de transferencia de materia.

Ejemplo 21.7-1. Evaporación rápida desde una superficie plana

Rehacer el Ejemplo 21 .5 - 1, utilizando los resultados de la teoría de capa límite y la información adicional de que Sc = 0,6 para la temperatura T_f y composición x_{Af} medias. Comparar los resultados con los obtenidos anteriormente.

Solución. Igual que antes, R_{AB} = 4,00. El resultado de la teoría de capa laminar limite para R_{AB} =4,00 y Λ_{AB} =0,6, de acuerdo con la Fig. 21.7 - 1, es ϕ_{AB} = 1,03. Tomando N_{B0} = 0 y utilizando la definición de ϕ_{AB}, se obtiene

$$N_{A0} = k_{x,\mathrm{loc}}\phi_{AB} = (0,5)(1,03)$$
$$= 0,515 \text{ Kg-mol } \mathrm{hr^{-1}\,m^{-2}} \qquad (21.7\text{-}14)$$

De acuerdo con la teoría de película, el resultado es N_{A0} = 0,805, y si se desprecian las correcciones de transferencia de materia, el resultado es N_{A0} = 2,0. Si el flujo es laminar y la variación de las propiedades físicas no es demasiado grande, la solución de capa límite deberá de ser correcta en este caso; los demás resultados son excesivamente altos. La teoría de penetración no es aplicable a este sistema, debido a que no pueden despreciarse los gradientes de velocidad en las proximidades de la superficie del sólido.

§ 21.8 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA EN SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES

La predicción de velocidades de transferencia en sistemas de varios componentes es un problema difícil que es objeto de una intensa investigación. Se han utilizado dos métodos de ataque: (i) soluciones exactas para sistemas sencillos mediante las ecuaciones de variación para varios componentes, y (ii) generalizaciones aproximadas de las correlaciones para sistemas de uno y dos componentes. Ambos mttodos son complementarios; las soluciones exactas (Ejemplo 18.5-5) han resultado útiles para desarrollar y comprobar los métodos aproximados. Aquí se discuten algunos mttodos generalizados que son exactos cuando las propiedades físicas y las difusividades $\mathscr{D}_{im}$ son constantes.

Vamos a considerar primeramente una corriente fluida de n componentes que forman una sola fase con propiedades físicas constantes, y cuyas velocidades de transferencia de materia de todas las especies a través de la superficie límite son pequeñas. Para este sistema, los perfiles de velocidad y temperatura son los mismos que para un fluido puro de iguales propiedades físicas, y los coeficientes de transferencia de cantidad de movimiento y calor pueden obtenerse directamente a partir de correlaciones como las de los Capítulos 6 y 13. Si, además, la difusividad efec-

tiva $\mathscr{D}_{im}$, definida en la Ec. 18.4-21, es constante para unadeterminadaespecie i, dicha especie se comporta como si estuviese en una mezcla binaria de difusividad $\mathscr{D}_{AB}$ igual a $\mathscr{D}_{im}$. Por consiguiente, pueden tomarse los resultados de §§ 21.1—3, con los siguientes cambios de notación:

$$x_A \rightarrow x_i \tag{21.8-1}$$

$$\mathscr{D}_{AB} \rightarrow \mathscr{D}_{im} \tag{21.8-2}$$

$$N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) \rightarrow N_{i0} - x_{i0}\Sigma_j N_{j0} \tag{21.8-3}$$

Por analogía con las Ecs. 21.1-2 y 3, se define el coeficiente local de transferencia de materia para la especie- i en un sistema de varios componentes, de la siguiente forma :

$$N_{i0} - x_{i0}\Sigma_j N_{j0} = k^{\bullet}_{xi,\mathrm{loc}}\,\Delta x_i \quad , \tag{21.8-4}$$

Expresando la Ec. 21.8-4 para todos los valores de i se obtiene una serie de n ecuaciones que relacionan las densidades de flujo N_{i0} con las composiciones de la interfase y de la corriente global. En el ejemplo 21.8— 1 se ilustra la utilización de esta serie de ecuaciones. Para bajas velocidades de transferencia de materia, se puede poner $k_{xi,\mathrm{loc}}$ en vez de $k^{\bullet}_{xi,\mathrm{loc}}$ con una exactitud satisfactoria.

Para altas velocidades de transferencia de materia y propiedades físicas constantes, se aplican los resultados de §§ 21.4-7 efectuando análogos cambios de notación. Las relaciones de densidad de flujo R, para objetos sumergidos en una corriente infinita, se generalizan de la siguiente forma:

$$R_v = \frac{\Sigma_j N_{j0} M_j}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{\mathrm{loc}}} = \frac{\Sigma_j N_{j0} M_j (v_\infty - 0)}{\tau_0} \tag{21.8-5}'$$

$$R_T = \frac{\Sigma_j N_{j0} \bar{C}_{pj}}{h^{\bullet}_{\mathrm{loc}}} = \frac{\Sigma_j N_{j0} \bar{C}_{pj} (T_0 - T_\infty)}{40} \tag{21.8-6}$$

$$R_{im} = \frac{\Sigma_j N_{j0}}{k^{\bullet}_{xi,\mathrm{loc}}} \frac{x_{i0} - x_{i\infty}}{\frac{N_{i0}}{\Sigma_j N_{j0}} - x_{i0}} \tag{21.8-7}$$

y los factores ϕ se generalizan de esta forma:

$$\phi_v = \frac{\Sigma_j N_{j0} M_j}{\frac{1}{2}\rho v_\infty f_{\mathrm{loc}}} \tag{21.8-8}'$$

$$\phi_T = \frac{\Sigma_j N_{j0} \bar{C}_{pj}}{h_{\mathrm{loc}}} \tag{21.8-9}$$

$$\phi_{im} = \frac{\Sigma_j N_{j0}}{k_{xi,\mathrm{loc}}} \tag{21.8-10}$$

[1] Estas dos ecuaciones no resultan útiles para objetos romos.

Con estas definiciones, las relaciones entre R, ϕ y θ, representadas gráficamente en las Figs. 21.7-1, 2 y 3, se pueden aplicar a sistemas de cualquier número de componentes. Estas generalizaciones de los resultados de sistemas binarios son exactas si las propiedades físicas, incluidas las difusividades $\mathscr{D}_{im}$, son constantes.

En los sistemas de varios componentes las propiedades físicas varían, generalmente, de un punto a otro. Los efectos de esta variación de las propiedades físicas son bastante complejos, pero en primera aproximación pueden estimarse introduciendo el valor medio de las propiedades físicas en las correlaciones para propiedades constantes. Se ha sugerido que las propiedades del fluido deben de evaluarse para la temperatura y composición medias entre la interfase y la corriente principal.

Vamos a dedicar un pequeño comentario a la aproximación consistente en utilizar un valor medio de $\mathscr{D}_{im}$ para cada especie. Para muchos sistemas gaseosos $\mathscr{D}_{im}$ es casi constante (véase la discusión que sigue a la Ec. 18.4—22) y esta aproximación conduce a buenos resultados. Sin embargo, en el caso de líquidos o sistemas que contienen especies de pesos moleculares muy diferentes, $\mathscr{D}_{im}$ puede variar considerablemente, e incluso ser negativo en algún intervalo de composición. La utilización de un valor medio de $\mathscr{D}_{im}$ puede conducir a grandes errores en estos sistemas, y es preciso desarrollar procedimientos mejores. Se está progresando considerablemente en este campo merced al trabajo de diversos centros de investigación.

Ejemplo 21.8— 1. Transferencia de materia en un reactor catalítico de lecho fijo

En un reactor de lecho fijo se hidrogena benceno a la presión total de 30 atm. Estimar la composición del gas en contacto con las partículas catalíticas en una sección transversal donde las condiciones medias de flujo del gas son las siguientes (véase el Problema 18.E):

i	Especie	x_{ib}	M_i	$(c\mathscr{D}_{im})_b$ g-mol cm^{-1} seg^{-1}	$(Sc_{im})_b = (\mu/\rho\mathscr{D}_{im})_b$	R_i/R_3 Moles de i producidos por mol de ciclohexano producido
1	Benceno	0,100	78,11	$6{,}63 \times 10^{-6}$	1,46	- 1
2	Hidrógeno	0,800	2,016	$20{,}8 \times 10^{-6}$	0,466	- 3
3	Ciclohexano	0,050	84,16	$8{,}71 \times 10^{-6}$	1,11	1
4	Metano	0,050	16,04	$60. \times 10^{-6}$	0,162	0
	Total	1,000				- 3

Otras condiciones de la corriente gaseosa son: $T_b = 500$ OK, μ_b = 0,014 centipoises, $M_b = \Sigma_i x_{ib} M_i$ = 14,43 Kg/Kg-mol, y $G_0 = \langle \rho v \rangle$ = 2930 $Kg_m hr^{-1} m^{-2}$, estando $\langle \rho v \rangle$ basada en la sección total del lecho. La velocidad local de producción de ciclohexano es 1,5 Kg-mol por hora y por Kg de catalizador. Las partículas catalíticas son cilindros de 0,32 x 0,32 cm, con una densidad ρ_p = 0,9 g cm^{-3}; la densidad global del lecho es ρ_{lecho} = 0,60 g cm^{-3}.

Solución. A partir de estos datos se pueden hallar las velocidades de transferencia de materia y calcular después las composiciones desconocidas, que se supondrán constantes

en la superficie externa de una determinada partícula catalítica.[2] Con el fin de simplificar el calculo, se supondrá que las propiedades físicas son constantes.

La superficie externa de las partículas por unidad de peso de catalizador, para partículas cilíndricas de $L = D = 0{,}32$ cm., es

$$a_m = \frac{2\frac{\pi D^2}{4} + \pi DL}{\frac{\pi D^2 L}{4}\rho_p} = \frac{\frac{2}{L} + \frac{4}{D}}{\rho_p} = \frac{\frac{2 \times 10^3}{3{,}2} + \frac{4 \times 10^3}{3{,}2}}{0{,}9 \times 10^3} = 2{,}08 \text{ m}^2/\text{Kg}_m \qquad (21.8\text{-}11)$$

y la superficie externa de las partículas por unidad de volumen de lecho es

$$a = a_m \rho_{lecho} = (2{,}08)\ (0{,}6)(10^3) = 1250 \text{ m}^{-1} \qquad (21.8\text{-}12)$$

Por lo tanto, las densidades de flujo hacia el interior de la corriente gaseosa, promediadas sobre la superficie externa de las partículas, vienen dadas por

$$N_{i0} = R_i/a = (1{,}5)\ (R_i/R_3)/(2{,}08) \qquad (21.8\text{-}13)$$

En la Tabla 21.8-1 se presentan los resultados calculados a partir de esta ecuación. Para composiciones constantes x_{i0}, de la superficie, se pueden predecir los coeficientes de transferencia de materia utilizando las Ecs. 13.4-2 y 3, y tomando $j_H = j_D$.

Para este sistema de varios componentes, j_D se puede definir de la siguiente forma:

$$j_D = \frac{k_{xi}}{\langle cv \rangle} (\text{Sc}_{im})_f^{2/3} = \frac{k_{xi} M_b}{G_0} (\text{Sc}_{im})_f^{2/3} \qquad (21.8\text{-}14)$$

en la que k_{xi} está definido tomando $\Delta x_i = x_{i0} - x_{ib}$ en la Ec. 21.8 -4. El número de Reynolds del que depende j_D es

$$\text{Re} = \frac{G_0}{a\psi\mu} = \frac{2930}{(1250)\ (0{,}91)\ (0{,}014 \times 3{,}6)} = 51 \qquad (21.8\text{-}15)$$

en la que $\psi = 0{,}91$ es el factor empírico de forma que se ha indicado en § 13.4 para lechos de relleno constituidos por cilindros. A partir de la Ec. 13.4-3 y la analogía mencionada anteriormente, se obtiene

$$j_D = j_H = 0{,}61 \text{ Re}^{-0{,}41} \psi = 0{,}111 \qquad (21.8\text{-}16)$$

Téngase en cuenta que se aplica el mismo valor de j_D para todas las especies. Introduciendo los valores numéricos en la Ec. 21.8 - 14 se obtienen los coeficientes locales de transferencia de materia k_{xi}. (Véase la Tabla 21.8 -1). En dicha tabla se resumen los cálculos efectuados para hallar la composición en la superficie del catalizador. Como $\phi_{im} \ll 1$, las correcciones de transferencia de materia son pequeñas y la teoría de película resulta adecuada.

[2] H. E. HOELSCHER. *A. Z. Ch. E. Journul, 4, 300-304* (1958) ha desarrollado un método que permite tener en cuenta la variación de composición sobre la superficie externa de la partícula.

Las fracciones molares en la superficie del catalizador difieren considerablemente de las de la corriente gaseosa. También existe una notable diferencia de temperatura, según se demuestra en el Problema 21.5. Al operar a velocidades másicas más elevadas probablemente aumentaría de forma considerable la velocidad de reacción; sin embargo, no se puede contestar de una forma definitiva a esta cuestión mientras no se sepa como varia la velocidad de reacción en la superficie del catalizador con la temperatura y la composición.

TABLA 21.8-1

TABULACIÓN DE LOS CÁLCULOS DEL REACTOR CATALÍTICO DE LECHO FIJO[a]

i	N_{i0} De la Ec. 21.8-13	k_{xi} De la Ec. 21.8-14	ϕ_{im} De la Ec. 21.8-10	R_{im} De la Ec. 21.5-43	x_{i0} De la Ec. 21.8-7[b]
1	− 0,721	17,5	− 0,124	− 0,116	0,069
2	− 2,163	37,5	− 0,058	− 0,056	0,788
3	0,721	20,7	− 0,104	− 0,099	0,092
4	0	75,8	− 0,029	− 0,029	0,051
$\sum_{i=1}^{4}$	− 2,163	—	—	—	1,000

[a] N_{i0} y k_{xi} están dados en Kg-mol hr^{-1} m^{-2}; los demás términos son adimensionales.
[b] Substituyendo $x_{i\infty}$ por x_{ib}.

Obsérvese que x_{i0} se han calculado de forma independiente para las cuatro especies. Esto no es necesario ya que tres fracciones molares determinan la cuarta, pero es preferible calcular independientemente las cuatro con el fin de comprobar la solución. Aquí, la condición de que $\Sigma_i x_{i0} = 1$ se cumple con tres cifras decimales, pero en otros casos puede ser necesario ajustar algo los valores calculados. Análogos procedimientos de comprobación pueden aplicarse a otros problemas de varios componentes, como en el caso del Problema 21.H.

En general, para cualquier problema de n componentes, sólo existen $n - 1$ ecuaciones independientes correspondientes a la Ec. 21.8 -4. (Véase el Problema 21.H). Según esto, mediante consideraciones difusionales sólo se pueden hallar $n - 1$ composiciones y velocidades de transferencia de materia, exactamente igual que en sistemas binarios.

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Qué dos clases de interfascs se consideran en este capítulo ? Citar algunos ejemplos de cada clase.

2. ¿Puede tener lugar transferencia de materia en un sistema de composición constante?

3. Demostrar que el valor dc $k^{\bullet}_{x,\mathrm{loc}}$ es el mismo en las Ecs. 21.1-2 y 21.1–3?

4. ¿En qué condiciones pueden aplicarse las analogías de la Tabla 21.2– 1 ?

5. ¿Qué predicen, en general, las Ecs. 21.2-16 y 17 por lo que se refiere a la dependencia funcional de j_H y j_D ?

6. ¿Qué suposiciones se han hecho al deducir la Ec. 21.3–4?

7. ¿En qué sentido la Ec. 21.4-6 es análoga a las Ecs. 21.4-4 y 5?

8. Explicar el sentido físico de $F_x^{(m)}$ y de $Q^{(m)}$. ¿Cuál es la magnitud análoga para transferencia de materia de la especie A en un sistema binario?

9. Comparar los sistemas tipo utilizados en §§ 21.5, 6 y 7.

10. ¿Cómo deben de modificarse las condiciones límite de $21.5 con el fin de restringir la solución para bajas velocidades de transferencia de materia?

ll. Demostrar que ϕ_v, ϕ_T y ϕ_{AB} pueden considerarse como velocidades adimensionales a través de la interfase. Identificar el tipo de velocidad media utilizada en cada una de estas magnitudes.

12. ¿Cuál es el significado físico de las relaciones de densidades de flujo R_v, R_T y R_{AB}?

13. ¿En qué intervalos aproximados de R y ϕ se pueden tomar $f^{\bullet} = f$, $h^{\bullet} = h$, o $k_x^{\bullet} = k_x$, si los coeficientes de transferencia así obtenidos han de tener una exactitud de ±5 por ciento?

14. Comparar los efectos de la transferencia de materia sobre. los coeficientes de transferencia con los efectos de la transmisión de calor sobre dichos coeficientes.

15. ¿Cómo están relacionados R y ϕ para bajas velocidades de transferencia de materia? Demostrar que las Ecs. 21.5-43, 21.5-44 y 21.6-12 son correctas para este caso límite.

16. ¿Podría utilizarse la teoría de penetración para predecir velocidades de transferencia de cantidad de movimiento entre fases? Explíquese.

17. ¿Hasta qué punto son análogos Λ_v, Λ_T y Λ_{AB}?

18. ¿Por qué aparece Λ en los resultados de la teoría de capa límite pero no en las teorias de penetración y de película?

19. ¿En qué condiciones son exactos los procedimientos generalizados de § 21.8?

PROBLEMAS

21.A$_1$ Predicción de coeficientes de transferencia de materia en conducciones cerradas

Estimar los coeficientes de transferencia en la fase gaseosa para la evaporación de agua en aire puro a 2 atm, 25 °C, y una velocidad de flujo de 710 $\mathrm{Kg}_m\ \mathrm{hr}^{-1}$, en los sistemas que se indican más abajo. Tómese $\mathscr{D}_{AB}$ = 0,130 $\mathrm{cm}^2\ \mathrm{seg}.^{-1}$

a. Una película de agua que desciende por la pared de un tubo vertical'de 15 cm de diámetro interno. Utilícese la correlación de Gilliland para gases en columnas de pared mojada:

$$\frac{k_{x,\mathrm{loc}} D}{c\mathscr{D}_{AB}} = 0{,}023 \left(\frac{DG}{\mu}\right)^{0{,}83} \left(\frac{\mu}{\rho\mathscr{D}_{AB}}\right)^{0{,}44} \qquad \left(\frac{DG}{\mu} > 2000\right) \tag{21.A-1}$$

b. Un lecho de relleno de 15 cm de diámetro construido por esferas saturadas de agua, siendo $a = 328\,\mathrm{m}^{-1}$.

21.B$_1$ Cálculo de la composición de un gas a partir de datos psicrométricos

Las temperaturas de los termómetros seco y húmedo de una corriente de ain húmedo, medidas a una elevada velocidad de aire y a la presión total de 800 mm Hg, son 54,5 °C y 26,7 °C, respectivamente. Calcular la fracción molar del vapor de agua en la corriente de aire. Para mayor sencillez, al estimar las propiedades de la película considérese que el aire sólo contiene trazas de agua *(A)*.

Respuesta: $x_{A\infty}$ = 0,0176

21.C$_1$ Cálculo de la temperatura del aire para el secado ea un lecho fijo

Un lecho de poco espesor constituido por sólidos granulares saturados de agua, se somete a secado haciendo pasar a través de Cl aire seco a la presión de 1,1 atm con una velocidad superficial de 457 cm seg^{-1}. ¿Cuál ha de ser la temperatura del aire para que la temperatura de la superficie del material sólido se mantenga a 15,5 OC? Despréciese la radiación.

Respuesta: 44,4 °C

21.D$_1$ Velocidad de secado de sólidos granulares ea un lecho fijo

Calcular la velocidad inicial, expresada en Kg-mol hr^{-1} m^{-3}, con la que se elimina agua en la operación de secado descrita en el Problema 21.C, si el material sólido está constituido por escamas, siendo a = 590 m-t.

Respuesta: 363,6

21.E$_2$ Evaporación de una gota que cae libremente

Una gota de agua de 1,00 mm de diámetro cae libremente a través de aire seco en reposo a 1 atm y T_{∞} = 37,8 °C. Suponiendo un comportamiento de pseudo-estado estacionario y una pequeña velocidad de transferencia de materia, calcular: *(a)* la velocidad de descenso de la gota ; *(b)* la temperatura de la superficie de la gota; *(c)* la velocidad de variación del diámetro de la gota en cm seg^{-1}. Supóngase que las «propiedades de película» son las del aire seco a 26,7 °C.

Respuesta: a. 390 cm seg^{-1}
b. 12,2 °C
c. 5,55 x 10-4

21.F$_2$ Efecto de la radiación sobre las medidas psicométricas

Supóngase que un termómetro de bulbo seco y otro de bulbo húmedo están instalados en una larga conducción en la que la temperatura T_s de la superficie interior es constante y la velocidad del gas es pequeña. Por consiguiente, hay que corregir las temperaturas del termómetro seco T_{db} y del termómetro húmedo T_{wb} debido a los efectos de radiación. Para simplificar, supóngase también que los termómetros están instalados de tal forma, que se puede despreciar la conducción de calor a lo largo de las varillas de vidrio.

a. Aplicar un balance de energía sobre la unidad de área del bulbo seco con el fin de obtener una ecuación de la temperatura del gas T_{∞} en función de T_{db}, T_s, h_{db}, e_{db}, y a_{db} (siendo estos dos últimos términos la emisividad y el coeficiente de absorción del bulbo seco).

b. Aplicar un balance de energía sobre la unidad de área del bulbo húmedo con el fin de obtener una expresión de la velocidad de evaporación.

c. Calcular $x_{A\infty}$ para la presión y las lecturas termométricas del Ejemplo 21.2–2, y los siguientes datos adicionales: v_{∞} = 457 cm seg^{-1}, T_s = 54,5 °C, e_{db} = a_{db} = e_{wb} = a_{wb} = 0,93, diámetro de bulbo seco = 0,25 cm, y diámetro del bulbo húmedo incluyendo la muselina = 0,38 cm.

Respuesta: c. $x_{A\infty}$ = 0,0021

21.G$_2$ Transferencia de A y *B* a través de ana interfase fluido-fluido

En este problema se amplían los resultados de § 21.3 para incluir la transferencia de *A* y *B* entre dos fases constituidas por *A y B*. Se supone que la relación N_{Ag0}/N_{Bg0} está determinada, y que se conocen para ambos lados de la interfase las composiciones globales y los coeficientes de transferencia de materia.

a. Expresar las Ecs. 21.3-2, 3 y 4, utilizando de nuevo la Ec. 21.1-10 para definir el coeficiente local de transferencia de materia en cada fase.

b. Deducir la relación entre los coeficientes individuales k_x y' k_y y el coeficiente global K_y, definido por

$$d(\mathcal{W}_{A0}^{(m)} - y_{Ae}(d\mathcal{W}_{A0}^{(m)} + d\mathcal{W}_{Ai}^{(m)}) = K_y(y_{Ae} - y_{Ab})\,dA \qquad (21.G\text{-}2)$$

c. Obtener la forma especial del resultado del apartado (*b*) que es aplicable cuando $N_{Ag0} = -N_{Bg0}$. Este caso se denomina interdifusión equimolar; el nombre se presta algo a error, puesto que en un sistema binario las densidades de flujo de difusión J_A^* y J_B^* son *siempre* iguales y opuestas. (Véase Ec. 16.1-14).

21.H_2 Interdependencia de los coeficientes de transferencia de materia en un sistema de varios componentes

Tal como se ha indicado en § 21.8, en una mezcla de n componentes sólo se pueden plantear n-l ecuaciones distintas de los coeficientes de transferencia de materia. Vamos a considerar ahora algunos procedimientos de comprobación, que pueden utilizarse cuando se calcula toda la serie de los n coeficientes de transferencia.

a. A partir de las definiciones de § 21.8, demostrar primeramente que

$$\Sigma_i k_{xi,\mathrm{loc}}\,\Delta x_i = 0 \qquad (21.H\text{-}1)$$

$$\Sigma_i \frac{\Delta x_i}{R_{im}} = 0 \qquad (21.H\text{-}2)$$

$$\phi_{im} k_{xi} = \text{wnst. para cualquier valor de } i \qquad (21.H\text{-}3)$$

b. Utilizar estas identidades para comprobar la solución del Ejemplo 21.8 — 1.

c. Demostrar cómo se simplifican las anteriores identidades para sistemas binarios.

21.I_2 Combustión controlada por difusión en un lecho catalítico fijo

Un catalizador de lecho fijo se regenera pasando a su través una corriente de aire diluida con nitrógeno, con el fin de quemar el depósito de materia carbonosa. Se supone que la reacción de combustión tiene lugar en una sola etapa sobre la superficie del catalizador, y esta representada por la formula empírica

$$\underset{\text{(gas)}}{12\ O_2} + \underset{\text{(sólido)}}{C_{10}H_8} \rightarrow \underset{\text{(gas)}}{10\ CO,} + \underset{\text{(gas)}}{4\ H_2O}$$

El calor de reacción a 538 °C es $\Delta\tilde{H}_1 = -100$ Kcal por mol de O_2 (especie 1) consumido. Se desea conocer la temperatura máxima que alcanzan las partículas cuando la corriente gaseosa está a $T_b = 538$ °C y su composición es $x_{b1} = 1{,}0$ moles por ciento de O_2 y $x_{b2} = 99{,}0$ moles por ciento de N_2.

a. Plantear una ecuación para la densidad de flujo máxima posible, N_{10}, de oxígeno en la superficie del catalizador. Puede omitirse la corrección de transferencia de materia, puesto que R_{1m} es muy pequeño.

'b. Obtener una expresión para la diferencia de temperatura $T_0 - T_\infty$ en función de N_{10}, mediante un balance de energía aplicado a una partícula catalítica. También debe de omitirse aquí la corrección de transferencia de materia, de acuerdo con lo que se ha supuesto en el apartado *(a).*

c. Combinar los resultados de los aprtados *(a)* y (*b*) con la analogía $j_H = j_D$ con el fin de obtener una relación entre $(T_0 - T_b)$ y la composición de la corriente gaseosa.

d. Calcular el valor máximo posible de T_0 en las condiciones indicadas. Supóngase que Sc = 0,8, Pr = 0,7 y $\tilde{C}_{pb}$ = 7,54 cal g-mol^{-1} °K^{-1}.

Respuesta: d. 660 °C.

21.J$_2$ Temperatura del catalizador en mm reacción de varios componentes

Estimar la temperatura del catalizador en el sistema del Ejemplo 21.8 — 1, si $Pr_f = 0{,}6$, $\bar{C}_{pb} = 11{,}7$ cal g-mol^{-1} °K^{-1}, y el calor de reacción por mol de ciclohexano producido es $\Delta H_s = -$ '51 Kcal g-mol^{-1} para las condiciones existentes en la superficie del catalizador. Supóngase. que los valores indicados anterioimente para las demás propiedades constantes siguen siendo los mismos.

Respuesta: 600 °K

21.K$_2$ Teoría de película para esferas

Deducir los resultados correspondientes a las Ecs. 21.5 -20, 21, 23 y 24, para transferencia simultánea de calor y materia en un sistema de simetría esférica. Es decir, considerar una superficie esférica de transferencia de materia y suponer que T y x_A dependen solamente de la coordenada radial r. De-mostrar que las Ecs. 21.5 -35 y 36 son aplicables sin ninguna modificación.

¿Qué dificultades se encontrarían si se intentase utilizar la teoría de película para calcular la resistencia de fricción sobre una esfera?

21.L$_2$ Teoría de película para cilindros

Deducir los resultados correspondientes a las Ecs. 21.5 -20, 21, 23 y 24, para un sistema de simetría cilíndrica. Es decir, considerar una superficie cilíndrica de transferencia de materia y suponer que T y x_A dependen solamente de r. Demostrar que se aplican las Ecs. 21.5-35 y 36 sin ninguna modificación.

21.M$_3$ Teoría de película para propiedades de transporte variables

a. Demostrar que en sistemas en los que μ, k y $c\mathcal{D}_{AB}$ son funciones de y, la integración de las Ecs. 21.5—16, 17 y 18 (para $y < \delta_v$, δ_T, o δ_{AB}, respectivamente) conduce a

$$1 - \frac{(v_x - 0)(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B)}{-\tau_0} = \exp\left(N_{A0}M_A + N_{B0}M_B\right)\int_0^y \frac{dy}{\mu} \qquad (21.M\text{–}1)$$

$$1 - \frac{(T - T_0)(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB})}{q_0} = \exp\left(N_{A0}\bar{C}_{pA} + N_{B0}\bar{C}_{pB}\right)\int_0^y \frac{dy}{k} \qquad (21.M\text{–}2)$$

$$1 - \frac{(x_A - x_{A0})(N_{A0} + N_{B0})}{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})} = \exp\left(N_{A0} + N_{B0}\right)\int_0^y \frac{dy}{c\mathcal{D}_{AB}} \qquad (21.M\text{–}3)$$

También aquí, si y es superior a δ_{AB} en las Ecs. 21.M — 16 2, hay que extrapolar las relaciones $N_A = N_{A0}$ y $N_B = N_{B0}$ al efectuar la integración. Considerando μ, k y $c\mathcal{D}_{AB}$ como propiedades efectivas de transporte, se pueden utilizar estas ecuaciones para describir los perfiles de tiempo ajustado para el flujo turbulento.

b. Efectuar los correspondientes cambios en las Ecs. 21.5-22 a 27 y 31 a 33, y demostrar que las Ecs. 21.5-34 a 39 siguen siendo correctas. Por lo tanto, si se pueden predecir f_{loc}, h_{loc} y $k_{x,loc}$, no es preciso operar con las integrales en el cálculo de velocidades de transferencia.

c. Demostrar que f_{loc}, h_{loc} y $k_{x,loc}$, han de evaluarse en función de las propiedades físicas y del tipo de flujo (laminar o turbulento) correspondientes a las condiciones en las que se desea obtener f_{loc}, h_{loc}, y $k_{x,loc}$

21.N$_3$ Difusión unidimensional en estado DO estacionario: generalización de la solución de Arnold

Un medio fluido estacionario, que no reacciona químicamente, y cuya composición $x_{A\infty}$ y temperatura T_∞ son uniformes, ocupa toda la región correspondiente a z positivo. En el instante t = 0 el fluido situado en la superficie $z = 0$ pasa bruscamente a la composición x_{A0} y T_0, para permanecer

luego constantes. Las propiedades físicas de la mezcla son constantes e iguales para ambas especies. La relación N_{A0}/N_{B0} también es constante para $t > 0$. Las propiedades físicas de la mezcla son constantes e iguales para las dos especies.

a. Rehacer el Ejemplo 19.1−1, con los cambios necesarios de condiciones límite, con el fin de obtener el perfil adimensional $X_{AB}(Z, \varphi)$ descrito después de la Ec. 21.6-2.

b. Comprobar la expresión de la densidad de flujo adimensional de materia ψ correspondiente a la Ec. 21.6-1.

c. Expresar la ecuación de energía y las condiciones limite de T para este sistema. Obtener, por analogía, las soluciones para transmisión de calor correspondientes a los resultados de los apartados (*a*) y (*b*).

CAPÍTULO 22

BALANCES MACROSCÓPICOS EN SISTEMAS DE VARIOS COMPONENTES

En el Capítulo 7 (sistemas isotérmicos) y en el 15 (sistemas no isotérmicos) se han estudiado las aplicaciones de las leyes de conservación de la materia, cantidad de movimiento y energía, a sistemas ingenieriles de flujo. En este capítulo se continua dicho estudio, introduciendo tres factores adicionales que no se han considerado hasta ahora: (*a*) el fluido del sistema está constituido por más de una especie química; (*b*) posibilidad de que existan reacciones químicas que den lugar a variación de la composición y a la producción o consumo de calor; y (c) entrada de materia en el sistema a través de las superficies que lo limitan (es decir, superficies distintas de los planos «1» y «2»). En la Fig. 22.0-1 se representan distintos mecanismos en virtud de los cuales puede entrar o salir materia en el sistema.

Se comienza por resumir los balances macroscópicos para el caso más general descrito anteriormente. Cada uno de los tres balances contendrá ahora un término extra que tiene en cuenta el paso de materia, cantidad de movimiento o energía, a través de la superficie limitante. Los balances así obtenidos permiten describir procesos industriales de transferencia de materia, tales como absorción, extracción, cambio de ión y adsorción. A cada uno de estos temas se le han dedicado tratados enteros; aquí solamente se indicará la forma en que los conceptos expuestos en los capítulos precedentes facilitan el camino para el estudio de las operaciones de transferencia de materia. El lector que desee profundizar en el tema dispone para ello de diversos libros de texto.[1,2,3]

§ 22.1 LOS BALANCES MACROSCÓPICOS DE MATERIA

La ley de conservación de la materia de la especie química *i* en un sistema macroscópico de flujo como el descrito, establece

$$\frac{d}{dt} m_{i,\text{tot}} = -\Delta w_i + w_i^{(m)} + r_{i\ \text{tot}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{22.1-1}$$

[1] T. K. SHERWOOD y R. L. PIGFORD, *Absorption and Extraction*, McGraw-Hill, Nueva York (1952).

[2] R. E. TREYBAL, *Mass-Transfer Operations*, McGraw-Hill, Nueva York (1955).

[3] W. MATZ, *Die Thermodynamik des Wärme-und Stoffaustauches in der Verfahrenstechnik*, Steinkopff, Frankfurt-am-Main (1949).

que es una generalización de la Ec. *7.1-2.* En esta ecuación, $m_{i,\text{tot}}$ es la masa total de «*i*» existente en el sistema en un instante, e $\Delta w_i = w_{i2} - w_{i1} = \rho_{i2}\langle v_2\rangle S_2 - \rho_{i1}\langle v_1\rangle S_1$ es la diferencia entre la velocidad de flujo de materia[1] de la especie *i* en los planos «1» y «2». El término $w_i^{(m)}$ representa la velocidad de flujo de materia de la especie *i* a través de las superficies limitantes del sistema debido a la transferencia de materia. Obsérvese que $w_i^{(m)}$ es positivo cuando se adiciona materia al sistema, de la misma forma que Q se considera positivo cuando se adiciona calor al sistema. Finalmente, el símbolo $r_{i,\text{tot}}$ representa la velocidad de producción de la especie *i* debido a la existencia de reacciones homiogéneas o heterogéneas en el sistema.[2]

Si se suman las *n* ecuaciones correspondientes a la Ec. 22.1—1, se obtiene

$$\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = -\Delta w + w^{(m)} \qquad (22.1\text{–}2)$$

en la que $w^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} w_i^{(m)}$, a la vez que se ha aplicado la ley de la conservación de la materia expresada en la forma $\sum_{i=1}^{n} r_{i,\text{tot}} = 0$.

La Ec. 22.1-1 puede expresarse también en unidades molares:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{i,\text{tot}} = -\Delta \mathcal{N}_i + \mathcal{N}_i^{(m)} + R_{i,\text{tot}} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (22.1\text{–}3)$$

---

1 Recuérdese que en la Tabla 15.3 — 1 se ha despreciado el transporte molecular y turbulento de cantidad de movimiento a través de las superficies «1» y «2» en la: dirección de flujo, en comparación con el transporte global. Aquí se hace lo mismo para el transporte de la especie *i.* En realidad se podría escribir $\Delta w_i = \Delta[\langle \rho_i v_i \rangle S]$. Se recomienda la utilización de expresiones más exactas cuando los perfiles de velocidad son muy irregulares, como ocurre, por ejemplo, en columnas de relleno. Análogas consideraciones se pueden aplicar a transferencia de materia. Generalmente estos efectos se desprecian debido a que se carece de datos para evaluarlos.

2 Las magnitudes $m_{i,\text{tot}}$, $r_{i,\text{tot}}$, y $w_i^{(m)}$ pueden expresarse como integrales:,

$$m_{i,\text{tot}} = \int_V \rho_i \, dV \qquad (22.1\text{–}1a)$$

$$r_{i,\text{tot}} = \int_V r_i \, dV \qquad (22.1\text{-}1b)$$

$$w_i^{(m)} = -\int_{S^{(m)}} (\boldsymbol{n} \cdot \rho_i \boldsymbol{v}_i) \, dS \qquad (22.1\text{–}1c)$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el vector unitario normal dirigido hacia fuera, y $S^{(m)}$ la porción de superficie límite sobre la que tiene lugar la transferencia de materia. En la definición de $w_i^{(m)}$ se ha supuesto que la superficie de transferencia $S^{(m)}$ es estacionaria. Si esta superficie se mueve, se substituye $\boldsymbol{v}_i$ por la velocidad local del fluido relativa a la superficie.

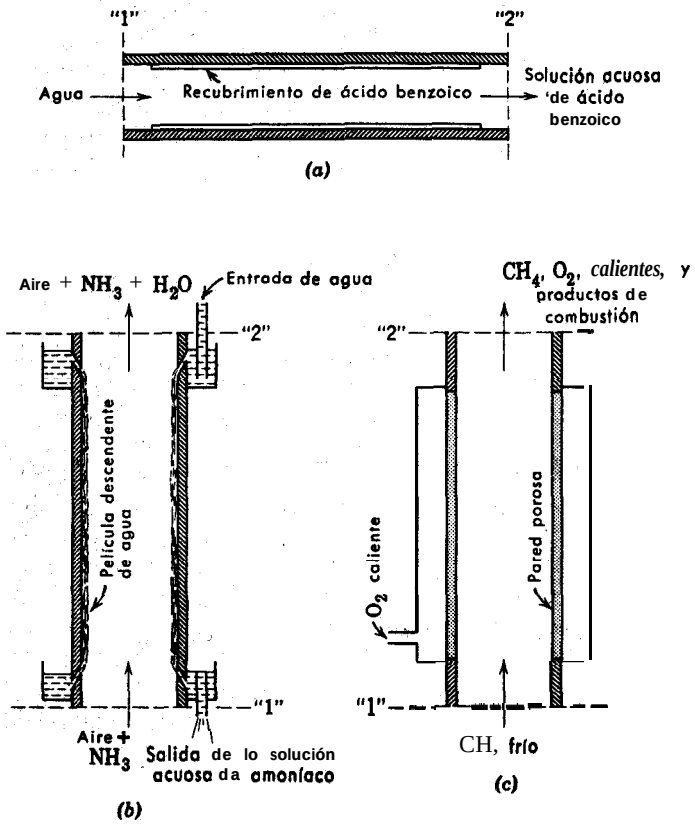


Fig. 22.0-1. Formas según las **cuales** puede entrar o salir materia a **través** de las **superficies** limitantes: *(a)* el ácido benzoico entra en el sistema por disolución de la pared; (b) el vapor de agua entra en el sistema, definido como la fase gaseosa, por evaporación, y el vapor de **amoniaco** sale por absorción; (c) el oxígeno entra en el sistema por transpiración a **través** de una pared porosa.

En esta expresión, las letras mayúsculas representan los símbolos molares equivalentes a las minúsculas de la **Ec. 22.1—** 1. Sumando la **Ec.** 22.1-3 para todas las especies i se obtiene

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\text{tot}} = -\Delta \mathcal{N} + \mathcal{N}^{s(m)} + \sum_{i=1}^{n} R_{i,\text{tot}} \tag{22.1-4}$$

Obsérvese que, en general, el último término no es cero debido a que el número total de moles no es conservativo.

Las Ecs. **22.1—** 1 a 4 constituyen el punto de partida para la descripción cuantitativa de numerosos sistemas. Su forma para estado estacionario es la base de los «balances de materia» o **«estequiometría** industrial». Como en el libro de Hougen,

Watson y Ragatz) se exponen numerosos ejemplos ilustrativos dedicados a este tema, prescindiremos aquí de dichas aplicaciones. La Ec. 22.1— 1 ó 3, en su forma correspondiente a estado no estacionario, constituyen la base para el estudio del comportamiento no estacionario de los aparatos de mezcla y de los reactores químicos agitados, en los que la concentración puede considerarse satisfactoriamente uniforme en todo el recipiente. La Ec. 22.1-1 ó 3 se aplican también a los aparatos de transferencia de materia en marcha continua; para ello, se acostumbra a expresar la Ec. 22.1— 1 ó 3 aplicada a un elemento diferencial del sistema. La diferencial $dw_i^{(m)}$ o $d\,\mathfrak{M}_i^{(m)}$ pueden expresarse en función de una diferencia local de fracción molar y un coeficiente local de transferencia de materia k_{xi}, definido mediante una ecuación análoga a la 21.4-6 para el caso de varios componentes. Esto pone de manifiesto la relación existente entre las Ecs. 22.1— 1 y 3 y el Capítulo 21. Estas dos últimas aplicaciones (tanques agitados y procesos continuos de transferencia de materia) se discuten en los Ejemplos 22.5—2, 22.6-1 y 22.6-2.

§ 22.2 EL BALANCE MACROSCÓPICO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El planteamiento de la ley de conservación de la cantidad de movimiento para una mezcla de fluidos, cuya única fuerza externa que actúa sobre las especies es debida a la gravedad, es

$$\frac{d}{dt}P = -\Delta\left(\frac{\langle v^2\rangle}{\langle v\rangle}w + pS\right) + F^{(m)} = F + m_{\text{tot}}g \qquad (22.2\text{-}1)$$

Esta ecuación sólo difiere de la Ec. 7.2-2 en la adición del término $F^{(m)}$, que corresponde a la entrada neta de cantidad de movimiento en el sistema[1] debido a la transferencia de materia a través de la superficie limitante: En la practica, para la mayor parte de los procesos de transferencia de materia, este término es tan pequeño que puede despreciarse. La fuerza F de la Ec. 22.2-1 se calcula utilizando el factor de fricción f en la forma que se. ha definido en la Ec. 21.4-4.

§ 22.3 EL BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA

La ley de conservación de la energía para una mezcla de fluidos se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\text{Etot} = -\Delta\left[\left(\hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi}\right)w\right] + Q^{(m)} + \text{Q} = W \qquad (22.3\text{-}1)$$

---

3 0. A. HOIJGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, *Material and Energy Balances,* Vol. 1, *Chemical Process Principles,* Wiley, Nueva York (1954), Capítulo 7.

1 Este término puede expresarse como una integral:

$$F^{(m)} = -\int_{S^{(m)}} (n \cdot \rho vv)\, dS \qquad (22.2\text{-}1a)$$

siendo n el vector unitario normal dirigido hacia fuera. De igual forma que en § 22.1, se supone también que la superficie de transferencia es estacionaria.

Esta ecuación[1] es igual a la Ec. 15.1-3, salvo que se le ha adicionado el término $Q^{(m)}$. Este termino tiene en cuenta la adición de energía al sistema como consecuencia de la transferencia de materia a través de la superficie que lo limita. Obsérvese que Q es la velocidad de transmisión de calor por conducción a través de las superficies limitantes. Si existe transferencia de materia hay que utilizar el coeficiente de transmisión de calor $h^{\bullet}$ definido en la Ec. 21.4-5. El término $Q^{(m)}$ puede tener una importancia considerable, especialmente en el caso de que la materia que entre en el sistema a travts de la superficie que lo limita este a temperatura mucho más alta o mucho más baja que la del fluido en el interior del sistema de flujo, o si reaccionan químicamente en él.

Cuando se producen reacciones químicas se puede desprender o absorber una cantidad considerable de calor. Este calor de reacción se tiene automáticamente en cuenta al calcular las entalpias de las corrientes de entrada y salida. (Véase el ejemplo 22.5-1).

En numerosas aplicaciones, en las que las velocidades de transferencia de energía a través de la superficie son funciones de la posición, es más conveniente expresar la Ec. 22.3-1 aplicada a un elemento diferencial del sistema de flujo. De esta forma, el incremento de calor adicionado, dQ, se puede expresar en función de un coeficiente local de transmisión de calor $h^{\bullet}$, corregido para tener en cuenta los procesos de transferencia de materia que tienen lugar. Este procedimiento es análogo al que se ha utilizado en el Ejemplo 15.4-2.

§ 22.4 EL BALANCE MACROSCÓPICO DE ENERGÍA MECÁNICA

El balance de energía mecánica o ecuación de Bemuolli, para una mezcla reaccionante de fluidos con transferencia de materia a través de las superficies limitantes, no puede expresarse en forma sencilla para un caso general. Por esta razón, el estudio que se hace aquí se restringe al caso de fluidos de ***densidad constante*** ρ. Para estos fluidos, el balance de energía mecánica es

$$\frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = -\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho}\right)w\right] + B^{(m)} - W\text{-}E, \qquad (22.4\text{-}1)$$

Esta ecuación es igual a la Ec. 7.3-la, con la adición del término $B^{(m)}$, que representa la energía que se comunica al sistema de flujo debido a los procesos de transferencia de materia; en este término se incluyen la energía cinética y potencial comu-

[1] Este termino puede expresarse como una integral:

$$Q^{(m)} = -\int_{S^{(m)}} (n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i v_i A_i)\, dS \qquad (22.3\text{-}1a)$$

siendo n el vector unitario normal dirigido hacia fuera. El origen de esta expresión aproximada puede verse fácilmente considerando la Ec. 18.4-6. Lo mismo que en § 22.1, se supone que la superficie de transferencia es estacionaria.

nicadas al sistema, así como también el trabajo realizado contra la presión del sistema para forzar la introducción del fluido a través de las paredes del mismo.' La forma de estado estacionario de la ecuación de Bernoulli para fluidos puros (Ec. 7.3-2) es válida para sistemas reactivos de varios componentes si $B^{(m)}$ es igual a cero. En el Ejemplo 22.5-3 se ilustra su utilización en estas condiciones.

§ 22.5 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ESTADO ESTACIONARIO

En § 18.5 se ha visto como pueden obtenerse los perfiles de temperatura y concentración en sistemas concretos, mediante la resolución de formas simplificadas de las ecuaciones de variación para sistemas de varios componentes. En esta sección se indica cómo se utilizan formas simplificadas de los balances macroscópicos en sistemas de varios componentes, con el fin de plantear relaciones entre las condiciones de entrada y salida para sistemas de flujo en estado estacionaaio. Teniendo en cuenta los términos que se descartan, se sabe con exactitud las restricciones a que están sometidos los resultados obtenidos.

Ejemplo 22.5— 1. Balance de energía en un convertidor de dióxido de azufre

Los gases procedentes de un quemador de azufre pasan a un convertidor, en el que el dióxido de azufre presente se oxida catalíticamente a trióxido de azufre, de acuerdo con la reacción $SO_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightleftharpoons SO_3$. ¿Qué cantidad de calor debe de eliminarse del convertidor, por hora, con el fin de obtener una conversión del 95 % del SO_2 en las condiciones que se indican en la Fig. 22.5 — 1? Supóngase que el convertidor es suficientemente grande, de forma que los gases que salen de él estén en equilibrio termodinámico entre sí, es decir, que las presiones parciales de los gases a la salida cumplen la condición de equilibrio

$$K_p = \frac{p_{SO_3}}{p_{SO_2} p_{O_2}^{1/2}} \qquad (22.5\text{–}1)$$

Los valores aproximados de K_p para esta reacción son los siguientes:

T, °K	600	700	800	900
K_p, $atm^{-1/2}$	9500	880	69,5	9,8

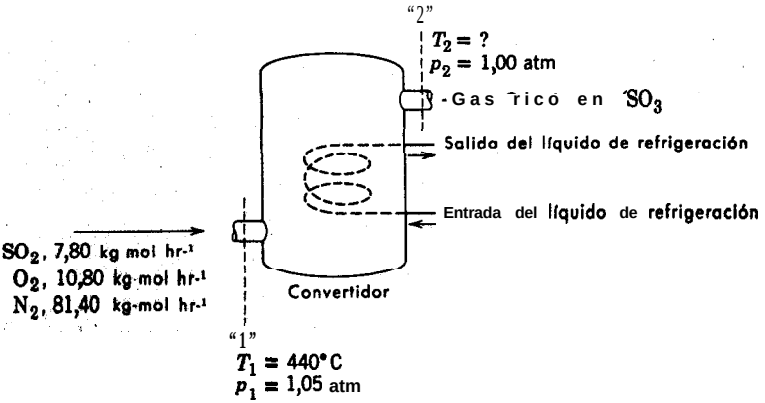
Solución. Es conveniente dividir el problema en dos partea: aplicar primeramente el balance de materia y la expresión de equilibrio para hallar la temperatura de salida, y utilizar después el balance de energía para determinar la cantidad de calor que es preciso eliminar.

1 Este término puede expresarse en función de una integral de superficie

$$B^{(m)} = \int_{S^{(m)}} (n \cdot \{\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{\Phi} + p\}v)\, dS \qquad (22.4\text{–}1a)$$

Igual que en § 22.1, se supone que la superficie de transferencia es estacionaria.

a. Determinación[1] de T_2: Se comienza por escribir el balance macroscópico de materia,



hg. 22.5-1. Oxidación catalítica del dióxido de azufre.

Ec. 22.1-3, para los distintos constituyentes de las dos corrientes, expresado en la forma

$$\mathcal{W}'_{i2} = \mathcal{W}'_{i1} + R_{i,tot} \tag{22.5-2}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las dos relaciones **estequiométricas,**

$$R_{SO_2,tot} = -R_{SO_3,tot} \tag{22.5-3}$$

$$R_{O_2,tot} = \tfrac{1}{2}R_{SO_3,tot} \tag{22.5-4}$$

De esta forma se obtienen las velocidades molares de' flujo a través de **la** superficie «2»:

$$\mathcal{W}'_{2,SO_2} = 7{,}80 - (0{,}95)(7{,}80) = 0{,}39 \text{ Kg-mol hr}^{-1} \tag{22.5-5}$$

$$\mathcal{W}'_{2,SO_3} = 0 + (0{,}95)(7{,}80) = 7{,}41 \text{ Kg-mol hr}^{-1} \tag{22.5-6}$$

$$\mathcal{W}'_{2,O_2} = 10{,}8 - 1/2(0{,}95)(7{,}80) = 7{,}09 \text{ Kg-mol hr}^{-1} \tag{22.5-7}$$

$$\mathcal{W}'_{2,N_2} = \mathcal{W}'_{1,N_2} = 81{,}40 \text{ Kg-mol hr}^{-1} \tag{22.5-8}$$

$$\mathcal{W}'_2 = 96{,}29 \text{ Kg-mol hr}^{-1} \tag{22.5-9}$$

Substituyendo los valores **numéricos** en la expresión de equilibrio, **Ec.** 22.5-1, se obtiene:

$$K_p = \frac{(7{,}41/96{,}29)}{(0{,}39/96{,}29)(7{,}09/96{,}29)^{1/2}} = 70{,}0 \text{ atm}^{-1/2} \tag{22.5-10}$$

De acuerdo con los datos que se han indicado para el equilibrio, este valor de K_p **corresponde** a una temperatura de salida T_2 de, aproximadamente, 525 °C.

b. Cálculo de la cantidad de calor que es preciso eliminar. Tal como se ha indicado en el Ejemplo 15.4 -1, las variaciones de energía cinética y potencial son en este caso **des-**

[1] **Véase O. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, Principios de los Procesos Químicos,** II, Termodinámica, **Reverte, Barcelona (1964), pp. 487-488.**

preciables en comparación con las variaciones .de entalpia. Para las condiciones de este ejemplo puede suponerse que los gases se comportan como ideales. Según esto, para cada constituyente, $\hat{H}_i = \hat{H}_i(T)$. Por lo tanto, el balance macroscópico de energía, Ec. 22.3 — 1, 'se. puede expresar así

$$-Q = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{W}_i \hat{H}_i)_1 - \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{W}_i \hat{H}_i)_2 \qquad (22.5\text{–}11)$$

Para los constituyentes individuales, tendremos

$$\hat{H}_i = \hat{H}_i^\circ + (\hat{C}_{pi})_{\text{med}}(T - T^\circ) \qquad (22.5\text{–}12)$$

siendo $\hat{H}_i^\circ$ la entalpia standard de formación[2] de la especie i a partir de sus elementos a la temperatura de referencia de entalpia T°, y $(\hat{C}_{pi})_{\text{med}}$ el calor específico medio[2] de las especies entre T y T°. Para las condiciones de este problema se pueden utilizar los siguientes valores numéricos[2] de estas propiedades físicas (las dos últimas columnas se han obtenido a partir de la Ec. 22.5-12):

Componente	$\hat{H}_i^\circ$ (cal g-mol^{-1}) a 25 °C	$(\hat{C}_{pi})_{\text{med}}$ [cal(mol-g)$^{-1}$°C^{-1}] desde 25 °C hasta 440 °C	$(\hat{C}_{pi})_{\text{med}}$ [cal(mol-g)$^{-1}$°C^{-1}] desde 25 °C hasta 525 °C	$(\mathcal{W}_i \hat{H}_i)_1$ (Kcal hr^{-1})	$(\mathcal{W}_i \hat{H}_i)_2$ (Kcal hr^{-1})
SO_2	— 70.960	11,05	11,25	— 517.720	— 25.480
SO_3	— 94.450	—	15,88	0	— 641.040
O_2	0	7,45	7,54	33.390	26.730
N_2	0	7,12	7,17	240,520	291.820
				— 243.810	— 347.970

Substituyendo estos valores en la Ec. 22.5 -11 se obtiene la velocidad con la que es preciso eliminar el calor:

$$-Q = -243.810 - (-347.970)$$
$$= 104.160 \text{ Kcal hr}^{-1} \qquad (22.5\text{-}13)$$

Ejemplo 22.5-2. Altura de una torre de absorción de relleno[3]

Se desea separar un gas soluble A que esta formando una mezcla con el gas insoluble G, poniendo en contacto la mezcla con un disolvente L no volátil en el aparato que se indica en la Fig. 22.5-2.

El aparato consiste esencialmente en un tubo vertical que está ocupado por un material de relleno colocado al azar, formado por pequeños anillos de una substancia química-

2 Véase, por ejemplo, 0. A. HOUGEN, K. M. WATSON y R. A. RAGATZ, Part 1, *Chemical Process Principles*, Wiley, Nueva York (1954), segunda edición, pp. 257, 296.

3 R. L. PIGFORD y A. P. COLBURN, Sección 10 de *Chemical Engineers' Handbook* (ed. J. H. PERRY), McGraw-Hill, Nueva York (1950), tercera edición.

mente inerte. El líquido L se reparte uniformemente sobre la parte superior del relleno y escurre sobre la superficie de los anillos, poniéndose en contacto íntimo con la mezcla gaseosa que asciende por la torre. Merced a este contacto entre las dos corrientes se produce el transporte de A desde el gas hacia el líquido.

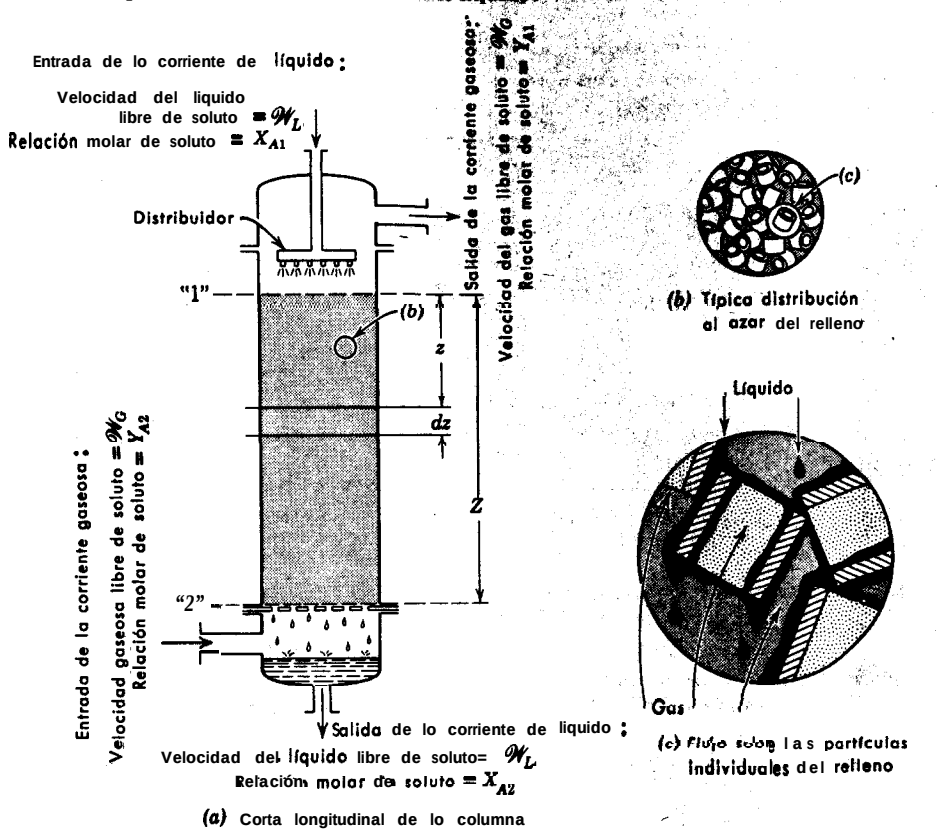


Fig. 22.5-2. Columna de relleno para transferencia de materia, en la que se dispersa la fase descendente. Obdrvese que en este esquema $\mathscr{W}_G$ es negativo; es decir, que el gas fluye de «2» a «1».

Las corrientes de gas y líquido entran en el aparato con velocidades molares $-\mathscr{W}_G$ y $\mathscr{W}_L$, respectivamente, calculadas suponiendo que se ha eliminado A. Obsérvese que la velocidad del gas es negativa en este problema debido a que la corriente gaseosa fluye desde la superficie «2» hacia la «1». La relación molar de A a G en la corriente gaseosa de entrada es $Y_{A2} = y_{A2}/(1 - y_{A2})$, y la relación molar de A a L en la corriente del líquido de entrada es $X_{A1} = x_{A1}/(1 - x_{A1})$. Deducir una expresión de la altura z de torre necesaria para reducir la relación molar de A en la corriente gaseosa desde Y_{A2} hasta Y_{A1}, en función de los coeficientes de transferencia de materia en las dos corrientes y las anteriores velocidades y composiciones.

Supóngase que la concentración de *A* es siempre pequeña en ambas corrientes, de forma que la operación puede considerarse isotérmica y no es preciso corregir los coeficientes de transferencia de materia debido a la transferencia de materia. Es decir, que pueden utilizarse los coeficientes de transferencia de materia k_x y k_y definidos en las Ecs. 21.3 -2 y 3.

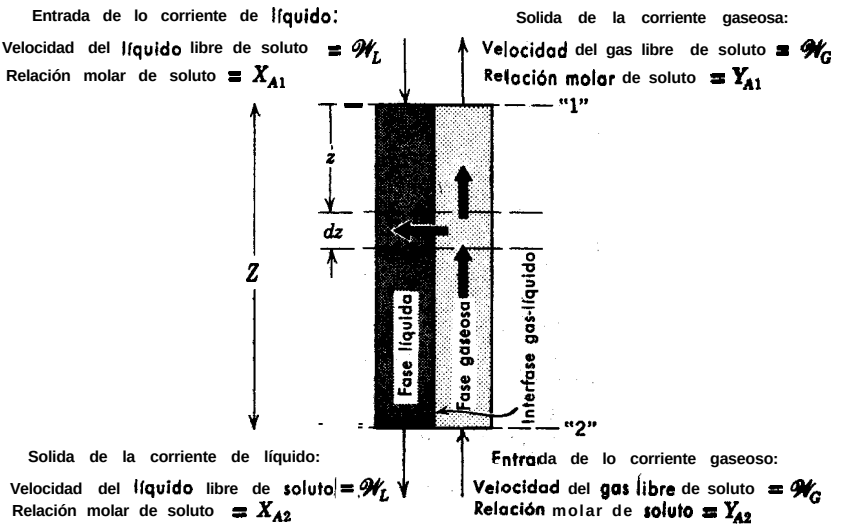


Fig. 22.5-3. Representación esquemática de una torre de **absorción** de **relleno mostrando el** elemento diferencial al que se aplica el balance de materia.

Solución. Como el comportamiento de una torre de relleno es bastante complejo, comenzaremos estudiando un modelo simplificado. Se considera que el sistema es equivalente a dos corrientes que fluyen colateralmente sin que exista mezcla longitudinal, tal como se indica en la Fig. 22.5 -3, y que se ponen en contacto entre sí a través de un área interfacial «*a*» por unidad de volumen de relleno (véase Fc. 21.1 — 13). Se supone también que la velocidad y la composición de cada una de las corrientes es uniforme en la sección de la torre, y se desprecia el transporte molecular y de remolino del soluto en la dirección de flujo. Finalmente, se considera que los perfiles de concentración en la dirección de flujo son curvas continuas que no se modifican sensiblemente con la distribución de las partículas de relleno. El modelo que resulta al tener en cuenta estas modificaciones simplificantes seguramente no conduce a una descripción muy satisfactoria de una columna de relleno; la mezcla longitudinal y la no uniformidad de la velocidad de los fluidos conducen, probablemente, a errores considerables. Sin embargo, las correlaciones de que se dispone actualmente para los coeficientes de transferencia de materia se han obtenido a base de este modelo, que deberá de emplearse cuando se utilicen estas correlaciones.

Ahora podemos deducir ya una expresión de la altura de la columna, y lo vamos a hacer en dos etapas. Primeramente se utiliza el balance macroscópico global de materia para determinar la composición de la fase líquida a la salida, y la relación existente entre las composiciones globales de las dos fases en un punto cualquiera de la torre. A continuación,

se utilizan estos resultados, juntamente con la forma diferencial del balance macroscópico de materia, para determinar las composiciones interfaciales y la altura **necesaria** de **torre.**

a. Balances macroscópicos globales de materia. Los balances macroscópicos de materia, Ec. 22.1-3, para el soluto *A* en cada una de las corrientes del sistema comprendido entre «1» y «2», pueden expresarse así

(corriente líquida) $$\mathcal{W}_{A2} - \mathcal{W}_{A1} = \mathcal{W}'^{(m)}_{Al} \tag{22.5-14}$$

(corriente gaseosa) $$\mathcal{W}_{Ag2} - \mathcal{W}_{Ag1} = \mathcal{W}'^{(m)}_{Ag} \tag{22.5-15}$$

donde los subíndices *Al y Ag* se refieren al soluto *A* en las corrientes líquida y gaseosa, respectivamente. Es evidente que $\mathcal{W}'^{(m)}_{Al} = -\mathcal{W}'^{(m)}_{Ag}$, y, por lo tanto, combinando las Ecs. 22.5-14 y 15 se obtiene

$$\mathcal{W}_{A2} - \mathcal{W}_{A1} = -(\mathcal{W}_{Ag2} - \mathcal{W}_{Ag1}) \tag{22.5-16}$$

Expresando esta ecuación en función de las composiciones de las corrientes de entrada y salida, tomando $\mathcal{W}_{A2} = \mathcal{W}_L X_{A2}$, etc., se llega a

$$X_{A2} = X_{A1} - (\mathcal{W}_G/\mathcal{W}_L)(Y_{A2} - Y_{A1}) \tag{22.5-17}$$

De esta forma se halla la concentración de *A* en la corriente del líquido de salida.

Reemplazando la superficie «2» por una superficie situada a una distancia z medida hacia abajo en la columna, se puede utilizar la Ec. 22.5-17 para obtener una expresión que relaciona las composiciones globales de la corriente[4] en un punto cualquiera de la torre:

$$X_A = X_{A1} - (\mathcal{W}_G/\mathcal{W}_L)(Y_A - Y_{A1}) \tag{22.5-18}$$

En la Fig. 22.5 -4 se representa la Ec. 22.5 — 18 (la «línea de operación») juntamente con el equilibrio de distribución para las condiciones del Problema 22.B.

b. Aplicación de los balances macroscópicos de materia en forma diferencial. Se aplica ahora la Ec. 22.1-3 a una pequeña longitud *dz* de la torre, con el fin de estimar primeramente las condiciones interfaciales y determinar después la altura de torre necesaria' para obtener una determinada separación.

(i). *Determinación de las condiciones interfaciales.* Puesto que sólo se transmite *A* a través de la interfase, se pueden utilizar las Ecs. 21.3-2 y 3 para expresar la velocidad de transferencia de soluto en la altura *dz* para disoluciones diluidas:

$$d\mathcal{W}'^{(m)}_{Al} = (k_x a)\left(\frac{x_{A0} - x_A}{1 - x_{A0}}\right) S\, dz \tag{22.5-19}$$

$$d\mathcal{W}'^{(m)}_{Ag} = (k_y a)\left(\frac{y_{A0} - y_A}{1 - y_{A0}}\right) S\, dz \tag{22.5-20}$$

siendo a = área interfacial por unidad de volumen de relleno de la torre

S = área de la sección transversal de la torre

x_A, y_A = fracción molar global de *A* en las fases líquida y gaseosa, respectivamente,

$$= \frac{X_A}{X_A + 1}, \qquad \frac{Y_A}{Y_A + 1}$$

[4] Para abreviar se omite en esta sección el subíndice *b* para la composición global. Los símbolos X_A, Y_A, x_A, e y_A representan composiciones globales.

x_{A0}, y_{A0} = fracciones molares interfaciales de A en las fases líquida y gaseosa, respectivamente.

Para el caso de disoluciones diluidas que se considera aquí, X_A, x_A, Y_A e y_A, son despreciables en comparación de la unidad. Teniendo en cuenta que $d\mathcal{N}_{Al}^{(m)} + d\mathcal{N}_{Ag}^{(m)} = 0$, y combinando las Ecs. 22.5-19 y 20, se obtiene

$$\frac{Y_A - Y_{A0}}{X_A - X_{A0}} = -\left(\frac{k_x a}{k_y a}\right) \qquad \textit{(22.5-21)}$$

La Ec. 22.5-21 permite determinar Y_{A0} en función de Y_A. Para cualquier valor de Y_A se puede localizar X_A sobre la línea de operación (balance de materia). La recta de pendiente

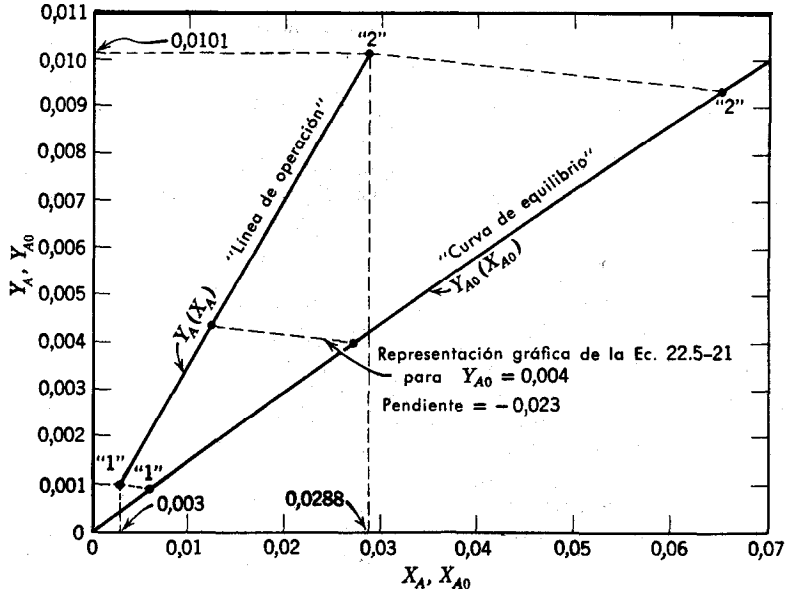


Fig. 22.5-4. Cálculo de las condiciones interfaciales en la absorción de ciclohexano a partir de aire en una torre de relleno (Véase el Problema 22B).

$-(k_x a/k_y a)$ que pasa por el punto (X_A, Y_A), tal como se indica en la Fig. 22.5-4, corta a la curva de equilibrio en el punto correspondiente a las composiciones locales interfaciales Y_{A0} y X_{A0}. Para el caso de soluciones concentradas, es preferible partir de un par de composiciones interfaciales (x_{A0}, y_{A0}) y utilizar la Ec. 21.3 -4.

(ii) ***Determinación de la altura de columna necesaria.*** Aplicando la Ec. 22.1-1 a la corriente gaseosa para un volumen Sdz de la columna, se obtiene

$$\mathcal{N}'_G\, dY_A = d\mathcal{N}_{Ag}^{(m)} \qquad \textit{(22.5-22)}$$

Combinando esta expresión con la **Ec. 22.5−20** para el caso de disoluciones diluidas, resulta

$$-\mathfrak{N}'_G \, d\, Y_A = (k_y a)(Y_A - Y_{A0}) S \, dz \qquad (22.5\text{-}23)$$

Integrando esta ecuación desde z = 0 hasta z = Z, se obtiene

$$Z = \frac{\mathfrak{N}'_G}{S(k_y a)} \int_{Y_{A1}}^{Y_{A2}} \frac{dY_A}{Y_A - Y_{A0}} \qquad (22.5\text{-}24)$$

La **Ec.** 22.5 -24 es la expresión que se deseaba obtener para hallar la altura de torre que se requiere para efectuar una determinada **separación.** Obsérvese que al expresar la **Ec.** 22.5 -24 se ha despreciado la variación del coeficiente de transferencia de materia k_x con la composición; en general, esto sólo se puede hacer para el caso de disoluciones diluidas.

La **Ec.** 22.5-24 ha de integrarse generalmente por métodos numéricos o **gráficos.** Sin embargo, para disoluciones diluidas, puede admitirse frecuentemente que la línea de **operación** y la de equilibrio son rectas. Por otra **parte, si** la relación (k_x/k_y) es **constante,** $(Y_A - Y_{A0})$ varía linealmente con Y_A. En estas condiciones, la **Ec.** 22.5-24 se puede integrar para obtener (vtase el Problema 22.F)

$$Z = \frac{\mathfrak{N}'_G}{S(k_y a)} \frac{(Y_{A2} - Y_{A1})}{(Y_{A0} - Y_A)_{\ln}} \qquad (22.5\text{-}25)$$

siendo

$$(Y_{A0} - Y_A)_{\ln} = \frac{(Y_{A0} - Y_A)_2 - (Y_{A0} - Y_A)_1}{\ln \left[\frac{(Y_{A0} - Y_A)_2}{(Y_{A0} - Y_A)_1} \right]} \qquad (22.5\text{-}26)$$

Ordenando la Fc. 22.5-25, resulta

$$\mathfrak{N}'^{(m)}_{A0} = \mathfrak{N}'_G (Y_{A2} - Y_{A1}) = (k_y a) Z S (Y_{A0} - Y_A)_{\ln} \qquad (22.5\text{-}27)$$

La comparación de las **Ecs.** 22.5-27 y 15.4-16 pone de manifiesto la estrecha **analogía** que existe entre torres de relleno y cambiadores de calor. También pueden obtenerse expresiones análogas a la **Ec.** 22.5-27, pero conteniendo el coeficiente global de transferencia de materia K_y. **(Véase** el Problema 22.F.). También aquí se pueden utilizar las **Ecs.** 22.5-26 ó 27, tanto para flujo en corrientes paralelas como en contracorriente. Es preciso tener en cuenta, sin embargo, que el modelo simplificado que **se** ha utilizado para describir la torre de relleno merece menos **confianza** que el modelo correspondiente para cambiadores de calor.

Ejemplo 22.5-3. Expansión de una mezcla gaseosa reactiva a través de una boquilla adiabática sin fricción

Una mezcla equimolar de CO_2 y H_2, a 1000 °K y 1,50 atm, está contenida en un gran tanque de presión térmicamente aislado, tal como **se** indica en la Fig. 15.5-4. En estas condiciones, tiene lugar la reacción

$$CO_2 + H_2 \rightleftharpoons CO + H_2O \qquad (22.5\text{-}28)$$

Después de un tiempo de permanencia suficientemente grande en el tanque para que se alcance el equilibrio, se deja expansionar el gas hasta la presión ambiente de 1 atm a través de una boquilla convergente.

Estimar la temperatura y la velocidad del gas que sale a través del estrechamiento de la boquilla *(a)* suponiendo que la reacción durante el paso del gas a través de la boquilla es despreciable, y *(b)* suponiendo que se alcanza instantáneamente el equilibrio termodinámico en todos los puntos de la boquilla. Supóngase en ambos casos que la expansión es adiabática y que no existe fricción.

Solución. Vamos a comenzar suponiendo una operación de estado cuasi-estacionario, que los perfiles de velocidad son planos y que las variaciones de energía potencial son despreciables. Se supone también que los calores específicos son constantes, que los gases se comportan como ideales, y que la difusión en la dirección de flujo es despreciable.

El balance macroscópico de energía, Ec. 22.3 -1, se puede expresar en esta forma

$$\tfrac{1}{2}v_2^2 = \hat{H}_1 - \hat{H}_2 \qquad (22.5\text{-}29)$$

donde los subíndices «1» y «2» representan las condiciones en el tanque y en el estrechamiento de la boquilla. De igual forma que en el Ejemplo 15.5 -3, se considera que la velocidad del fluido en el tanque es cero.

Todavía no se puede determinar la variación de entalpia. Para ello, combinando la Ec. 22.3 — 1 con el 'balance de energía mecánica en estado estacionario, Ec. 7.3 —2, se obtiene[5]

$$\frac{1}{\rho}\,dp = d\hat{H} \qquad (22.5\text{-}30)$$

Se puede utilii esta expresión, juntamente con la ley del gas ideal y una expresión de $\hat{H}(T)$, con el fin de evaluar $\hat{H}_2$, y, por consiguienk, T_2 y v_2:

$$p = \frac{\rho RT}{\sum_{i=1}^{n} x_i M_i} \qquad (22.5\text{-}31)$$

$$\hat{H} = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i[\hat{H}_i^\circ + \bar{C}_{pi}(T - T^\circ)]\right\}}{\sum_{i=1}^{n} x_i M_i} \qquad (22.5\text{-}32)$$

En esta ecuación, x_i son las fracciones molares de los distintos componentes de la mezcla a la temperatura T, y $\hat{H}_i^\circ$ son las entalpias molares de los componentes a la temperatura T° de referencia de entalpias. A continuación se discute separadamente la evaluación de $\hat{H}$ para las dos partes de este problema.

Aproximación A. Suposición de reacción química muy lenta.

---

[5] Obsérvese que la Ec. 22.5 — 30 también se podría obtener directamente a partir de la ecuación de energía, Ec. E de la Tabla 18.3 — 1, despreciando τ, q y j_i. Es evidente que ni la Ec. 22.3-1 ni la Ec. 7.3-2 pueden utilizarse directamente en la forma integrada, ya que no se conoce el camino termodinámico de la expansión.

En este caso las x, son constantes, correspondientes a los valores de equilibrio a **1000 °K,** y por lo tanto

$$d\hat{H} = \left(\frac{\Sigma_i x_i \bar{C}_{pi}}{\Sigma_i x_i M_i}\right) dT \tag{22.5-33}$$

con lo que la **Ec.** 22.5-30 se puede ***poner*** en esta forma

$$d \ln p = \left(\frac{\Sigma_i x_i \bar{C}_{pi}}{R}\right) d \ln T \tag{22.5-34}$$

Puesto que x_i y $\bar{C}_{pi}$ se consideran constantes, esta ecuación puede integrarse desde p_1, T_1 hasta p_2, T_2 para obtener

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(R/\Sigma_i x_i \bar{C}_{pi})} \tag{22.5-35}$$

Combinando esta expresión con las **Ecs.** 22.5-29 y 32 se obtiene **la expresión que** se trata de hallar para la velocidad del gas en la superficie 2:

$$v_2 = \left\{2T_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(R/\Sigma_i x_i \bar{C}_{pi})}\right] \frac{\Sigma_i x_i \bar{C}_{pi}}{\Sigma_i x_i M_i}\right\}^{1/2} \tag{22.5-36}$$

Substituyendo los valores **numéricos** en las Ecs. 22.5 -35 y 36, **se obtiene (véase** el **Problema** 22.A)

$$\begin{cases} T_2 = 920\ ^\circ\text{K} \\ v_2 = 526\ \text{m seg}^{-1} \end{cases}$$

Cómo se puede observar, este tratamiento es muy semejante al **que se** 'ha **seguido en** el Ejemplo 15.5-3, y está **también** sometido a la **restricción** de que **la velocidad** en el **estrechamiento** ha de ser **subsónica. Es** decir, que **la presión** en el estrechamiento de la boquilla no puede ser inferior a la fracción de p_1 que se requiere **para producir** velocidad **sónica** en el estrechamiento. **(Véase Ec. 15.1–2).** Si la **presión** ambiente es menor que este valor crítico de p_2, la presión en el estrechamiento se **mantendrá** en el **valor crítico y existirá** una onda de choque a la salida de la boquilla.

Aproximación B. **Suposición** de **reacción química** muy **rápida.**

Se puede proceder en este caso **como en** el apartado ***A,*** **teniendo en** cuenta que las x_i son ahora funciones de la temperatura, definida por la **relación** de equilibrio:

$$\frac{(x_{H_2O})(x_{CO})}{(x_{H_2})(x_{CO_2})} = K_x(T) \tag{22.5-37}$$

y las relaciones **estequiométricas**

$$x_{H_2O} = x_{CO} \qquad x_{H_2} = x_{CO_2} \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i = 1 \tag{22.5-38,39,40}$$

El término $K_x(T)$ de la **Ec.** 22.5-37 es la constante de equilibrio de la reacción, que es conocida, y que puede considerarse como una función exclusiva de **la** temperatura debido a que se ha supuesto que el gas se comporta como ideal y a que el número de moles no

varía durante la reacción química. Las Ecs. 22.5-38 y 39 se deducen de la estequiometría de la reacción y de la composición inicial del gas.

La expresión de la temperatura final es, en este caso, considerablemente mas compleja. Cuando $\Sigma_i x_i M_i$ es constante, la combinación de las Ecs. 22.5—30 y 31 conduce a

$$R \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\tilde{H}}{dT}\, d \ln T \qquad (22.5\text{–}41)$$

siendo

$$\frac{d\tilde{H}}{dT} = \sum_{i=1}^{4} [\tilde{H}_i^\circ + \tilde{C}_{pi}(T - T^\circ)] \frac{dx_i}{dT} + \sum_{i=1}^{4} \tilde{C}_{pi} x_i \qquad (22.5\text{–}42)$$

En general, la integral de la Ec. 22.5-41 ha de evaluarse numéricamente, puesto que x_i y dx_i/dT son funciones complejas de la temperatura, que vienen dadas por las Ecs. 22.5-37 a 40. Sin embargo, una vez que se ha determinado T_2 a partir de la Ec. 22.5-41, v_2 se puede obtener fácilmente mediante las Ecs. 22.5-29 y 32. Substituyendo los valores numéricos en estas expresiones se obtiene (véase el Problema 22.C)

$$\begin{cases} T_2 = 937 \ ^\circ\text{K} \\ v_2 = 534 \ \text{m seg}^{-1} \end{cases}$$

Se encuentra, por consiguiente, que cuando se mantiene el equilibrio químico durante la expansión, la temperatura y la velocidad a la salida de la boquilla son mayores. Esto se debe a que al decrecer la temperatura el equilibrio varía en el sentido en el que se desprende calor de reacción. Este desprendimiento de energía tendrá lugar al disminuir la temperatura en cualquier sistema en equilibrio químico, como consecuencia de la famosa regla de Le Chatelier. En este caso, la reacción, tal como se ha escrito, es endotérmica, y la constante de equilibrio disminuye al decrecer la temperatura. Como consecuencia, el CO y el H_2O se convertirán parcialmente en Hz y CO;! durante la expansión, dando lugar al correspondiente desprendimiento de energía.

Es interesante observar que también se puede aumentar la velocidad de escape, y, por consiguiente, la potencia del motor en la propulsión de cohetes, si se puede conseguir un equilibrio rápido, aun cuando las reacciones sean fuertemente exotérmicas. Esto se debe a que las constantes de equilibrio para estas reacciones aumentan al disminuir la temperatura, de forma que se desprende más calor de reacción durante la expansión. Se ha sugerido este principio como medio de incrementar la potencia de los motores de cohetes. El aumento de propulsión que se puede obtener por este procedimiento es bastante grande.

Se- ha elegido este ejemplo debido a su sencillez. Téngase en cuenta que si la reacción química transcurre con variación del número de moles, la constante de equilibrio, y, por consiguiente, la entalpia, son funciones de la presión. En este caso, que es bastante frecuente, las variables p y T implícitas en la Ec. 22.5-30 no se pueden separar, y hay que integrar punto a punto esta ecuación. Estas integraciones se han efectuado, por ejemplo, para la predicción del comportamiento supersónico de túneles de viento[6] y de motores de cohetes', pero los cálculos son demasiado engorrosos y no se describirán aquí.

6 J. G. HALL, «Dissociation Nonequilibrium in Hypersonic Nozzle Flow», *Preprint* 7, A. I. Ch. E. Meeting, Kansas City (1959).

7 T. W. REYNOLDS y L. V. BALDWIN, One-Dimensional Flow with Chemical Reaction in Nozzle Expansions, *Preprint* 6, A. Z. Ch. E. Meeting, Kansas City (1959).

§ 22.6 UTILIZACIÓN DE LOS BALANCES MACROSCÓPICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTADO NO ESTACIONARIO

En §22.5 se han considerado problemas de estado estacionario. Vamos a abordar ahora el comportamiento no estacionario de sistemas de varios componentes. Este comportamiento es importante en numerosas operaciones prácticas, tales como lixiviación, secado de sólidos, separaciones cromatográficas y operación de reactores químicos. En muchos de estos procesos es preciso tener en cuenta tanto calores de reacción como transferencia de materia.

Ya que el tratamiento completo de estos temas cae fuera del objeto de este libro, consideraremos solamente dos ejemplos muy sencillos. Una discusión más amplia puede encontrarse en las obras de Marshall y Pigford.[1]

Ejemplo **22.6–1.** Puesta en marcha de un reactor químico

Se desea producir una substancia ***B*** a partir de una materia prima ***A*** en un reactor químico de volumen ***V*** que está equipado con un sistema que mantiene una perfecta agitación. La formación de ***A*** es reversible, y las reacciones directa e inversa pueden considerarse de primer orden. Además, ***B*** sufre una descomposición irreversible de primer orden para formar un compuesto C. Las reacciones químicas que tienen lugar pueden representarse de esta forma

$$A \underset{k'''_{1A}}{\overset{k'''_{1B}}{\rightleftharpoons}} B \xrightarrow{k'''_{1C}} C \qquad (22.6\text{-}1)$$

En el instante cero se introduce en el reactor, inicialmente vacío, una solución de ***A*** de concentración c_{A0} con una velocidad volumétrica de flujo constante Q.

Deducir una expresión de la cantidad de ***B*** existente en el interior del reactor en el momento en que se llena hasta su capacidad total ***V***, suponiendo que la solución de alimentación no contiene ***B*** y que no hay variación de las propiedades del fluido.

Solución. Se comienza por expresar los balances macroscópicos de materia en estado no estacionario para las especies ***A*** y ***B***, que en unidades molares son

$$\frac{d\mathcal{M}_A}{dt} = Qc_{A0} - k'''_{1B}\mathcal{M}_A + k'''_{1A}\mathcal{M}_B \qquad (22.6\text{–}2)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_B}{dt} = -(k'''_{1A} + k'''_{1C})\mathcal{M}_B + k'''_{1B}\mathcal{M}_A \qquad (22.6\text{-}3)$$

Diferenciando la Ec. 22.6-3 con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d^2\mathcal{M}_B}{dt^2} = -(k'''_{1A} + k'''_{1C})\frac{d\mathcal{M}_B}{dt} + k'''_{1B}\frac{d\mathcal{M}_A}{dt} \qquad (22.6\text{-}4)$$

---

[1] W. R. MARSHALL, Jr. y R. 1. PIGFORD, *The Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems*, University of Delaware Press, Newark, Delaware (1947).

Poniendo en. vez de $d\mathcal{M}_A/dt$ el segundo miembro de la Ec. 22.6 -2, y combinando la expresión que resulta con la Fc. 22.6-3 se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de $\mathcal{M}_B$ en función del tiempo:

$$\frac{d^2\mathcal{M}_B}{dt^2} + (k'''_{1A} + k'''_{1B} + k'''_{1C})\frac{d\mathcal{M}_B}{dt} + k'''_{1B}k'''_{1C}\mathcal{M}_B - k'''_{1B}Qc_{A0} = 0 \qquad (22.6\text{–}5)$$

Esta ecuación se resuelve con las siguientes condiciones iniciales:

C.I. 1: para $t = 0$ $\mathcal{M}_B = 0$ *(22.6-6)*

C.I. 2: para $t=O$ $\frac{d\mathcal{M}_B}{dt} = 0$ (22.6–7)

Efectuando la integración se obtiene:

$$\mathcal{M}_B = \frac{Qc_{A0}}{k'''_{1C}}\left(1 + \frac{s_-}{s_+ - s_-}e^{s_+ t} - \frac{s_+}{s_+ - s_-}e^{s_- t}\right) \qquad (22.6\text{–}8)$$

siendo

$$s_\pm = \tfrac{1}{2}[-(k'''_{1A} + k'''_{1B} + k'''_{1C}) \pm \sqrt{(k'''_{1A} + k'''_{1B} + k'''_{1C})^2 - 4k'''_{1B}k'''_{1C}}] \qquad (22.6\text{-}9)$$

Las Ecs. 22.6 -8 y 9 expresan la masa total de B existente en el reactor en función del tiempo hasta el momento en que esta totalmente lleno. Estas expresiones son muy semejantes a las ecuaciones que se han obtenido para el manómetro amortiguado del Ejemplo 7.6-2 y el controlador de temperatura del Ejemplo 15.5 -2. Sin embargo, se 'puede demostrar (véase el Problema 22.1) que s_+ y s_- son ambos reales y positivos, y, por consiguiente, $\mathcal{M}_B$ no puede oscilar.

Ejemplo **22.6–2. Operación** de una columna de relleno en estado no estacionarlo

Existen numerosos procesos'industrialmente importantes en los que tiene lugar transferencia de materia entre un fluido y un sólido granular, como por ejemplo: recuperación de vapores orgánicos por adsorción sobre carbón, extracción de cafeína de los granos de café, y separación de los hidrocarburos aromáticos y alifáticos por adsorción selectiva sobre gel de sílice. En general, el sólido se mantiene fijo, tal como se indica en la Fig. 22.6 – 1, y el fluido se percola a través de el. La operación es de por sí no estacionaria, y es preciso reemplazar o «regeneran> periódicamente el sólido, es decir, volver a las condiciones originales mediante calentamiento u otro tratamiento adecuado. Para ilustrar estas operaciones de transferencia de materia en lecho fijo, vamos a considerar un caso físicamente sencillo, como es la separación de un soluto contenido en una solución mediante el paso a través de un lecho adsorbente.

En esta operación se hace circular con una velocidad volumétrica de flujo constante Q, a través de una torre de relleno,una solución que contiene el único soluto A en el disolvente B y cuya fracción molar es x_{A1}. El relleno de la torre consiste en un sólido granular que adsorbe a A. Al iniciar la percolación los intersticios del lecho están totalmente llenos

del líquido *B* puro, y el sólido no contiene *A*. El liquido de percolación desplaza uniformemente al disolvente, de forma que la concentración de la solución de *A es* siempre 'uniforme en cualquier sección transversal. Para mayor sencillez se supondrá que la concen-

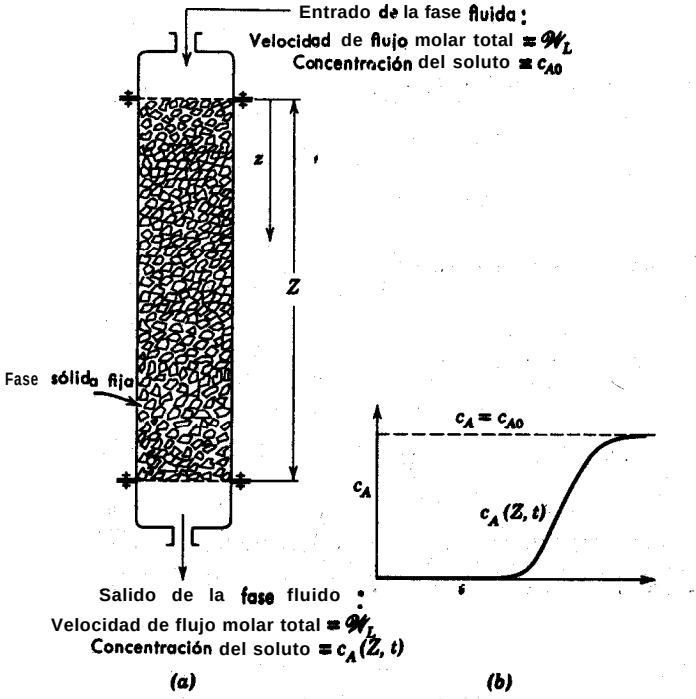


Fig. 22.6-1. Torre de absorción de lecho fijo: *(a)* representación esquemática del aparato; (b) una curva efluente típica.

tración de equilibrio de A adsorbido sobre el solido es proporcional a la concentración local de *A* en la solución. Se supondrá también que la concentración de A en la solución de percolación es siempre pequeña y que la resistencia del solido, a la transferencia de materia es despreciable.

Deducir una expresión para la concentración de *A* en la columna en función del tiempo y de la distancia de descenso en la misma.

Solución. De igual forma que para el absorbedor de gases que se ha estudiado en el Ejemplo 22.5 -2, es conveniente considerar las dos fases como continuas y dispuestas colaterahnente, tal como se indica en la Fig. 22.6-2. Se representa también por *a* el área de contacto por unidad de volumen de relleno de la columna. Sin embargo, en este caso, una de las fases esta inmóvil y se establecen condiciones de estado no estacionario. Debido a este comportamiento de estado no estacionario, resultan de poca utilidad los balances macroscópicos de materia en su forma integrada. Se puede utilizar la Ec. 22.1-3 y la suposición de que las disoluciones son diluidas con el fin de establecer que la velocidad de

flujo molar.del disolvente, $\mathcal{W}_B$, es esencialmente constante en toda la longitud dela columna durante el tiempo de operación.

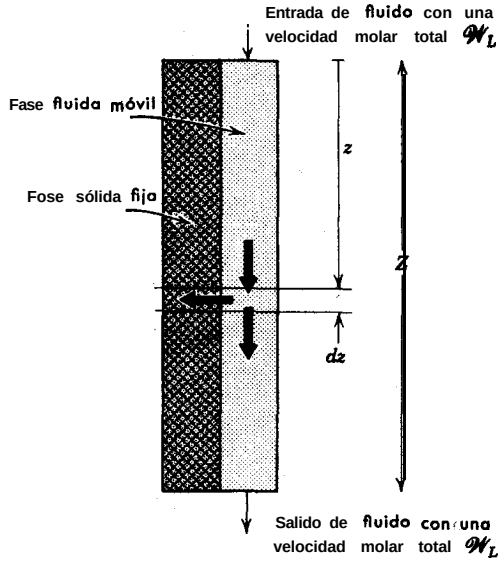


Fig. 22.6-2. Modelo esquemático de un absorhedor de lecho fijo, en el que se representa el elemento diferencial sobre el que se aplica un balance de materia.

A continuación se utiliza la Ec. 22.1-3 en forma diferencial con el fin de expresar las relaciones de continuidad para el componente *A* en cada una de las fases en una sección de la columna de longitud *dz*.

Para el ***sólido*** contenido en esta sección de columna, se puede escribir

$$d\frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial t} = d\mathcal{W}_A^{(m)} \qquad (22.6\text{–}10)$$

o bien

$$(1 - \epsilon)S\,dz\,\frac{\partial c_{As}}{\partial t} = (k_x a)(x_A - x_{A0})S\,dz \qquad (22.6\text{–}11)$$

siendo • = fracción del volumen de la columna ocupado por el liquido.
S = área de la sección transversal de la columna (vacia)
c_{As} = moles de *A* absorbidos por unidad de volumen de fase sólida
x_A = fracción molar global de *A* en la fase' fluida
x_{A0} = fracción molar interfacial de *A* en la fase fluida, suponiendo que está en equiiibrio con c_{As}
k_x = coeficiente de transferencia de materia en la fase fluida, tal como se ha definido en la Ec. 21.1-13.

Obsérvese que al expresar las Ecs. 22.6– 10 y ll se ha despreciado el transporte convectivo de materia a través de la interfase solución-sólido, lo que resulta aceptable cuando x_{A0} es mucho menor que la unidad. Se ha supuesto también que las partículas son pequeñas, de forma que la concentración de la solución que rodea a cualquier partícula determinada es esencialmente constante en la superficie de la misma.

La Ec. 21.1-3, para el *fluido* contenido en el elemento diferencial de columna que estamos considerando, se transforma *en*

$$d\frac{\partial m_A}{\partial t} = -d\mathcal{W}_A + d\mathcal{W}_A^{(m)} \tag{22.612}$$

o bien

$$\epsilon Sc\frac{\partial x_A}{\partial t} = -\mathcal{W}_B\frac{\partial x_A}{\partial z} - S(k_x a)(x_A - x_{A0}) \tag{22.6–13}$$

siendo c la concentración molar total del liquido. La Ec. 22.6-13 se simplifica introduciendo un variable de tiempo modificada

$$t' = t - z\left(\frac{\epsilon Sc}{\mathcal{W}_B}\right) \tag{22.6-14}$$

Como puede verse, para cualquier punto de la columna, t' es 'el tiempo medido a partir del momento en que el «frente» del disolvente de percolación alcanza el punto en cuestión. Introduciendo el valor de t' en la Ec. 22.6 – 13 se llega a

$$\left(\frac{\partial x_A}{\partial z}\right)_{t'} = -\frac{(k_x a)S}{\mathcal{W}_B}(x_A - x_{A0}) \tag{22.6-15}$$

De igual forma, la Ec. 22.6-11 se puede expresar así

$$\left(\frac{\partial c_{As}}{\partial t'}\right)_z = \frac{(k_x a)}{(1-\epsilon)}(x_A - x_{A0}) \tag{22.6–16}$$

Las Ecs. 22.6–15 y 16 son una combinación de las ecuaciones de continuidad para cada una de las fases con la expresión supuesta de la velocidad de transferencia de materia. Estas dos ecuaciones han de resolverse simultáneamente utilizando la distribución de equilibrio en la interfase, $x_{A0} = mc_{As}$, siendo m una constante. Las condiciones límite son

C.L. 1: para $t' = 0$ $c_{As} = 0$ para cualquier $z > 0$ (22.6-17)

C.L. 2: para z=O $x_A = x_{A1}$ para cualquier $t' > 0$ (22.6-18)

Antes de resolver estas ecuaciones es conveniente expresarlas en función de las siguientes variables adimensionales :

$$X = \frac{x_A}{x_{A1}} \tag{22.6-19}$$

$$Y = \frac{mc_{A_0}}{x_{A1}} \tag{22.6-20}$$

$$\zeta = \frac{zS(k_x a)}{\mathcal{D}_{AB}} \tag{22.6-21}$$

$$\tau = \frac{mt'(k_x a)}{1 - \epsilon} \tag{22.6-22}$$

En función de estas variables, las ecuaciones diferenciales y las condiciones límite son

$$\frac{\partial X}{\partial \zeta} = -(X - Y) \tag{22.6-23}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = +(X - Y) \tag{22.6-24}$$

C.L. 1: para $\tau = 0$ $Y = 0$ para cualquier valor de ζ (22.6-25)

C.L. 2: para $\zeta = 0$ $X = 1$ para cualquier valor de τ (22.6-26)

La solución[1] de las Ecs. 22.6-23 a 26 es

$$X = 1 - \int_0^{\zeta} e^{-(\tau+\zeta)} J_0(i\sqrt{4\tau\zeta})\, d\zeta \tag{22.6-27}$$

en la que $J_0(ix)$ es una función de Bessel de orden cero del primer tipo. Esta función se ha representado gráficamente en diversas obras[2]

CUESTIONES PARA DISCUTIR

1. ¿Es verdad que en todos los sistemas $\Sigma_i R_{i,\text{tot}} = 0$?
2. Contrastar F y $F^{(m)}$.
3. ¿Es correcto el balance macroscópico de materia expresado en la Ec. 22.3-1 cuando $\partial\Phi/\partial t$ no es igual a cero?
4. Comparar $Q^{(m)}$ con Q.
5. ¿Cuál es el significado físico $B^{(m)}$ en el balance macroscópico de energía mecánica?
6. En el Ejemplo 22.5-2 se ha utilizado la relación $W_{A\sigma}^{(m)} + W_{A\ell}^{(m)} = 0$. ¿Sería también $Q_g^{(m)} + Q_\ell^{(m)} = 0$?
7. ¿Cómo se podría ampliar el Ejemplo 15.4-3 para el bombeo de una mezcla gaseosa químicamente reactiva?

---

[1] Este resultado fue obtenido por primera vez por A. ANZELIUS, *Z. angew. Math.u. Mech.*, 6, 291-294 (1926) para un problema análogo de transmisión de calor. En el probkma 22.L se indica un método para obtener este resultado. Véase también H. BATEMAN, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover, Nueva York (1944). pp. 123-125.

[2] Véase, por ejemplo, O. A. HOUGEN y K. M. WATSON, *Chemical Process Principles*, Wiley, Nueva York (1947), Primera Edición, Part III, p. 1086. En este caso y/y_0 corresponde a X, $b\tau$ corresponde a τ, y aZ corresponde a ζ.

8. ¿Es conveniente, desde el punto de vista de la máxima producción de B, utilizar la mezcla perfecta que se ha supuesto en el Ejemplo 22.6—1? ¿O, sería preferible operar con flujo de tapón, es decir, sin que se produzca mezcla entre los distintos elementos del fluido al pasar a través del reactor? ¿Sería su respuesta la misma para la reacción

$$A1 + A_2 \xrightarrow{k_2'''} B, \text{ siendo } R_B = k_2''' c_{A1} c_{A2}\,?$$

9. ¿Podría substituirse en el Ejemplo 22.6-2 k_y por K_y con el fin de tener en cuenta la resistencia de la fase sólida. En caso afirmativo, ¿qué dificultades se encontrarían para predecir K_y?

10. Justificar la Ec. 22.6-7.

PROBLEMAS

22.A$_1$ Expansión de una mezcla gaseosa: velocidad de **reacción muy lenta**

Estimarla temperatura y velocidad de la mezcla del gas de agua en el extremo de descarga de la boquilla del Ejemplo 22.5-3. si la velocidad de reacción es muy lenta. Utilizar los siguientesdatos: $\log_{10} K_x = -0{,}15$, $\bar{C}_{pH_2} = 7{,}217$ Kcal Kg-mol^{-1} °K^{-1}, $\bar{C}_{pH_2O} = 9{,}861$, $\bar{C}_{pCO_2}$ = 12,995, $\bar{C}_{pCO} =$ 7,932. ¿La presión a la salida de la boquilla es igual a la presión ambiente?

Respuesta: 920 °K; 526 m seg^{-1}; sí, el flujo en la boquilla es subsónico.

22.B$_1$ Altura de una torre de absorción de relleno[1]

Una torre de relleno del tipo que se. describe en el Ejemplo 22.5—2 se utiliza para separar el 90 % del ciclohexano conte.nido en una mezcla de c.cl >hexano y arre, mediante absorción con un aceite ligero no volátil. La corriente gaseosa entra por la parte inferior de la torre con una velocidad volumétrica de 10,28 m^3 min^{-1}, a 30 °C y 1,05 atm. Su contenido en ciclohexano es del 1 % en volumen. El aceite entra por la parte superior de la torre a razón de 9.07 Kg-mol hr^{-1}, también a 30 °C, y contiene 0,3 moles por ciento de ciclohexano. La presión de vapor del cíclohexano a 30 °C es de 121 mm Hg, y puede admitirse que sus soluciones con el aceite siguen la ley de RAOULT.

a. Construir la línea de operación para esta columna.

b. Construir una curva de equilibrio que comprenda el intervalo que se considera en este problema. Supóngase que la operación es isotérmica e isobárica.

c. Determinar las condiciones interfaciales en cada uno de los extremos de la columna.

d. Determinarla altura de torre necesaria utilizando la Ec. 22.5 -24, si $k_x a \simeq 11{,}3$ mol hr^{-1} m^{-3}, $k_y a$ = 501.4 mol hr^{-1} m-s, y el brea de la sección transversal de la torre es S = 0,186 m^2

e. Repetir el apartado (*d*), utilizando la Ec. 22.5-25.

Respuesta: d. 18,9 m. *e.* 18,3 m .

22.C$_2$ Expansión de una mezcla gaseosa: velocidad de reacción muy rápida

Estimar la temperatura y velocidad de la mezcla del gas de agua en el extremo de descarga de la boquilla del Ejemplo 225-3, si la velocidad de la reacción puede considerarse infinita. Utilizar ademas de los datos del Problema 22.A los siguientes: a 900 °K, log K_x = — 0,34; $\bar{H}_{H_2}$ = + 6340 cal g-mol^{-1}; $\bar{H}_{H_2O(g)} =$ — 49.378; $\bar{H}_{CO}$ = — 16.636; $\bar{H}_{CO_2} =$ — 83242. Despreciar, para mayor sencillez, la variación del calor específico con la temperatura, y admitir que entre 900 y 1000 °K log K_x varía linealmente con la temperatura. ge recomienda el siguiente procedimiento simplificado:

---

[1] En este problema se sigue un ejemplo análogo presentado por R. E. TREYBAL, *Mass-Transfer Operations*, McGraw-Hill, Nueva York (1955), Capítulo 8.

a. Se prevé que T_2 ha de ser mayor que para velocidades de reacción lentas, y, por consiguiente, será superior a 920 °K. (Véase el Problema 22.A). Demostrar que para el posible intervalo de temperatura en este caso $\bar{H}$ varía practicamente de forma lineal con la temperatura de acuerdo con la expresión $(d\bar{H}/dT)_{\text{med}} \doteq 12{,}40$ cal g-mol^{-1} °K^{-1}.

b. Substituir el resultado anterior en la Ec. 22.5 -41 para comprobar que $T_2 \doteq 937$ °K.

c. Calcular $\bar{H}_1$ y $\bar{H}_2$ y demostrar, mediante la Ec. 22.5-29, que v_2 = 533 m seg^{-1}.

22.D$_2$ Eliminación de un material residual inestable

Una corriente fluida de velocidad volumétrica de flujo constante Q se vierte en un río. La corriente contiene un material residual *A* de concentración c_{A0}, que es inestable y se descompone con una velocidad proporcional a la concentración, de acuerdo con la expresión $-R_A = k_1''' c_A$. Con el fin de reducir la contaminación se ha decidido hacer pasar el fluido a través de un tanque de retención *V* antes de verterlo en el río. En el instante cero el fluido entra en el tanque vacío, que puede considerarse que está perfectamente agitado, y no sale de él hasta que el tanque esta totalmente lleno.

Deducir una expresión para la concentración de *A* en el tanque, y en la corriente que sale de Cl, en función del tiempo, por analogía con el Problema 15.M.

22.E$_2$ Reacción irreversible de primer orden en un reactor continuo

Un reactor de volumen *V*, perfectamente agitado, está en el momento inicial totalmente lleno de una solución del soluto *A* en el disolvente *S* con una concentración c_{A0}. En el instante $t = 0$ se introduce una solución de *A* en *S* idéntica a la anterior con una velocidad volumétrica de flujo constante *Q*. Al mismo tiempo se introduce una pequeña corriente constante de una solución de catalizador, que da lugar a que *A* desaparezca de acuerdo con una reacción irreversible de primer orden cuya constante de velocidad es k_1''' seg^{-1}. La constante de velocidad puede considerarse independiente de la composición y del tiempo. Demostrar que la concentración de A en el reactor en un instante cualquiera viene dada por

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \left(1 - \frac{Q}{Q + Vk_1'''}\right) \exp\left[-\left(\frac{Q + Vk_1'''}{V}\right)t\right] + \left(\frac{Q}{Q + Vk_1'''}\right) \qquad \text{(22.E-1)}$$

22.F$_2$ Potenciales de concentración medios efectivos en un absorbedor de gases

Considerar una torre de absorción de gases del tipo que se ha indicado en el Ejemplo 22.5 -2. Suponer que la concentración del soluto es siempre baja y que tanto la línea de operación como la de equilibrio son prácticamente rectas. En estas condiciones $k_x a$ y $k_y a$ pueden considerarse constantes.

a. Demostrar que $(Y_A - Y_{Ae})$ varía linealmente con Y_A. Téngase en cuenta que Y_A es la relación molar global de *A* en la fase gaseosa e Y_{Ae} es la relación molar de la fase gaseosa que está en equilibrio con el líquido de composición global X_A. (Véase Fig. 21.3-2).

b. Repetir el apartado (a) para $(Y_A - Y_{A0})$.

c. Utilizar los resultados de los apartados *(a)* y *(b)* para demostrar que

$$\mathcal{W}_{A0}^{(m)} = (k_y a) ZS (Y_{A0} - Y_A)_{\ln} \qquad \text{(22.F-1)}$$

$$\mathcal{W}_{A0}^{(m)} = (K_y a) ZS (Y_{Ae} - Y_A)_{\ln} \qquad \text{(22.F-2)}$$

El coeficiente global de transferencia de materia K_y viene definido por la Fc. 21.3-6. Obsérvese que esta parte del problema puede resolverse fácilmente por analogía con el Ejemplo 15.4-2.

22.G$_2$ Efecto de la concentración inicial de soluto sobre la operación en estado no estacionario de una columna de adsorción

Considerar una columna de adsorción del tipo descrito en el Ejemplo 22.6-2. Supónganse las mismas condiciones de operación excepto que en el instante $t = 0$ el sólido contiene una cantidad de soluto uniformemente distribuida y que su concentración inicial es c_{Asi}. Se puedèadmitir también que el líquido de la columna está en equilibrio con la fase sólida y que por lo tanto el contenido de soluto corresponde a la fracción molar de equilibrio $x_{Ai} = x_{Ai}(c_{Asi})$.

Expresar las Ecs. 22.6-15 a 18 y la distribución de equilibrio en la interfase en función de las nuevas variables $x'_A = x_A - x_{Ai}$ y $c'_{As} = c_{As} - c_{Asi}$. Demostrar que las Ecs. 22.6 -23 a 26 siguen siendo válidas si x'_A y c'_{As} substituyen a x_A y c_{As} en las definiciones de Xe *Y*.

22.H$_3$ Reacción química irreversible de segundo orden en un tanque agitado

Considerar un sistema análogo al descrito en el Problema **22.E,** excepto que el soluto *A* desaparece de acuerdo con una reacción química de segundo orden; es decir, $-R_{A,\text{tot}} = k_2''' V c_A^2$. Deducir una expresión de c_A en función del tiempo según el procedimiento siguiente:

a. Expresar el balance macroscópico de materia para el tanque con el fin de obtener una ecuación diferencial que describa c_A en función del tiempo.

b. Expresar esta ecuación diferencial, así como la condición inicial que se requiere para su solución, en función de

$$u = c_A + \frac{Q}{2kV}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4k_2''' V c_{A0}}{Q}}\right] \qquad \text{(22.H-1)}$$

La'ecuación diferencial no lineal que se obtiene de esta forma es una «ecuación diferencial de Bernoulli».

c. Tomar $v = u^{-1}$ e integrar las expresiones que resultan. Pasar la ecuación integrada a la variable original c_A con el fin de obtener la solución que se busca.

22.1, Puesta en marcha de un reactor químico

a. Integrar la Ec. 22.6-5 para unas determinadas condiciones iniciales con el fin de demostrar que la Ec. 22.6-8 describe correctamente $\mathcal{M}_B$ en función del tiempo.

b. Demostrar que en la Ec. 22.6-9 s_+ y s_- son siempre reales y negativos. Solución que se sugiere: demostrar que

$$(k_{1A}''' + k_{1B}''' + k_{1C}''')^2 - 4k_{1B}'''k_{1C}''' = (k_{1A}''' - k_{1B}''' + k_{1C}''')^2 + 4k_{1A}'''k_{1B}''' \qquad \text{(22.I-1)}$$

c. Obtener expresiones de $\mathcal{M}_A$ y $\mathcal{M}_C$ en función del tiempo.

22.J$_3$ Analogía entre la operación en estado no estacionario de mm columna de adsorción y un cambiador de calor de corrientes cruzadas*

En la Fig. 22.5 se representa un cambiador de calor de corrientes cruzadas. En dicho cambiador las dos corrientes fluidas circulan formando entre si un ángulo recto, y la densidad de flujo de-calor paralelo a la pared es despreciable. El intercambio de calor es, en este caso, evidentemente menor que para un cambiador de calor en contracorriente de la misma superficie e igual coeficiente de transmisión de calor en idénticas condiciones. Para U_{loc} constante, el flujo de calor en estos cambiadores puede expresarse así:

$$Q = U_{\text{loc}} A \, \Delta T_{\text{ln}} Y \qquad \text{(22.J-1)}$$

---

2 Véase W. NUSSELT, *Tech. Math. Therm., 1, 417* (1930); D. M. SMITH, *Engineering*, 138, 479 (1934).

En esta expresión, Q es la velocidad total de transmisión de calor, A es el área de la superficie de transmisión de calor, e $(\Delta T)_{\ln}$ es la media logarítmica de $(T_{h1} - T_{c1})$ y $(T_{h2} - T_{c2})$, definidas en la forma que se indica en la figura adjunta. (Obsérvese que T_{h2} y T_{c2} son las temperaturas medias de flujo de las dos corrientes de salida). Por lo tanto, Υ se puede considerar como la relación del calor transmitido para el caso de corrientes cruzadas y el que se transmitiría en contracorriente.

Utilizar la Ec. 22.6-27 con el fin de obtener una expresión de Ten función de las velocidades de las corrientes, las propiedades físicas, A, y U_{loc}. Expresar el resultado en función de integrales definidas, y suponer que $\hat{C}_{ph}$, $\hat{C}_{pc}$, y U_{loc}, son constantes.

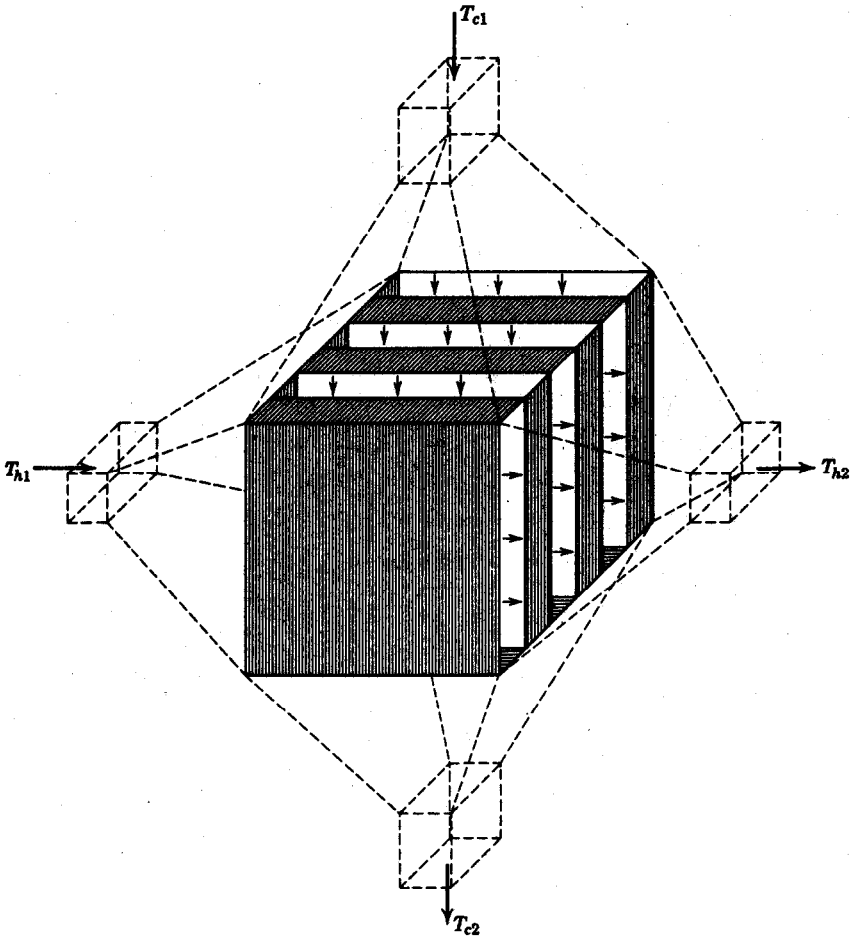


Fig. 22.J. **Representación esquemática** de un cambiador de corrientes cruzadas tipo «sandwich».

22.K$_4$ Mezcla imperfecta en un tanque agitado

La capacidad de un tanque agitado es de V m^3. Para un tiempo anterior a $t = 0$ la concentración de sal en el interior del tanque es c_i kg/m^3. A partir del instante $t = 0$ se introduce agua con una

velocidad Q m^3/min. y se retira por el fondo del tanque salmuera con la misma velocidad. Se supone que la variación de la densidad del fluido con el proceso de dilución es despreciable. ¿Qué tiempo se. precisa para que la concentración se reduzca hasta un cierto valor final c_f?

Considérese que la mezcla es incompleta, de forma que la concentración media de la sal contenida en el tanque c, no es igual a la concentración de salida c_0. Supóngase que c y c_0 pueden relacionarse mediante la siguiente función sencilla que contiene un único parámetro b, que depende de la velocidad del agitador y de la geometría del aparato:

$$\frac{c_0 - c}{c_f - c} = \exp -bt \qquad (22.K\text{–}1)$$

22.L_4 Operación en estado no estacionario de una columna de relleno

Demostrar que la Ec. 22.6-27 es una solución de las Ecs. 22.6-23 a 26. Se recomienda el siguiente método:

a. Tomar el transformador de Laplace de las Ecs. 22.6-23 y 24 con respecto a τ. Eliminar el transformador de Y de las expresiones que resultan; demostrar que el transformador de X, para las condiciones límite indicadas, puede expresarse así:

$$\bar{X} = \frac{1}{p} e^{-[\zeta/(p+1)]\zeta} \qquad (22.L\text{–}1)$$

siendo $\bar{X}$ el transformador de Laplace de X sin multiplicar por p.

b. Escribir esta expresión en la forma

$$\bar{X} = \frac{1}{p} - \int_0^\zeta e^{-\zeta}\left(\frac{1}{p+1}\right) e^{[\zeta/(p+1)]}\, d\zeta \qquad (22.L\text{–}2)$$

Invertir esta expresión con el fin de obtener la Ec. 22.6-27 valiéndose de la identidad

$$\mathcal{L}\{e^{a\tau}F(\tau)\} = \bar{F}(p = a) \qquad (22.G3)$$

siendo $\mathcal{L}\{F(\tau)\} = \bar{F}(p)$.

22.M_4 Efectos de la distribución inicial no uniforme de soluto y de la concentración variable de la alimentación, sobre el comportamiento de estado no estacionario de una columna de adsorción: aplicación del principio de superposición[3]

Considerar una columna de adsorción análoga a la descrita en el Ejemplo 22.6-2, excepto que las condiciones inicial y limite son las siguientes:

C.I.:	para $\tau = 0$	$Y = Y_0(\zeta)$	$\zeta > 0$	(22.M–1)
C.L.:	para $\zeta = 0$	$x = X_0(\tau)$	$\tau > 0$	(22.M–2)

Supóngase que en el instante cero las fases solida y líquida están localmente en equilibrio y que la difusividad en la dirección del eje de la columna es cero. Se considera que la distribución de concentración del Ejemplo 22.6-2, Ec. 22.6-27, esta representada por $X^0(\zeta, \tau)$.

---

[3] Véase, por ejemplo, H. S. CARSLAW y J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press (1959), segunda edición, pp. 30-32.

a. Demostrar que la distribución de concentración en este problema puede representarse por

$$X(\zeta, \tau) = U(\zeta, \tau) + V(\zeta, \tau) \qquad \text{(22.M-3)}$$

siendo V y V variables de concentración que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales, y limite:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta \partial \tau} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right) \qquad \text{(22.M-4)}$$

C.I. para $\tau = 0$ $\quad U = Y_0(\zeta)$ (22.M -5)

C.L. para $\zeta = 0$ $\quad U = 0$ (22.M−6)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \partial \tau} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\right) \qquad \text{(22.M-7)}$$

C.I. para $\tau = 0$ $\quad v = o$ (22.M−8)

C.L. para $\zeta = 0$ $\quad v = X_0(\tau)$ (22.M−9)

b. Demostrar cómo se pueden expresar Uy *Ven* función de X° con el fin de obtener la expresión general

$$X(\zeta, \tau) = \int_0^\tau X_0(p) \frac{\partial}{\partial \tau} X^\circ(\zeta, \tau - p)\, dp - \int_0^\zeta Y_0(\zeta - \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} X^\circ(\lambda, \tau)\, d\lambda \qquad \text{(22.M-10)}$$

Téngase en cuenta que este resultado no está limitado para las simples suposiciones que se han hecho en el Ejemplo 22.6-2, y solamente es correcto cuando las ecuaciones diferenciales que describen $X(\zeta, \tau)$ e $Y(\zeta, \tau)$ son lineales con respecto a Xe Y, y el coeficiente de distribución deoquilibrio en la interfase m es constante.

c. Utilizar el resultado del apartado *(b)* para describir la composición de salida en una columna de longitud L para las siguientes condiciones que se presentan con frecuencia en la práctica:

C.I. para $t = 0$ $\quad c_A = c_{A0}$ una constante $(0 < z < L)$ (22.M -11)

C.L. para $z = 0$ $\quad x_A = x_{A1}$ una constante $(0 < t < t_0)$ (22.M−12)

$x_A = 0, \quad (t > t_0)$ (22.M−13)

Expresar el resultado en una forma análoga a la Ec. 22.6-27. ¿Cuál es el significado físico de este resultado?

22.N_4 Comportamiento no estacionario de N reactores químicos en serie[4]

Considerar N reactores químicos idénticos de volumen V conectados en serie, todos ellos perfectamente agitados. Cada uno de los tanques está inicialmente lleno con el disolvente S puro. En el instante cero se introduce en el primer tanque una solución de A en S de concentración constante c,(O) y con una velocidad volumétrica de flujo constante Q. Esta solución contiene también

[4] Este problema esta tomado de A. ACRIVOS y N. R. AMUNDSON, *Znd. Eng. Chem., 47,* 1533-1541 (1955).

una pequeña cantidad de catalizador disuelto, introducido inmediatamente antes de entrar en el tanque, que da lugar a que se produzcan las siguientes reacciones de primer orden:

$$A \underset{k'''_{1BA}}{\overset{k'''_{1AB}}{\rightleftharpoons}} B \underset{k'''_{1CB}}{\overset{k'''_{1BC}}{\rightleftharpoons}} C \qquad \text{(22.N-1)}$$

Se supone que estas constantes de velocidad son constantes en todo el sistema. Sea $h = Q/V$ el inverso del «tiempo efectivo de retención» en cada tanque. Se desea obtener una expresión para $c_i(n)$, la concentración del componente i en el tanque n al cabo de un tiempo cualquiera t.

22.O_4 Puesta en marcha de un reactor químico

Repetir el Ejemplo 22.6-1 tomando los transformadores de Laplace de las Ecs. 22.6-2 y 3.

EPÍLOGO

AI llegar al final del texto, el lector se habrá dado cuenta del papel fundamental que juegan las ecuaciones de ***variación*** desarrolladas en los Capítulos 3, 10 y 18. Estas ecuaciones constituyen el punto de partida para el cálculo de perfiles, análisis dimermsional, correlación de velocidades de transferencia y deducción de balances macroscópicos. En un determinado problema ingenieril pueden ser necesarios uno o varios de estos resultados.

Dada la naturaleza introductoria del texto, huelga decir que no se ha intentado entrar en detalle de técnicas o aplicaciones especiales. A modo de conclusión, estimamos conveniente citar algunos temas que caen fuera del objeto de este libro.

Indudablemente nos hemos limitado en gran parte a las soluciones de las ecuaciones de variación que se pueden obtener por procedimientos analíticos sencillos. Es de esperar, sin embargo, que los ***métodos numéricos para la resolución de problemas de fendmenos de transporte*** serán cada vez más utilizados.

Ordinariamente se consideran en este libro los aspectos continuos del tema, debido a que este punto de vista es de aplicación más inmediata para los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, es preciso tener en cuenta que la ***teoría molecular de los fenómenos de transporte*** complementa de diversas formas a la teoría continua: (a) la teoría molecular puede utilizarse para deducir las ecuaciones de variación; (*b*) la teoría molecular permite obtener expresiones de las propiedades de transporte en función de fuerzas intermolecúlares, y (c) la consideración molecular es esencial para el conocimiento de los fenómenos en gases a ultra-baja densidad.

Se ha incluido alguna materia sobre ***fenómenos de transporte turbulento,*** debido a la importancia práctica de este tema, a pesar de que su estado actual de conocimiento es poco satisfactorio. Confiamos en que esta introducción estimule el interés por este tema cuya bibliografía está creciendo rápidamente.

A su ***vez,*** la ***teoría de capa límite de losfenómenos de transporte*** se ha desarrollado mucho más allá del alcance de este libro introductorio. El rápido crecimiento de este tema se inició mediante estudios aerodinámicos, pero recientemente ha encontrado numerosas aplicaciones en otros campos, **tales** como procesos de separación y cinética química aplicada.

Mucha importancia está adquiriendo el estudio de los ***fenómenos de transporte en flujo no newtoniano.*** Numerosas industrias químicas se enfrentan con problemas no newtonianos y hasta ahora los trabajos de diseño se han basado en **procedi-**

mientos empíricos. Confiamos en que alguno de los problemas no newtonianos que se presentan en este libro contribuirá a aumentar el interés en los estudios fundamentales de reología.

Interesantes progresos se han realizado sobre el tema de los ***fenómenos de transporte en flujo compresible,*** al que hemos dedicado menos atención de la que se merece. Este tema comprende ondas de choque, propagación del sonido; supersónica y aerotermoquímica. Los lectores interesados en estas materias encontrarán que, generalmente, se toman formas especiales de las ecuaciones de variación como punto de partida para su estudio.

Generalmente en los problemas discutidos en los que intervienen ***fenómenos de transpqrte en sistemas químicos reaccionantes*** se ha considerado, para mayor sencillez, la cinética química en forma más bien idealizada. Es evidente que para muchos problemas de combustión, detonación y propagación de la llama, es preciso disponer de expresiones más realistas para las velocidades de reacción. Por otra parte, se necesita conocer también mucho mejor diversas propiedades físicas de fluidos conteniendo iones y radicales libres, especialmente a temperaturas elevadas.

Ocurre también que en este libro nos hemos restringido casi exclusivamente a sistemas en los que los campos eléctricos y magnéticos carecen de importancia. Un tema de gran interés actual es el de los ***fenómenos de transporte en medios conductores de la electricidad.*** Para estos problemas es preciso modificar las ecuaciones de variación con el fin de incluir los procesos electromagnéticos en la ecuación de movimiento, los términos de energía electromagnética en la ecuación de energía y una ecuación adicional de variación para la carga. Por otra parte, es preciso utilizar también las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. El campo formado por la unión de estas dos materias se denomina magnetohidrodinámica.

Se incluyen en el texto numerosos ejemplos y problemas que sirven para ilustrar sobre la ***aplicación de los fenómenos de transporte a la ingeniería.*** La mayor parte de ellos son ejemplos sencillos en los que intervienen situaciones idealizadas. Es de esperar que en los próximos años se extenderá la aplicación de los principios de los fenómenos de transporte a problemas más inquietantes.

R. B. B.
W. E. S.
E. N. L.

APÉNDICE A

RESUMEN DE NOTACIÓN VECTORIAL Y TENSORIAL

Las magnitudes que intervienen en la teoría de los fenómenos de transporte pertenecen a las siguientes categorías: ***escalares,*** como temperatura, volumen y tiempo; ***rectores,*** como velocidad, cantidad de movimiento, aceleración y fuerza; y tensores de segundo orden, como el tensor de esfuerzo cortante o de densidad de flujo de cantidad de movimiento. Estas magnitudes se representan mediante la siguiente notación :

s = escalar (en cursiva)
v = vector (en negritas)
τ = tensor (en negritas griegas)

La multiplicación de vectores y tensores puede ser de diversos tipos, utilizándose distintos signos de multiplicación para representar estas operaciones: el «punto simple» ., el «doble punto» :, y el «aspa» ×. Los paréntesis que encierra& estas multiplicaciones especiales indican el tipo de magnitud que se produce mediante la multiplicación:

( ) = escalar
[ ] = vector
{ } = tensor

El tipo de paréntesis no tiene un significado especial si la operación que Comprende es una adición o substracción. Según esto $(v \cdot w)$ y $(\sigma : \tau)$ son escalares, $[v \times w]$ y $[\tau \cdot v]$ son vectores, y $\{\sigma \cdot \tau\}$ es un tensor. Por otra parte $(v - w)$ puede escribirse [v — w] o {v — w} según convenga. En realidad, los escalares pueden considerarse como tensores de orden cero, y los vectores como tensores de primer orden. Los signos de multiplicación pueden interpretarse de esta formal:

---

[1] Esta interpretación está de acuerdo con las definiciones de P. M. MORSE y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, Nueva York (1953), capítulo 1. En este libro se definen diversas operaciones adicionales, en algunas de las cuales intervienen tensores de cuarto orden. El lector quedar6 maravillado de las representaciones estereoscópicas que se utilizan.

Signo de multiplicación	Orden del resultado
Ninguno	Σ
$\times$	$\Sigma - 2$
$\cdot$	$\Sigma - 2$
:	$\Sigma - 4$

donde Σ representa la suma de los órdenes de las magnitudes que se multiplican. Por ejemplo, $s\tau$ es de orden 0 + 2 = 2, el orden de vw es 1 + 1 = 2, el de $[v \times w]$ es 1 + 1 - 1 = 1, el de $(\sigma : \tau)$ es 2 + 2 − 4 = 0, y el de $\{\sigma \cdot \tau\}$ es 2 + 2 − 2 = 2.

Pueden utilizarse las leyes del álgebra de escalares para aclarar tres propiedades que intervendrán posteriormente en las operaciones vectoriales:

a. En la multiplicación de dos escalares, r y s, carece de importancia el orden de multiplicación, cumpliéndose la ley ***conmutativa:*** $rs = sr$.

b. En la multiplicación sucesiva de tres escalares, q, r, s, no importa el orden en que se efectúen las multiplicaciones, de forma que se cumple la ley ***asociativa:*** $(qr)s = q(rs)$.

c. En la multiplicación de un escalar s por una suma de escalares, p, q y r, es indistinto que se efectúe primero la suma o la multiplicación, de forma que se cumple la ley ***distributiva:*** $s(p + q + r) = sp + sq + sr$.

En general, estas leyes no son válidas para las operaciones análogas con vectores y tensores que se describen más adelante.

§ A.l. LAS OPERACIONES VECTORIALES DESDE UN PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO

En los cursos elementales de física se inicia el estudio de vectores desde un punto de vista geométrico. En esta sección se amplía este método con el fin de incluir las operaciones de multiplicación de vectores. En § A.2 se sigue un tratamiento analítico paralelo.

Definición de un vector y su valor

Un vector v se define como una magnitud de un cierto valor y dirección. El valor numérico (módulo) del vector se designa por $|v|$ o simplemente por la consiguiente letra en cursiva v. Dos vectores v y w son iguales cuando lo son sus módulos y están dirigidos en la misma dirección; no necesitan ser colineales o tener el mismo punto de origen. Si v y w tienen el mismo módulo pero son de direcciones opuestas, $v = -w$.

Adición y substracción de vectores

La adición de dos vectores puede efectuarse mediante la conocida construcción del paralelogramo, tal como se indica en la Fig. A. 1 − 1. La adición de vectores cumple las siguientes leyes:

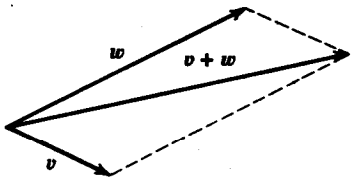


Fig. A.l — 1. Construcción del paralelogramo para la suma de dos vectores.

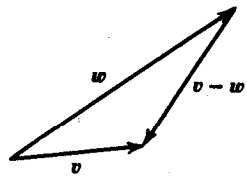


Fig. A.1 — 2. Construcción para la resta de dos vectores.

(conmutativa) $$(v + w) = (w + v) \qquad \textbf{(A.1—1)}$$

(asociativa) $$(v + w) + u = v + (w + u) \qquad \textbf{(A.1-2)}$$

La substracción de vectores se realiza cambiando el signo de uno de ellos y sumando: así, $v - w = v + (-w)$. La construcción geométrica para este caso se indica en la Fig. A. 1-2.

Multiplicación de un vector por un escalar

Al multiplicar un vector por un escalar se modifica su módulo pero no su dirección. Se cumplen las siguientes leyes:

(conmutativa) $$su = vs \qquad \text{(A.l-3)}$$

(asociativa) $$r(sv) = (rs)v \qquad \text{(A. 1-4)}$$

(distributiva) $$(q + r + s)v = qv + rv + sv \qquad \textbf{(A.1-5)}$$

Producto escalar (o producto de punto) de dos vectores

El producto escalar de dos vectores v y w es una magnitud escalar definida por

$$(v \cdot \quad \cos \phi_{vw} \qquad \text{(A. 1—6)}$$

siendo ϕ_{vw} el ángulo (menor de 180°) que forman entre si los vectores v y w. Por consiguiente, el producto escalar es igual al módulo de w multiplicado por la proyección de v sobre w, o viceversa. (Véase Fig. A.1—3.) Obsérvese que el producto escalar de un vector por sí mismo es exactamente el cuadrado del módulo del vector:

$$(v \cdot v) = |v|^2 = v^2 \qquad \textbf{(A.1—7)}$$

Las reglas por las que se rigen los productos escalares son las siguientes:

(conmutativa) $$\quad \cdot v) \quad (v \cdot \qquad \text{(A . l - 8)}$$

(no asociativa) $$\quad \cdot v)w \neq u(v \cdot \qquad \text{(A.l-9)}$$

(distributiva) $$(u \cdot \{v \quad w\}) \quad (u \cdot v) \quad (u \cdot w) \qquad \textbf{(A.1-10)}$$

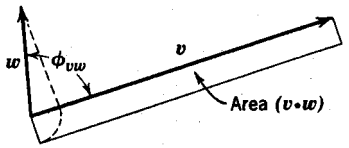


Fig. **A.1–3.** Producto escalar de dos vectores.

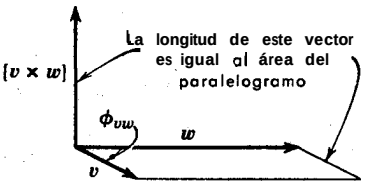


Fig. **A.1–4.** Producto **vectorial** de dos vectores.

Producto vectorial (o producto de aspa) de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores v y w es un vector definido por

$$[v \times w] = \{uw \text{ sen } \phi_{vw}\} n_{vw} \qquad (A.1-11)$$

siendo n_{vw} un vector de longitud unidad (un «vector unitario») normal al plano en que están contenidos v y w y cuyo sentido es el de avance de un tornillo de rosca a la derecha cuando se hace girar desde v hacia w por el camino más corto. En la Fig. A.1–4 se representa el producto vectorial. El módulo del producto es el área del paralelogramo definido por los vectores v y w. De la definición de producto vectorial se deduce que

$$[v \times v] = 0 \qquad (A.1-12)$$

Las leyes que rigen la operación del producto vectorial pueden resumirse así:

(no conmutativa) $$[v \times w] = -[w \times v] \qquad (A.1-13)$$

(no asociativa) $$[u \times [v \times w]] \neq [[u \times v] \times w] \qquad (A.1-14)$$

(distributiva) $$[\{u + v\} \times w] = [u \times w] + [v \times w] \qquad (A.1-15)$$

Productos múltiples de vectores

Algo más complicados son los productos múltiples formados por combinaciones de los procesos de multiplicación descritos anteriormente:

(a) rsv (b) $s(v \cdot w)$ (c) $s[v \times w]$
(d) $(u \cdot [v \times w])$ (e) $[u \times [v \times w]]$ (f) $([u \times v] \cdot [w \times z])$
(g) $[[u \times v] \times [w \times z]]$

Las interpretaciones geométricas de los tres primeros son inmediatas. Se puede demostrar fácilmente que $(u \cdot [v \times w])$ representa el volumen de un paralelepípedo definido por los vectores u, v, y w.

§ A.2 LAS OPERACIONES VECTORIALES DESDE UN PUNTO DE VISTA ANALÍTICO

En esta sección se tratan analíticamente cada una de las materias que se- han considerado desde el punto de vista geométrico en § A.1. La discusión está restringida para coordenadas rectangulares, designando por 1, 2, 3, los ejes correspondientes a la notación usual x, y, z.

Muchas fórmulas pueden expresarse et una forma más compacta en función de la ***delta de Kronecker*** δ_{ij} *y* el ***tensor, alternante unidad*** ϵ_{ijk}, que se definen de esta f o r m a :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1 & \text{si } i = j \quad (A.2-1) \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \quad (A.2-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk} = +1 & \text{si } ijk = 123,\ 231 \text{ 6 } 312 \quad (A.2-3) \\ \epsilon_{ijk} = -1 & \text{si } ijk = 321,\ 132 \text{ ó } 213 \quad (A.2-4) \\ 0 & \text{si dos índices cualesquiera son iguales} \quad (A.2-5) \end{cases}$$

Diversas relaciones que contienen estas magnitudes resultan útiles para demostrar algunas identidades vectoriales:

$$\Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{hjk} = 2\delta_{ih} \quad (A.2-6)$$

$$\Sigma_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (A.2-7)$$

Obsérvese que un determinante de tres por tres puede expresarse en función de ϵ_{ijk}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (A.2-8)$$

De esta forma, la magnitud ϵ_{ijk} selecciona los términos necesarios que intervienen en el determinante y proporciona el signo adecuado a cada término.

Definición de un vector y su valor: los vectores unitarios

Un vector v puede describirse perfectamente mediante los valores. de sus proyecciones v_1, v_2, v_3, sobre los ejes coordenados 1, 2, 3. (Véase la Fig. A.2—1.) Por consiguiente, un vector puede representarse analíticamente de la siguiente forma:

$$v = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} \delta_i v_i \quad (A.2-9)$$

siendo δ_1, δ_2, δ_3, los «vectores unitarios» (es decir, vectores de longitud unidad) en la dirección[1,2] de los ejes 1, 2, 3. Toda la discusión está restringida para el caso de ejes coordenados ortogonales.

El módulo de un vector viene dado por

$$|v| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\Sigma_i v_i^2} \tag{A.2-10}$$

Los vectores v y w son iguales si $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, $v_3 = w_3$. También $v = -$ w si $v_1 = -w_1$, etc.

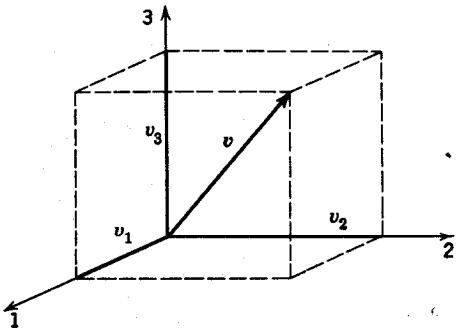


Fig. **A.2–1.** Proyecciones de un vector sobre los ejes coordenados 1, 2 y 3.

Los vectores unitarios que acabamos de introducir poseen las siguientes propiedades que utilizaremos más adelante :

$$(\delta_1 \cdot \delta_1) = (\delta_2 \cdot \delta_2) = (\delta_3 \cdot \delta_3) = 1 \tag{A.2-11}$$

$$(\delta_1 \cdot \delta_2) = (\delta_2 \cdot \delta_3) = (\delta_3 \cdot \delta_1) = 0 \tag{A.2-12}$$

$$[\delta_1 \times \delta_1] = [\delta_2 \times \delta_2] = [\delta_3 \times \delta_3] = 0 \tag{A.2-13}$$

$$[\delta_1 \times \delta_2] = \delta_3 \quad [\delta_2 \times \delta_3] = \delta_1 \quad [\delta_3 \times \delta_1] = \delta_2 \tag{A.2-14}$$

$$[\delta_2 \times \delta_1] = -\delta_3 \quad [\delta_3 \times \delta_2] = -\delta_1 \quad [\delta_1 \times \delta_3] = -\delta_2 \tag{A.2-15}$$

---

1 En la mayor parte de los libros elementales de texto los vectores unitarios se representan por i, j, k. Obsérvese que en este caso hemos violado nuestra regla de notación al utilizar un símbolo en negritas griegas para representar un vector. Hemos hecho esto debido a que los componentes de estos vectores están dados por la delta de Kronecker. Es decir, que el componente de δ_1 en la dirección-1 es δ_{11} o la unidad; el componente de δ_1 en la dirección-2 es δ_{12} o cero.

2 No se discuten aquí los vectores *covariantes y contravariantes;* una excelente introducción a este tema puede verse en MORSE y FESHBACH, op. *cit.*, pp. 30-31. Para una teoría más general véase A. J. McCONNELL, *Applications of Tensor Analysis*, Dover, Nueva York (1957).

Estas relaciones se deducen de las definiciones geométricas de los productos de punto y aspa que se han expuesto en § A.l, y pueden resumirse así:

$$(\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j) = \delta_{ij} \tag{A.2–16}$$

$$[\boldsymbol{\delta}_i \times \boldsymbol{\delta}_j] = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\boldsymbol{\delta}_k \tag{A.2–17}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker y ϵ_{ijk} el tensor alternante unidad que se han definido en la introducción de esta sección. Estas dos relaciones permiten desarrollar expresiones analíticas para todas las operaciones ordinarias de «punto» y «aspa». En lo que queda de esta sección,, y en la próxima, se separan todos los vectores en sus componentes de acuerdo con la Ec. A.2—9 y se aplican después las Ecs. A.2—16 y 17.

Adición y substracción' de vectores

La adición o substracción de los vectores v y w puede expresarse en función de 1 os componentes :

$$\boldsymbol{v} + \mathrm{w} = \Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i v_i + \Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i w_i = \Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i (v_i + w_i) \tag{A.2–18}$$

Geométricamente, esto corresponde a sumar las proyecciones de v y w sobre cada uno de los ejes y construir después un vector con estos nuevos componentes. De la misma forma pueden sumarse tres o más vectores.

Multiplicación de un vector por un escalar

La multiplicación de un vector por un escalar se efectúa multiplicando cada uno de los componentes del vector por el escalar:

$$s\boldsymbol{v} = s\{\Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i v_i\} = \Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i \{s v_i\} \tag{A.2–19}$$

Producto escalar (o producto de punto) de dos vectores

El producto escalar de dos vectores v y w se obtiene expresando los vectores en función de los componentes, de acuerdo con la Ec. A.2—9, y efectuando las operaciones del producto escalar con los vectores unitarios mediante la Ec. A.2—16

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) &= (\{\Sigma_i \boldsymbol{\delta}_i v_i\} \cdot \{\Sigma_j \boldsymbol{\delta}_j w_j\}) \\ &= \Sigma_i \Sigma_j (\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j) v_i w_j \\ &= \Sigma_i \Sigma_j \delta_{ij} v_i w_j \\ &= \Sigma_i v_i w_i \end{aligned} \tag{A.2–20}$$

Por lo tanto, el producto escalar de dos vectores se obtiene sumando los productos de los componentes correspondientes de los dos vectores.

Producto vectorial (o producto de aspa) de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores v y w se efectúa utilizando las Ecs. A.2—9 y 17:

$$\begin{aligned}[v \times w] &= [\{\Sigma_j \delta_j v_j\} \times \{\Sigma_k \delta_k w_k\}] \\ &= \Sigma_j \Sigma_k [\delta_j \times \delta_k] v_j w_k \\ &= \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} \delta_i v_j w_k \\ &= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{A.2–21}$$

Para expresar el producto vectorial como un determinante se ha utilizado la Ec. A.2—8. Obsérvese que el componente i de [v × w] es $\Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} v_j w_k$

Productos vectodalés múltiples

Las expresiones para productos múltiples que se han mencionado en la pág. A-6 se pueden obtener mediante las anteriores expresiones analíticas de los productos escalar y vectorial. Por ejemplo, el producto triple(u . [v × w])puede expresarse así:

$$\begin{aligned}(u \cdot [v \times w]) &= \Sigma_i u_i [v \times w]_i \\ &= \Sigma_i \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k\end{aligned} \tag{A.2–22}$$

y obtener después, a partir de la Ec. A.2—8

$$(u \cdot [v \times w]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{A.2–23}$$

que representa otra expresión del volumen de un paralelepípedo. Además, la anulación del determinante es condición necesaria y suficiente para que los vectores u, v, y w sean coplanares.

Ejemplo A.2—1. Comprobación de una identidad vectorial

Las expresiones analíticas correspondientes a los productos de punto y de aspa pueden utilizarse para comprobar identidades vectoriales; por ejemplo, se desea comprobar la relación

$$[u \times [v \times w]] = v(u \cdot w) - w(u \cdot v) \tag{A.2–24}$$

Solución. Escribiendo en forma desarrollada el componente i del primer miembro de la expresión anterior :

$$\begin{aligned}[u \times [v \times w]]_i &= \Sigma_j\Sigma_k\epsilon_{ijk}u_j[v \times w]_k \\ &= \Sigma_j\Sigma_k\epsilon_{ijk}u_j\{\Sigma_l\Sigma_m\epsilon_{klm}v_l w_m\} \\ &= \Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l\Sigma_m\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}u_j v_l w_m \\ &= \Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l\Sigma_m\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}u_j v_l w_m \end{aligned} \tag{A.2–25}$$

Para completar la demostración se puede utilizar la Ec. A.2—7.

$$\begin{aligned}[u \times [v \times w]]_i &= \Sigma_j\Sigma_l\Sigma_m(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})u_j v_l w_m \\ &= v_i\Sigma_j\Sigma_m\delta_{jm}u_j w_m - w_i\Sigma_j\Sigma_l\delta_{jl}u_j v_l \\ &= v_i\Sigma_j u_j w_j - w_i\Sigma_j u_j v_j \\ &= v_i(u \cdot w) - w_i(u \cdot v) \end{aligned} \tag{A.2–26}$$

que corresponde exactamente al componente i del segundo miembro de la Ec. A.2—24. De una forma semejante se pueden comprobar identidades tales eomo:

$$(u \cdot [v \times w]) = (v \cdot [w \times u]) \tag{A.2–27}$$

$$([u \times v] \cdot [w \times z]) = (u \cdot w)(v \cdot z) - (u \cdot z)(v \cdot w) \tag{A.2–28}$$

$$[[u \times v] \times z] = ([u \times v] \cdot z)w - ([u \times v] \cdot w)z \tag{A.2–29}$$

§ A.3 OPERACIONES DIFERENCIALES CON VECTORES

El operador diferencial ∇, denominado «nabla» o «del», se define en coordenadas rectangulares de la siguiente forma:

$$\nabla = \delta_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\Sigma_i\delta_i\frac{\partial}{\partial} \tag{A.3–1}$$

siendo δ_i los vectores unitarios, y x_i las variables correspondientes a los ejes 1, 2, 3 (es decir, que x_i son las coordenadas de posición designadas generalmente por x, y, z). El símbolo ∇ es un operador vectorial, que tiene componentes de igual forma que un vector, y que no puede estar solo sino que ha de operar sobre una función escalar, vectorial o tensorial. En esta sección se resumen los diferentes usos de ∇ en sus operaciones con escalares y vectores. De igual forma que en § A.2, los vectores se separan en sus componentes y se utilizan las Ecs. A.2—16 y 17.

Gradiente de un campo escalar

Si s es una función escalar de las variables x_1, x_2, x_3, la operación de ∇ sobre s es

$$\nabla s = \delta_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial s}{\partial x_3}$$

$$= \Sigma_i \delta_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \qquad \text{(A.3–2)}$$

El vector construido de esta forma a partir de las derivadas de s se representa por Vs (o grad s) y se denomina gradiente del campo escalar. Para la operación del gradiente es preciso tener en cuenta las siguientes propiedades:

(no conmutativa) $\nabla s \neq s\nabla$ **(A.3—3)**

(no asociativa) $(\nabla r)s \neq \nabla(rs)$ **(A.3—4)**

(distributiva) $\nabla(r + s) = \nabla r + \nabla s$ **(A.3—5)**

Divergencia de un campo vectorial

Si el vector v es una función de las variables espaciales x_1, x_2, x_3, puede formarse un producto escalar con el operador V. Para obtener la forma final se utiliza la **Ec. A.2—16:**

$$(\nabla \cdot v) = \left(\left\{\Sigma_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \cdot \{\Sigma_j \delta_j v_j\}\right)$$

$$= \Sigma_i \Sigma_j (\delta_i \cdot \delta_j) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$$

$$= \Sigma_i \Sigma_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \Sigma_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad \text{(A.3–6)}$$

Este conjunto de derivadas del vector v se denomina ***divergencia*** de v (a veces abreviadamente div v). Algunas propiedades del operador divergencia son las siguientes :

(no conmutativa) $(\nabla \cdot v) \neq (v \cdot \nabla)$ **(A.3—7)**

(no asociativa) $(\nabla \cdot sv) \neq (\nabla s \cdot v)$ **(A.3—8)**

(distributiva) $(\nabla \cdot \{v$ [illegible] $= (\nabla \cdot$ [illegible] $(\nabla \cdot w)$ **(A.3—9)**

Rotacional de un campo vectorial

También se puede formar un producto de aspa entre el operador **V** y el vector v, que es una función de las tres variables espaciales. Este producto de aspa puede formarse mediante la **Ec. A.2—17** y expresarse de diversas formas:

$$[\nabla \times v] = \left[\left\{\Sigma_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \times \{\Sigma_k \delta_k v_k\}\right]$$

$$= \Sigma_i \Sigma_k [\delta_i \times \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_i} v_k$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \delta_1\left\{\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right\} + \delta_2\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right\} + \delta_3\left\{\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right\} \quad \text{(A.3–10)}$$

El vector construido en esta forma se denomina *rotacional* de v. La notación generalmente utilizada para $[\nabla \times v]$ es rot v. La operación del rotacional, análogamente a la divergencia, cumple la propiedad distributiva, pero no la conmutativa ni la asociativa.

La **Laplaciana** de un campo escalar

Si se toma la divergencia del gradiente de la función escalar s, se obtiene

$$(\nabla \cdot \nabla s) = \left(\left\{\Sigma_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \cdot \left\{\Sigma_j \delta_j \frac{\partial s}{\partial x_j}\right\}\right)$$

$$= \Sigma_i \Sigma_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

$$= \left\{\Sigma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} s\right\} \quad \text{(A.3–11)}$$

El conjunto de operadores diferenciales que actúan sobre s en la última línea se representa mediante el símbolo ∇^2; por lo tanto, en coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{(A.3–12)}$$

que es denominado operador *Laplaciana*. (Algunos autores utilizan el símbolo Δ para representar et operador Laplaciana, especialmente en la literatura alemana antigua.), El operador Laplaciana, al igual que el 'gradiente, la' divergencia y el rotacional, solamente posee la propiedad distributiva.

Laplaciana de un campo vectorial

En coordenadas rectangulares, el operador ∇^2 puede aplicarse a un campo vectorial v tomando las derivadas con respecto a los componentes escalares y sumando vectorialmente :

$$\nabla^2 v = \nabla^2\{\Sigma_i \delta_i v_i\}$$
$$= \delta_1 \nabla^2 v_1 + \delta_2 \nabla^2 v_2 + \delta_3 \nabla^2 v_3 \qquad \text{(A.3–13)}$$

Si bien esto es correcto en coordenadas rectangulares, no es aplicable en coordenadas curvilíneas.[1] Es preferible *definir* la Laplaciana de un campo vectorial de esta forma:

$$\nabla^2 v = \nabla(\nabla \cdot v) - [\nabla \times [\nabla \times v]] \qquad \text{(A.3–14)}$$

De esta forma, la operación se reduce a una serie de Operaciones eh las que intervienen el gradiente. la divergencia y el rotacional. La. definición correspondiente a la Ec. A.3— 14 expresa la Ec. A.3—13 para coordenadas rectangulares, y además puede utilizarse para obtener fácilmente $\nabla^2 v$ en coordenadas curvilíneas. (Para expresiones detalladas, véase § A.7.)

Derivada substancial d e u n campo escalar

Al comenzar el Capítulo'3 se' ha introducido el operador *derivada substancial:*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \qquad \text{(A.3–15)}$$

siendo v la velocidad local del fluido (o «velocidad media de. masa» en una mezcla de fluidos). Cuando este operador actúa sobre una función escalar *s*, se obtiene

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (v \cdot \nabla s)$$
$$= \frac{\partial s}{\partial t} + \Sigma_i v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \qquad \text{(A.3–16)}$$

Derivada substancial de un campo vectorial

La aplicación de una derivada substancial, a un vector puede efectuarse para coordenadas *rectangulares* aplicando el operador a cada uno de los componentes escalares y sumando vectorialmente :

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v$$
$$= \Sigma_i \delta_i \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_i \right\} \qquad \text{(A.3–17)}$$

[1] Véase una amplia discusión en P. Moon y D. E. Spencer, *J. Franklin Inst.*, **256**, 551-558 (1953). Otra formulación consiste en expresar $\nabla^2 v$ como $[\nabla \cdot \nabla v]$, es decir, como el producto de punto de ∇ por la diada ∇v.

Esto, que es correcto en coordenadas rectangulares, no es aplicable a coordenadas curvilíneas; por esta razón, es preferible *definir* la operación $(v\cdot\nabla)v$ en esta forma:

$$(v\cdot\nabla)v = \tfrac{1}{2}\nabla(v\cdot v) - [v\times[\nabla\times v]] \qquad \text{(A.3-18)}$$

con lo que se reduce a las más conocidas operaciones de gradiente y rotacional.[2]

Diferenciación de productos

Mediante las definiciones de las operaciones anteriores, se pueden comprobar las siguientes relaciones:

$$\nabla rs = r\nabla s + s\nabla r \qquad \text{(A.3-19)}$$

$$(\nabla\cdot sv) = (\nabla s\cdot v) + s(\nabla\cdot v) \qquad \text{(A.3-20)}$$

$$(\nabla\cdot[v\times w]) = (w\cdot[\nabla\times v]) - (v\cdot[\nabla\times w]) \qquad \text{(A.3-21)}$$

$$[\nabla\times sv] = [\nabla s\times v] + s[\nabla\times v] \qquad \text{(A.3-22)}$$

§ A.4 TENSORES DE SEGUNDO ORDEN[1]

En esta sección se consideran algunas operaciones que intervienen en el cálculo con tensores y diadas. Estas operaciones intervienen en la teoría de los fenómenos de transporte, especialmente en la transferencia de cantidad de movimiento.

Definiciones y notación

En § A.2 se ha indicado que un vector v está determinado mediante una serie de componentes v_1, v_2, v_3. Análogamente, un tensor de segundo orden viene, dado por los nueve componentes $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$, etc.[2] Para facilitar la expresión, estos componentes pueden escribirse así:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{(A.4-1)}$$

---

[2] Otra formulación consiste en expresar $(v\cdot\nabla)v$ como $[v\cdot\nabla v]$, es decir, como el producto de punto de v por la *diada* ∇v.

[1] Una discusión más amplia puede verse en P. M. MORSE y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, Nueva York (1953). vol. I, capítulo 1.

[2] No todas las matrices de nueve componentes forman un tensor de segundo orden. La definición matemática de un tensor de segundo orden incluye una condición acerca de la forma en que se transforman los componentes del tensor por efecto de una transformación coordenada. El tema de las transformaciones coordenadas se trata brevemente en § A.6.

Esta matriz no debe confundirse con un **determinante,** que puede formarse a **partir** de ella; la matriz es un conjunto ordenado de **números, mientras** que el determinante , es una cierta suma de productos de **estos números. Los** elementos que poseen los mismos subíndices se 'denominan ***elementos de la diagonal y*** los que poseen. subíndices diferentes **se denominan *elementos no diagonales.*** Si $\tau_{12} = \tau_{21}$, $\tau_{13} = \tau_{31}$ y $\tau_{23} = \tau_{32}$, *se* dice que τ *es* un ***tensor simétrico***. El ***tensor transpuesto*** de un tensor τ (que se representa por $\tau^\dagger$) es el que se forma al invertir el orden de los **subíndices** de cada uno de **los** elementos

$$\tau^\dagger = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} \tag{A.4-2}$$

Es evidente que cuando τ es **simétrico,** $\tau = \tau^\dagger$.

El producto **diádico** de **dos vectores** v **y** w es una forma especial **de un** tensor de segundo orden, en el que **los** elementos de la matriz son productos de los **componentes** de los vectores. El producto diádico vw es, por consiguiente,

$$vw = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix} \tag{A.4-3}$$

La **diada** VW es, en general, diferente de la **diada** WV. **Téngase en cuenta** que un **producto** diádico se expresa colocando los dos vectores uno **junto** a ötro sin ningán **signo** de **multiplicación.**

Un ***tensor unidad*** δ es **aquél** cuyos componentes de **la diagonal** son la unidad y los elementos no **diagonales** son cero:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.4-4}$$

Los componentes del tensor unidad son δ_{ij}, es decir, la delta de Kronecker. **Obsérvese** también que las filas (o columnas) del tensor unidad son los componentes de **los tres vectores unitarios** δ_1, δ_2, δ_3.

Es conveniente introducir una serie de ***diadas unidad***[3], que son los productos diádicos de los **vectores** unidad $\delta_m\delta_n$, **siendo** m, $n = 1, 2, 3$. Et **componente** ij de $\delta_m\delta_n$ es $\delta_{mi}\delta_{nj}$, o sea, el producto de dos deltas de **Kronecker.** Existen **nueve** diadas unidad :

3 **Véase MORSE y FESHBACH, op.** ***cit.,*** *p.* 55

$$\delta_1\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_1\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \delta_1\delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2\delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{etc.} \qquad \text{(A.4–5)}$$

En función de estas diadas unidad se puede descomponer un tensor o un producto diádico en sus componentes de-una forma análoga a la expresión A.2—9 para el caso de vectores:

$$\boldsymbol{\tau} = \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\tau_{ij} \qquad \text{(A.4–6)}$$

$$\boldsymbol{vw} = \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j v_i w_j \qquad \text{(A.4–7)}$$

Veamos ahora cómo se multiplican las diadas unidad entre sí, así como también por los vectores unitarios... Hay cuatro relaciones fundamentales que juegan el mismo papel que las Ecs. A. 2-34 y 17 para vectores:

$$(\delta_i\delta_j : \delta_k\delta_l) = \delta_{il}\delta_{jk} \qquad \text{(A.4–8)}$$

$$[\delta_i\delta_j \cdot \delta_k] = \delta_i\delta_{jk} \qquad \text{(A.4–9)}$$

$$[\delta_i \cdot \delta_j\delta_k] = \delta_{ij}\delta_k \qquad \text{(A.4–10)}$$

$$\{\delta_i\delta_j \cdot \delta_k\delta_l\} = \delta_{jk}\delta_i\delta_l \qquad \text{(A.4–11)}$$

Todas las fórmulas diádicas y tensoriales que se utilizan en este libro se deducen fácilmente a partir de estas cuatro relaciones básicas. La siguiente regla mnemotécnica ayuda a recordarlas: en las tres últimas relaciones se toma simplemente el producto de punto, de las δ a uno y otro lado del punto; en la primera relación se efectúan sucesivamente dos de estas operaciones:

Adición de tensores y productos diádicos

La adición de dos tensores se realiza de esta forma:

$$\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau} = \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\sigma_{ij} + \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\tau_{ij}$$
$$= \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j(\sigma_{ij} + \tau_{ij}) \qquad \text{(A.4–12)}$$

Es decir, que la suma de dos tensores es un tensor cuyos componentes son las *sumas* de los correspondientes componentes de los dos tensores. Esta misma regla es válida para Productos diádicos.

Multiplicación de un tensor por un escalar

La multiplicación de un tensor por un escalar se efectúa multiplicando cada uno de los componentes del tensor por el escalar:

$$s\tau = s\{\Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\tau_{ij}\}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\{s\tau_{ij}\} \qquad \text{(A.4–13)}$$

Lo mismo ocurre en el caso de productos diádicos

Producto escalar (o producto de doble punto) de dos tensores

Dos tensores pueden multiplicarse según la operación de doble punto:

$$(\sigma : \tau) = (\{\Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\sigma_{ij}\} : \{\Sigma_k\Sigma_l\delta_k\delta_l\tau_{kl}\})$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l(\delta_i\delta_j : \delta_k\delta_l)\sigma_{ij}\tau_{kl}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l\delta_{il}\delta_{jk}\sigma_{ij}\tau_{kl}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\sigma_{ij}\tau_{ji} \qquad \text{(A.4–14)}$$

para lo cual se ha utilizado la Ec. A.4–8. De igual forma, se puede demostrar que

$$(\tau : vw) = \Sigma_i\Sigma_j\tau_{ij}v_jw_i \qquad \text{(A.4–15)}$$

$$(vw : xy) = \Sigma_i\Sigma_jv_iw_jx_jy_i \qquad \text{(A.4–16)}$$

$$(\delta : \tau) = \Sigma_i\tau_{ii} \qquad \text{(A.4–17)}$$

Producto tensorial (o producto de punto simple) de dos tensores

Dos tensores pueden multiplicarse también de acuerdo con la operación de punto simple :

$$\{\sigma \cdot \tau\} = \{(\Sigma_i\Sigma_j\delta_i\delta_j\sigma_{ij}) \cdot (\Sigma_k\Sigma_l\delta_k\delta_l\tau_{kl})\}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l\{\delta_i\delta_j \cdot \delta_k\delta_l\}\sigma_{ij}\tau_{kl}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\Sigma_l\delta_{jk}\delta_i\delta_l\sigma_{ij}\tau_{kl}$$

$$= \Sigma_i\Sigma_l\delta_i\delta_l(\Sigma_j\sigma_{ij}\tau_{jl}) \qquad \text{(A.4–18)}$$

O sea, que el componente *il* de $\{\sigma \cdot \tau\}$ es $\Sigma_j\sigma_{ij}\tau_{jl}$. Con productos diádicos pueden efectuarse operaciones similares.

Producto vectorial (o producto de punto) de un tensor por un vector

En el producto de punto de un vector por un tensor se obtiene un vector:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}] &= [\{\Sigma_i\Sigma_j\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j\tau_{ij}\} \cdot \{\Sigma_k\boldsymbol{\delta}_k v_k\}] \\ &= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k[\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_k]\tau_{ij}v_k \\ &= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\boldsymbol{\delta}_i\delta_{jk}\tau_{ij}v_k \\ &= \Sigma_i\boldsymbol{\delta}_i\{\Sigma_j\tau_{ij}v_j\} \end{aligned} \tag{A.4–19}$$

Es decir, que el componente i de $[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}]$ es $\Sigma_j\tau_{ij}v_j$. Análogamente, el componente i de $[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]$ es $\Sigma_j v_j\tau_{ji}$. Es evidente que $[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}] \neq [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]$ salvo que $\boldsymbol{\tau}$ sea simétrico.

Recuérdese que cuando un vector $\boldsymbol{v}$ se multiplica por un escalar s el vector resultante $s\boldsymbol{v}$ tiene la misma dirección que $\boldsymbol{v}$ pero distinta longitud. Sin embargo, cuando $\boldsymbol{\tau}$ se multiplica por $\boldsymbol{v}$, el vector que resulta $[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}]$ difiere de $\boldsymbol{v}$ *tanto* en dirección como en longitud. Es decir, que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ «desvía» o «tuerce» al vector $\boldsymbol{v}$ para dar lugar a un nuevo vector que apunta en una dirección distinta:*

Teniendo en cuenta los anteriores resultados es sencillo demostrar las siguientes identidades:

$$[\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}] = \boldsymbol{v} \tag{A.4–20}$$

$$[\boldsymbol{uv} \cdot \ldots] = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \tag{A.4–21}$$

$$[\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{uv}] = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \tag{A.4–22}$$

$$(\boldsymbol{uv} : \boldsymbol{wz}) = (\boldsymbol{uw} : \boldsymbol{vz}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{z})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \tag{A.4–23}$$

$$(\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{uv}) = ([\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{v}) \tag{A.4–24}$$

$$(\boldsymbol{uv} : \boldsymbol{\tau}) = (\boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]) \tag{A.4–25}$$

Operaciones diferenciales en las que intervienen tensores y diadas

El operador diferencial $\boldsymbol{\nabla}$ puede utilizarse para operar sobre un tensor o una diada:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}] &= \left[\left\{\Sigma_i\boldsymbol{\delta}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right\} \cdot \{\Sigma_j\Sigma_k\boldsymbol{\delta}_j\boldsymbol{\delta}_k\tau_{jk}\}\right] \\ &= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k[\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_j\boldsymbol{\delta}_k]\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{jk} \\ &= \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\delta_{ij}\boldsymbol{\delta}_k\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{jk} \\ &= \Sigma_k\boldsymbol{\delta}_k\left(\Sigma_i\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ik}\right) \end{aligned} \tag{A.4–26}$$

Por consiguiente, el componente k de $[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}]$ es $\Sigma_i\,\partial\tau_{ik}/\partial x_i$.

* Citemos como ejemplo el comportamiento de fluidos en medios porosos. De acuerdo con la ley de Darcy, el flujo en un medio isotrópico adquiere en todas las partes del sistema la dirección del gradiente negativo de presión $-\boldsymbol{\nabla}p = \beta\boldsymbol{v}$, siendo β el cociente entre la viscosidad del fluido Y la permeabilidad del medio. Si el medio es no isotrópico, $-\boldsymbol{\nabla}p$ y $\boldsymbol{v}$ no son de la misma dirección, y la ley de Darcy debe de substituirse por $-\boldsymbol{\nabla}p = [\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{v}]$, siendo $\boldsymbol{\beta}$ un tensor de segundo orden.

Por otra parte, ∇ puede aparecer en combinación con un vector v en el producto diádico **Vv**. Así, tendremos

$$[w \cdot \nabla v] = \Sigma_i \Sigma_k \delta_k w_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_k \qquad \text{(A.4-27)}$$

$$(\tau : \nabla v) = \Sigma_i \Sigma_j \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \qquad \text{(A.4-28)}$$

que se pueden desarrollar por métodos análogos.

También se pueden deducir las siguientes identidades:

$$[\nabla \cdot s\delta] = \nabla s \qquad \text{(A.4-29)}$$

$$[\nabla \cdot vw] = [v \cdot \nabla w] + w(\nabla \cdot v) \qquad \text{(A.4-30)}$$

$$(s\delta : \nabla v) = s(\nabla \cdot v) \qquad \text{(A.4-31)}$$

Ejemplo A.4—1. Comprobación de una identidad tensorial

Demostrar que para un tensor simétrico τ

$$(\tau : \nabla v) = (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) \qquad \text{(A.4-32)}$$

Solución. Expresando el segundo miembro en función de los componentes:

$$(\nabla \cdot [\tau \cdot v]) = \Sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\tau \cdot v]_i$$

$$= \Sigma_i \Sigma_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} v_j \qquad \text{(A.4-33)}$$

$$(v \cdot [\nabla \cdot \tau]) = \Sigma_j v_j [\nabla \cdot \tau]_j$$

$$= \Sigma_j \Sigma_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \qquad \text{(A.4-34)}$$

Restando la Ec. A.4 -34 de la Ec. A.4 — 33 se obtiene la expresión correspondiente a $(\tau : \nabla v)$ de la Ec. A.4—28.

§ A.5 TEOREMAS INTEGRALES PARA VECTORES Y TENSORES

Hay diferentes teoremas integrales que resultan extremadamente titiles en numerosas demostraciones;

Teorema de la **divergencia de Gauss-Ostrogradskii**

Si V es una región cerrada en el espacio que está rodeada por una superficie[1] S

$$\iiint_V (\nabla \cdot v)\, dV = \iint_S (n \cdot v)\, dS \qquad \text{(A S - 1)}$$

[1] El segundo miembro puede expresarse de diversas formas:

$$\iint_S (v \cdot n)\, dS \quad \text{o} \quad \iint_S v_n\, dS \quad \text{o} \quad \iint_S (v \cdot dS)$$

siendo n el vector normal dirigido hacia fuera.. Esta expresión se conoce con el nombre de *teorema de la divergencia* de Gauss y Ostrogradskii. Dos teoremas íntimamente relacionados para escalares y tensores son los siguientes:

$$\int_V\int\int\int \nabla s\, dV = \int_S\int ns\, dS \qquad \text{(A.5–2)}$$

$$\int_V\int\int\int [\nabla \cdot \tau]\, dV = \int_S\int [n \cdot \tau]\, dS \qquad \text{(A.5–3)}^2$$

Esta última relación es también válida para productos. diádicos vw.

Teorema del rotacional de Stokes

Si S es una superficie limitada por la curva cerrada C,

$$\int_S\int ([\nabla \times v] \cdot n)\, dS = \oint_C (v \cdot t)\, dC \qquad \text{(A.5–4)}$$

siendo t un vector unitario tangencial en la dirección de integración a lo largo de C y n un vector unitario normal a S y cuyo sentido es el de avance de un tornillo de rosca a la derecha cuando su cabeza se hace girar en la dirección de integración a lo largo de C. Para tensores existe una relación análoga.2

Fórmula de Leibnitz -para la diferenciación de una integral triple

Sea V una región del espacio cerrada que se mueve y está, rodeada. por una superficie S y sea v_S la velocidad de un elemento cualquiera de superficie. Si $s(x, y, z, t)$ es una función escalar de la posición y del tiempo, se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_V\int\int s\, dV = \int_V\int\int \frac{\partial s}{\partial t}\, dV + \int_S\int s(v_S \cdot n)\, dS \qquad \text{(A.5–5)}$$

Esta expresión es una aplicación de la *fórmula de Leibnitz* para la diferenciación de una integral. Téngase en cuenta que $V = V(t)$ y S = S(t).

Si la integral está extendida a un volumen cuya superficie se mueve con la velocidad loca) del fluido (de forma que $v_S = v$), la utilización de la ecuación de continuidad conduce a este otro resultado:

$$\frac{d}{dt}\int_V\int\int\int \rho s\, dV = \int_V\int\int \rho \frac{Ds}{Dt}\, dV \qquad \text{(A.5–6)}$$

siendo ρ la densidad del fluido,

---

2 Véase P. M. MORSE y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill. Nueva York (1953), p. 66.

§ A.6 COMPONENTES DE VECTORES Y TENSORES EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Hasta ahora sólo se han considerado coordenadas' rectangulares x, y, z.. Sin embargo, en muchos casos es más lógico utilizar coordenadas curvilíneas. 'Por consiguiente, es preciso estudiar la relación existente entre los componentes de vectores y tensores en distintos sistemas coordenados. Solamente consideraremos: sistemas coordenados *ortogonales*, es decir, aquéllos en las que las tres familias de superficies coordenadas son perpendiculares entre sí.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan\, y/x \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\,(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi &= \arctan\, y/x \end{aligned}\right\}$$

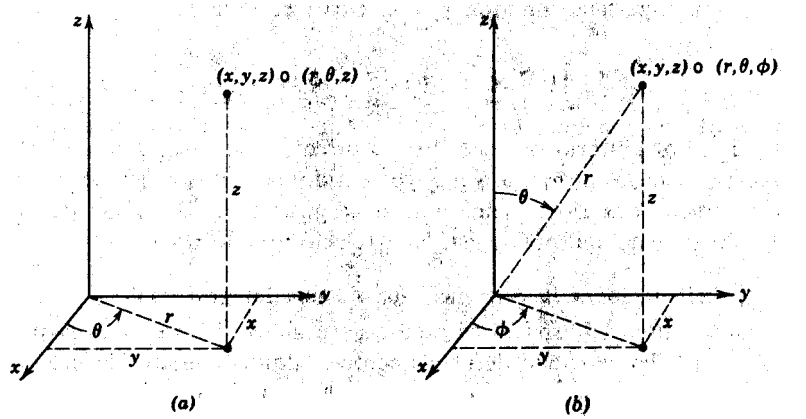


Fig. **A.6–1.** *(a)* **Coordenadas cilíndricas.** Los intervalos de las variables son $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta < 2.1$, $-\infty < z < \infty$. *(b)* **Coordenadas esféricas.** Los intervalos de las variables son $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, y $0 \leq \phi < 2\pi$.

Coordenadas curvilíneas

Los dos sistemas de coordenadas curvilíneas más frecuentemente utilizados son el. cilíndrico y el esférico. (Véase Fig. A.6— 1.) Para coordenadas *cilíndricas* las variables están relacionadas con x, y, z, en la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \text{(A.6—1)} \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta & \text{(A.6—2)} \\ z = z & \text{(A.6—3)} \end{cases} \qquad \begin{cases} r = +\sqrt{x^2+y^2} & \text{(A.6—4)} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} & \text{(A.6—5)} \\ z = z & \text{(A.6—6)} \end{cases}$$

y un elemento de línea ds viene dado por

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2 \qquad \text{(A.6–7)}$$

En el caso de coordenadas *esféricas*, las variables están relacionadas con x, y, z, en esta forma:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi & \text{(A.6–8)} \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \text{(A.6–9)} \\ z = r \cos\theta & \text{(A.6–10)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \text{(A.6–11)} \\ \theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \text{(A.6–12)} \\ \phi = \arctan \dfrac{y}{x} & \text{(A.6–13)} \end{cases}$$

y un elemento de línea ds viene dado por

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta(d\phi)^2 \qquad \text{(A.6–14)}$$

Designemos ahora por q_1, q_2, q_3 y q_1', q_2', q_3', las coordenadas de dos sistemas ortogonales arbitrarios. Los dos sistemas coordenados están relacionados entre sí por

$$q_i = q_i(q_{1'}, q_{2'}, q_{3'}) \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{(A.6–15)}$$

$$q_{i'} = q_{i'}(q_1, q_2, q_3) \qquad i' = 1, 2, 3 \qquad \text{(A.6–16)}$$

y el elemento de línea ds viene dado por

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= h_1^2(dq_1)^2 + h_2^2(dq_2)^2 + h_3^2(dq_3)^2 \\ &= h_{1'}^2(dq_{1'})^2 + h_{2'}^2(dq_{2'})^2 + h_{3'}^2(dq_{3'})^2 \end{aligned} \qquad \text{(A.6–17)}$$

Los *factores de escala* h_i y $h_{i'}$ son funciones de la posición, como hemos visto ya para coordenadas cilíndricas y esféricas.

Transformación de los componentes de un vector

En la Fig. A.6–2 se representa un vector v descompuesto en sus componentes rectangulares y en sus componentes *cilíndricos*. Mediante la aplicación de conceptos elementales de trigonometría se demuestra que los componente están relacionados entre sí de esta forma:

$$\begin{cases} v_r = (\cos\theta)v_x + (\operatorname{sen}\theta)v_y + (0)v_z & \text{(A.6–18)} \\ v_\theta = (-\operatorname{sen}\theta)v_x + (\cos\theta)v_y + (0)v_z & \text{(A.6–19)} \\ v_z = (0)v_x + (0)v_y + (1)v_z & \text{(A.6–20)} \end{cases}$$

Y

$$\begin{cases} v_x = (\cos\phi)v_r + (-\operatorname{sen}\theta)v_\theta + (0)v_z & \text{(A.6–21)} \\ v_y = (\operatorname{sen}\theta)v_r + (\cos\theta)v_\theta + (0)v_z & \text{(A.6–22)} \\ v_z = (0)v_r + (0)v_\theta + (1)v_z & \text{(A.6–23)} \end{cases}$$

De igual forma, se puede demostrar que para coordenadas *esféricas*

$$v_r = (\text{sen } \theta \cos \phi)v_x + (\text{sen } \theta \text{ sen } \phi)v_y + (\cos \theta)v_z \quad \text{(A.6–24)}$$

$$v_\theta = (\cos \theta \cos \phi)v_x + (\cos \theta \text{ sen } \phi)v_y + (\text{-sen } \theta)v_z \quad \text{(A.6–25)}$$

$$v_\phi = (-\text{sen } \phi)v_x + (\cos \phi)v_y + (0)v_z \quad \text{(A.6–26)}$$

Y

$$v_x = (\text{sen } \theta \cos \phi)v_r + (\cos \theta \cos \phi)v_\theta + (-\text{sen } \phi)v_\phi \quad \text{(A.6–27)}$$

$$v_y = (\text{sen } \theta \text{ sen } \phi)v_r + (\cos \theta \text{ sen } \phi)v_\theta + (\cos \phi)v_\phi \quad \text{(A.6–28)}$$

$$v_z = (\cos \theta)v_r + (\text{-sen } \theta)v_\theta + (0)v_\phi \quad \text{(A.6–29)}$$

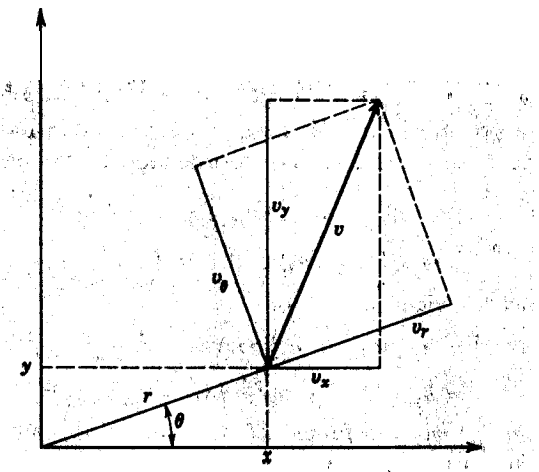


Fig. A.6–2. Descomposición del vector v en sus componentes rectangulares y cilíndricos.

En general, la mutua relación entre los componentes de un vector en el sistema q_1, q_2, q_3, y el sistema $q_{1'}, q_{2'}, q_{3'}$, viene dada por

$$v_{i'} = \Sigma l_{i'i} v_i \quad \text{(A.6–30)}$$

$$v_i = \Sigma l_{ii'} v_{i'} \quad \text{(A.6–31)}$$

siendo $l_{i'i}$ los *cosenos de dirección; es* decir, que $l_{i'i}$ es el coseno del ángulo formado entre el vector unitario en la dirección-i y el vector unitario en la dirección i'. Estos cosenos de dirección cumplen las relaciones

$$\Sigma_i l_{i'i} l_{j'i} = \Sigma_i l_{ii'} l_{ij'} = \delta_{i'j'} \quad \text{(A.6–32)}$$

$$\Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} l_{ij'} l_{kk'} = \Sigma_{i'} \epsilon_{i'j'k'} l_{ii'} \quad \text{(A.6–33)}$$

Por otra parte, $l_{i'i}$ están relacionados con h_i y $h_{i'}$ en esta forma

$$l_{i'i} = \frac{h_i}{h_{i'}}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_{i'}}\right) = \frac{h_{i'}}{h_i}\left(\frac{\partial q_{i'}}{\partial q_i}\right) \tag{A.6–34}$$

El lector puede comprobar, que estas relaciones generales describen adecuadamente las relaciones entre los componentes de un vector. en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

En realidad, los vectores se definen como aquellas magnitudes cuyos componentes se transforman de acuerdo con las Ecs. A.6– 30 y 31 en un cambio de coordenadas.

Transformación de los componentes de un tensor

En general, la relación entre los componentes de un tensor. en el sistema q_1, q_2, q_3, y el sistema $q_{1'}$, $q_{2'}$, $q_{3'}$, viene dada 'por

$$\tau_{i'j'} = \Sigma_i \Sigma_j l_{i'i} l_{j'j} \tau_{ij} \tag{A.6–35}$$

$$\tau_{ij} = \Sigma_{i'} \Sigma_{j'} l_{ii'} l_{jj'} \tau_{i'j'} \tag{A.6–36}$$

Estas relaciones constituyen realmente la definición de un tensor de segundo orden. De una. Forma análoga se definen tensores de orden superior.

Ejemplo A.6– 1. Características de transformación de los productos de vectores y tensores

Demostrar, 'mediante la transformación conveniente, que. $[v \times w]$ es un vector y que $(\sigma : \tau)$ es un escalar.

Solución.

a.
$$\begin{aligned}
[v \times w]_i &= \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} v_j w_k \\
&= \Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} (\Sigma_{j'} l_{jj'} v_{j'})(\Sigma_{k'} l_{kk'} w_{k'}) \\
&= \Sigma_{j'} \Sigma_{k'} v_{j'} w_{k'} (\Sigma_j \Sigma_k \epsilon_{ijk} l_{jj'} l_{kk'}) \\
&= \Sigma_{j'} \Sigma_{k'} v_{j'} w_{k'} (\Sigma_{i'} \epsilon_{i'j'k'} l_{ii'}) \\
&= \Sigma_{i'} (\Sigma_{j'} \Sigma_{k'} \epsilon_{i'j'k'} v_{j'} w_{k'}) l_{ii'} \\
&= \Sigma_{i'} l_{ii'} [v \times w]_{i'}
\end{aligned} \tag{A.6–37}$$

Esta expresión es de la forma de la Ec. A.6–31. Por lo tanto,' los componentes de $[v \times w]$ se transforman como un vector. En este caso se ha utilizado la Ec. A.6–33.

b.
$$\begin{aligned}
(\sigma : \tau) &= \Sigma_i \Sigma_j \sigma_{ij} \tau_{ji} \\
&= \Sigma_i \Sigma_j (\Sigma_{m'} \Sigma_{n'} l_{im'} l_{jn'} \sigma_{m'n'})(\Sigma_{r'} \Sigma_{s'} l_{jr'} l_{is'} \tau_{r's'}) \\
&= \Sigma_{m'} \Sigma_{n'} \Sigma_{r'} \Sigma_{s'} \sigma_{m'n'} \tau_{r's'} (\Sigma_i \Sigma_j l_{im'} l_{jn'} l_{jr'} l_{is'}) \\
&= \Sigma_{m'} \Sigma_{n'} \Sigma_{r'} \Sigma_{s'} \sigma_{m'n'} \tau_{r's'} \delta_{n'r'} \delta_{m's'} \\
&= \Sigma_{m'} \Sigma_{n'} \sigma_{m'n'} \tau_{n'm'}
\end{aligned} \tag{A.6–38}$$

La penúltima expresión se ha obtenido utilizando la Ec. A.6–32. Puesto que la expresión final tiene la misma forma que la inicial, el término $(\sigma : \tau)$ es un escalar; es decir, que es *invariante* en una transformación coordenada.

§ A.7 OPERACIONES DIFERENCIALES EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

En § A.6 se ha visto la forma en que están relacionados los componentes de vectores y teqsores en coordenada; curvilíneas con los componentes en coordenadas rectangulares. En esta Sección se resumen las distintas operaciones en que interviene V en coordenadas curvilíneas.

Es preciso tener en cuenta que ∇ tiene la misma forma de la Ec. A.3—1 solamente en coordenadas rectangulares. En coordenadas curvilíneas V toma formas diferentes según que se utilice con escalares, vectores o tensores, y según la naturaleza de las operaciones en las que interviene (por ejemplo., . , : , o' ×). El operador V no sigue reglas de transformación como las de las Ecs. A.6—30 y 31.

En las Tablas. A.7— 1, 2 y' 3, se presenta un resumen de las operaciones diferenciales más frecuentes en' coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

Estas expresiones pueden obtenerse comenzando por las operaciones expresadas en componentes rectangulares con, derivadas conrespecto a x, y, z (o x_1, x_2, x_3). Los componentes rectangulares de vectores y tensores se expresan después en función de los componentes curvilíneos de acuerdo con las Ecs. A.6—31 y A.6—36. A continuación se pasa de las derivadas con respecto a x, y, z, a las derivadaocon respecto a las coordenadas curvilíneas utilizando la regla de la cadena de la diferenciación parcial. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo A.7—1. El procedimiento es muy laborioso pero seguro? Las operaciones diferenciales para coordenadas ortogonales arbitrarias en función de h_i pueden verse en, las obras de matemáticas.[2,3]

Ejemplo A.7— 1. Deducción de diversas operaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas

Deducir las expresiones correspondientes para $(\nabla \cdot v)$ y para el Componente r de $[\nabla \cdot \tau]$ en coordenadas cilíndricas, cuando τ es simétrico.

Solución. *a.* En coordenadas rectangulares

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{(A.7–1)}$$

Introduciendo en esta expresióu las Ecs. A.6—21, 22 y 23, se obtiene

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial}{\partial x}(v_r \cos\theta - v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(v_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta \cos\theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \text{(A.7–2)}$$

---

1 La transformación de tensores covariantes y contravariantes puede sistematizarse utilizando *los simbolos de Christoffel;* véase, por *ejemplo,* A. J. MCCONNELL, *Applications of Tensor Analysis,* Dover, Nueva *York* (1957), pp. 140-143, *o* P. *M.* MORSE y H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics,* McGraw-Hill, Nueva York (1953), pp. 47-50.

2 P. M. MORSE y H. FESHBACH, *op. cit.,* pp. 50-52, 114-117; L. PIPES, *Applied Mathematics for Engineers and Physicists,* McGraw-Hill, Nueva York (1958). pp. 395-398

3 Un excelente formulario de las operaciones vectoriales y tensoriales, y especialmente de las operaciones en coordenadas curvilíneas, puede encontrarse en el libro de E. MADELUNG, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers,* Dover, Nueva York (1943), pp. 109-151.

TABLA A.7–1

RESUMEN DE OPERACIONES DIFERENCIALES EN LAS QUE INTERVIENE EL OPERADOR ∇ EN COORDENADAS RECTANGULARES[a] (x, y, z)

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{A}$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{B}$$

$$(\tau : \nabla v) = \tau_{xx}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \tau_{yy}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \tau_{zz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \tag{C}$$

$$[\nabla s]_x = \frac{\partial s}{\partial x} \tag{D}$$

$$[\nabla s]_y = \frac{\partial s}{\partial y} \tag{E}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \tag{F}$$

$$[\nabla \times v]_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \tag{G}$$

$$[\nabla \times v]_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \tag{H}$$

$$[\nabla \times v]_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{I}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{J}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \tag{K}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{L}$$

$$[\nabla^2 v]_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \tag{M}$$

$$[\nabla^2 v]_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \tag{N}$$

$$[\nabla^2 v]_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{O}$$

$$[v \cdot \nabla v]_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \tag{P}$$

$$[v \cdot \nabla v]_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \tag{Q}$$

$$[v \cdot \nabla v]_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{R}$$

[a] Las operaciones en las que interviene el tensor τ están dadas solamente para τ simétrico

TABLA A.7–2

RESUMEN DE OPERACIONES DIFERENCIALES EN LAS QUE INTERVIENE EL OPERADOR ∇ EN COORDENADAS CILÍNDRICAS[a] (x, θ, z)

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{A}$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{B}$$

$$\begin{aligned}(\tau : \nabla v) = {} & \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \tau_{zz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \\ & + \tau_{r\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] + \tau_{\theta z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \\ & + \tau_{rz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{C}$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \tag{D}$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \theta} \tag{E}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \tag{F}$$

$$[\nabla \times v]_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \tag{G}$$

$$[\nabla \times v]_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{H}$$

$$[\nabla \times v]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \tag{I}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\tau_{r\theta} - \frac{1}{r}\tau_{\theta\theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \tag{J}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \tag{K}$$

$$[\nabla \cdot \tau]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{L}$$

$$[\nabla^2 v]_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \tag{M}$$

$$[\nabla^2 v]_\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \tag{N}$$

$$[\nabla^2 v]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{O}$$

$$[v \cdot \nabla v]_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} \tag{P}$$

$$[v \cdot \nabla v]_\theta = v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \tag{Q}$$

$$[v \cdot \nabla v]_z = v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{R}$$

[a] Las operaciones en las que interviene el tensor τ están dadas solamente para τ simétrico

TABLA A.1-3

RESUMEN DE OPERACIONES DIFERENCIALES EN LAS QUE INTERVIENE EL OPERADOR V EN COORDENADAS ESFÉRICAS' (r, θ, ϕ)

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \qquad (A)$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial s}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} \qquad (B)$$

$$\begin{aligned}(\tau : \nabla v) = {} & \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \\ & + \tau_{\phi\phi}\left(\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) \\ & + \tau_{r\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}\right) + \tau_{r\phi}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}\right) \\ & + \tau_{\theta\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot\theta}{r} v_\phi\right)\end{aligned} \qquad (C)$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \qquad (D)$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \theta} \qquad (E)$$

$$[\nabla s]_\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial s}{\partial \phi} \qquad (F)$$

$$[\nabla \times v]_r = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi \operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \qquad (G)$$

$$[\nabla \times v]_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) \qquad (H)$$

$$[\nabla \times v]_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \qquad (I)$$

[a] Las operaciones en las que interviene el tensor τ están dadas solamente para τ simétrico

Se aplica ahora la regla de la cadena de derivación parcial, según estas dos expresiones

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)_{\theta,z}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial \theta}\right)_{r,z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y,z} \qquad (A.7\text{-}3)$$

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial r}\right)_{\theta,z}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial \theta}\right)_{r,z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{x,z} \qquad (A.74)$$

siendo $v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \operatorname{sen}\theta$ y $v_y = v_r \operatorname{sen}\theta + v_\theta \cos\theta$. Las derivadas de las Ecs. A.7−3 y 4, que relacionan entre si los dos sistemas coordenados, se evalúan a partir de las Ecs. A.6−4 y 5:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_0 = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_0 = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \qquad (A.7\text{-}5,6)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_0 = \frac{2}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r} \qquad (A.7\text{-}7,8)$$

TABLA A.7—3 (*continuación*)

$$[\nabla \cdot \tau]_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \qquad (J)$$

$$[\nabla \cdot \tau]_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi} \qquad (K)$$

$$[\nabla \cdot \tau]_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi} \qquad (L)$$

$$[\nabla^2 v]_r = \nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \qquad (M)$$

$$[\nabla^2 v]_\theta = \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \qquad (N)$$

$$[\nabla^2 v]_\phi = \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \qquad (O)$$

$$[v \cdot \nabla v]_r = v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \qquad (P)$$

$$[v \cdot \nabla v]_\theta = v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} \qquad (Q)$$

$$[v \cdot \nabla v]_\phi = v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot\theta}{r} \qquad (R)$$

Por lo tanto,

$$(\nabla \cdot v) = \left(\frac{\partial}{\partial r}(v_r\cos\theta - v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)\right)(\cos\theta) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(v_r\cos\theta - v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)\right)\left(-\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}(v_r\,\mathrm{sen}\,\theta + v_\theta\cos\theta)\right)(\mathrm{sen}\,\theta) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(v_r\,\mathrm{sen}\,\theta + v_\theta\cos\theta)\right)\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (A.7\text{–}9)$$

Efectuando la operación y combinando los términos, se obtiene, finalmente

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (A.7\text{–}10)$$

que es una de las entradas de la Tabla A.7—2.

b. A partir de la Ec. A.6–18 se deduce que

$$[\nabla \cdot \tau]_r = (\cos\theta)[\nabla \cdot \tau]_x + (\operatorname{sen}\theta)[\nabla \cdot \tau]_y \tag{A.7-11}$$

A partir de la Ec. A.4–26 se obtienen los componentes rectangulares de $[\nabla \cdot \tau]$ que pueden introducirse en la Ec. A.7–11 para llegar a

$$[\nabla \cdot \tau]_r = (\cos\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) + (\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right) \tag{A.7-12}$$

Se utiliza ahora la Ec. A.6–36, en la que $l_{ii'}$ vienen dados por la expresión

$$\begin{pmatrix} l_{xr} & l_{x\theta} & l_{xz} \\ l_{yr} & l_{y\theta} & l_{yz} \\ l_{zr} & l_{z\theta} & l_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.7-13}$$

obtenida a partir de las Ecs. A.6–21, 22 y 23. *Resulta, por consiguiente

$$\tau_{xx} = \tau_{rr}\cos^2\theta - 2\tau_{r\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{\theta\theta}\operatorname{sen}^2\theta \tag{A.7-14}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{rr}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - \tau_{\theta\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{A.7-15}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{rz}\cos\theta - \tau_{z\theta}\operatorname{sen}\theta \tag{A.7-16}$$
$$\tau_{yy} = \tau_{rr}\operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{r\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{\theta\theta}\cos^2\theta \tag{A.7-17}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{rz}\operatorname{sen}\theta + \tau_{z\theta}\cos\theta \tag{A.7-18}$$
$$\tau_{zz} = \tau_{zz} \tag{A.7-19}$$

Introduciendo estas expresiones en la Ec. A.7–12 y simplificando se llega a

$$[\nabla \cdot \tau]_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\tau_{r\theta} - \frac{1}{r}\tau_{\theta\theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} \tag{A.7-20}$$

APÉNDICE B

TABLAS PARA LA PREDICCIÓN DE PROPIEDADES DE TRANSPORTE

TABLA B-I

PARÁMETROS DE FUERZA INTERMOLECULAR Y CONSTANTES CRÍTICAS

Substancia	Peso Molecular M	Parámetros[a] de Lennard-Jones		Constantes críticas[b,c,d]				
		σ (Å)	ϵ/κ (°K)	T_c (°K)	P_c (atm)	$\tilde{V}_c$ (cm^3 g-mol^{-1})	μ_c (g cm^{-1} sec^{-1}) x 10^6	k_c (cal sec^{-1} cm^{-1} °K^{-1}) x 10^6
Elementos ligeros:								
H_2	2,016	2,915	38,0	33,3	12,80	65,0	34,7	—
He	4,003	2,576	10,2	5,26	2,26	57,8	25,4	—
Gases nobles:								
Ne	20,183	2,789	35,7	44,5	26,9	41,7	156,	79,2
Ar	39,944	3,418	124,	151;	48,0	75,2	264,	71,0
Kr	83,80	3,498	225,	209,4	54,3	92,2	396,	49,4
Xe	131,3	4,055	229,	289,8	58,0	118,8	490,	40,2
Substancias poliatómicas sencillas								
Aire	28,97[e]	3,617	97,0	132,[e]	36,4[e]	86,6[e]	193,	90,8
N_2	28,02	3,681	91,5	126,2	33,5	90,1	180,	86,8
O_2	32,00	3,433	113,	154,4	49,7	74,4	250,	105,3
O_3	48,00	—	—	268,	67,	89,4	—	—
c o	28,01	3,590	110,	133,	34,5	93,1	190,	86,5
CO_2	44,01	3,996	190,	304,2	72,9	94.0	343,	122,
NO	30,01	3,470	119,	180,	64,	57,	258,	118,2
N_2O	44,02	3,879	220,	309,7	71,7	96,3	332,	131,
SO_2	64,07	4,290	252,	430.7	77,8	122,	411,	98,6
F_2	38,00	3,653	112,		—	—	—	—
Cl_2	70.91	4,115	357,	417,	76,1	124,	420,	97,0
Br_2	159,83	4,268	520,	584,	102,	144,	—	
I_2	253.82	4,982	550,	800,				

Hidrocarburos:								
CH_4	16,04	3,822	137,	190,7	45,8	99,3	159,	158,0
C_2H_2	26,04	4,221	185,	309,5	61,6	113,	237,	—
C_2H_4	28,05	4,232	205,	282,4	50,0	124,	215,	—
C_2H_6	30,07	4,418	230,	305.4	48.2	148,	210,	203,0
C_3H_6	42,08	—	—	365,0	45,s	181,	233,	—
C_3H_8	44,09	5,061	254,	370.0	42,0	200,	228,	—
n-C_4H_{10}	58,12	—		425,2	37,5	255,	239,	—
i-C_4H_{10}	58,12	5,341	313,	408,1	36,0	263,	239,	—
n-C_5H_{12}	72,15	5,769	345,	469.8	33,3	311,	238,	—
n-C_6H_{14}	86,17	5,909	413,	507,9	29,9	368,	248,	—
n-C_7H_{16}	100,20	—	—	540,2	27,0	426,	254,	—
n-C_8H_{18}	114,22	7,451	320,	569,4	24,6	485,	259,	
n-C_9H_{20}	128,25	—	—	595,0	22,5	543,	265,	—
Ciclohexano	84,16	6,093	324,	553,	40,0	308,	284,	—
C_6H_6	78,11	5,270	440,	562,6	48,6	260,	312,	—
Otros compuestos orgánicos:								
CH_3Cl	50,49	3,375	855,	416,3	65,9	143,	338,	—
CH_2Cl_2	84,94	4,759	406;	510.	60,	—	—	—
$CHCl_3$	119.39	5,430	327,	536.6	54,	240,	410,	—
CCl_4	153,84	5,881	327,	556,4	45,0	276,	413,	—
C_2N_2	52,04	4,38	339,	400,	59,	—	—	—
COS	60,08	4,13	335,	378;	61,	—	—	—
CS_2	76.14	4,438	488,	552,	78,	170,	404,	

a Los valores de σ y ϵ/K están tomados de J. 0. *Hirschfelder*, C. F. Curttiss y R. 8. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, *Nueva York* (1954), pp. 1110–11 12; también de Addenda y Corrigenda. p. 11. Los anteriores valores están calculados a partir de datos de viscosidad y son aplicables para temperaturas superiores a 100 °K. Los valores del Kr están tomados de E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, 32, 1832– *1836 (1960).*

b Los valores de T_c, p_c, y $\tilde{V}_c$ están tomados de K. A. Kobe y R. E. Lynn. Jr., *Chem. Rev.*, *52,* 117–236 *(1952).* y Amer. Petroleum Inst. Research Proj. 44, editado por F. D. Rossini, Carnegie Inst. of Technology (1952), salvo las excepciones que se indican.

c Los valores de μ_c están tomados de 0. A. Hougen y K. M. Watson, *Chemical Process Principles*, volumen *111,* Wiley, *Nueva York* (1947). p. 873.

d Los valores de k_c están tomados de E. J. Owens y G. Thodos, *A. I. Ch. E. Journal*, 3, 454–461 (1957).

e Para el aire, el peso molecular M y las propiedades pseudocríticas T_c, p_c, y $\tilde{V}_c$ se han calculado a partir de la composición media del aire seco, tal como figuran en las International Critica1 Tables, vol. I, p. 393 (1926).

TABLA B-2

FUNCIONES PARA LA PREDICCIÓN DE PROPIEDADES DE TRANSPORTE DE GASES A BAJA DENSIDAD[a]

kT/ϵ o kT/ϵ_{AB}	$\Omega_\mu = \Omega_k$ (Para viscosidad y conductividad calorífica)	$\Omega_{\mathcal{D},AB}$ (para difusividad)	kT/ϵ o kT/ϵ_{AB}	$\Omega_\mu = \Omega_k$ (Para viscosidad y conductividad calorífica)	$\Omega_{\mathcal{D},AB}$ (Para difusividad)
			2,50	1,093	0,9996
0,30	2,785	2,662	2,60	1,081	0,9878
0,35	2,628	2,476	2.70	1,069	0,9770
0,40	2,492	2,318	2,80	*1,058*	0,9672
0,45	2,368	2,184	2,90	1,048	0,9576
0,50	2,257	2,066	3,00	1,039	0,9490
0,55	2,156	1,966	3.10	1,030	0,9406
0,60	2,065	1,877	3,20	1,022	0,9328
0,65	1,982	1,798	3,30	1,014	0,9256
0,70	1,908	*1,729*	3,40	1,007	0,9186
0,75	1,841	1,667	3,so	0,9999	0,9120
0,80	1,780	1,612	3,60	0,9932	0,9058
0,85	1,725	1,562	3,70	0,9870	48998
0,90	1,675	1,517	3,80	0,9811	0,8942
0,95	1,629	*1,476*	3,90	0,9755	0.8888
1,00	1,587	1,439	4,00	0,9700	0,8836
1,os	1,549	1,406	4,10	0,9649	0,8788
1,10	1,514	1,375	4,20	0,9600	0,8740
1,15	1,482	1,346	4,30	0,9553	0,8694
1,20	1,452	1,320	4,40	0,9507	0,8652
1,25	1,424	1,296	4,50	0,9464	0,8610
1,30	1,399	1,273	4,60	0,9422	0,8568
1,35	1,375	1,253	4,70	0,9382	0,8530
1,40	1,353	1,233	4,80	0.9343	0,8492
1,45	1,333	1,215	4,90	0,9305	0,8456
1,so	1,314	1,198	s,o	0,9269	0.8422
l,SS	1,296	1,182	6,0	0,8963	0,8124
1,60	1,279	1,167	7,0	0,8727	0,7896
1,65	1,264	1,153	8,0	0,8538	0,7712
1,70	1,248	1,140	9,0	0,8379	0,7556
1,75	1,234	1.128	10,0	0,8242	0,7424
1,80	1,221	1,116	20,0	0,7432	0,6640
1,85	1,209	1,105	30,0	0,7005	0,6232
1,90	1,197	1,094	40,0	0,6718	0,5960
1.95	1,186	1,084	50,0	0,6504	0,5756
2,00	1,175	1,075	60,0	0,6335	0,5596
2,10	1,156	1,057	70,0	0,6194	0.5464
2,20	1,138	1,041	80,0	0,6076	0,5352
2,30	1,122	1,026	90,0	0,5973	0.5256
2,40	1,107	1,012	100,0	0,5882	0,5170

*Tomados de J. 0. HIRSCHFELDER, R. B. BIRD y E. L. SPOTZ, *Chem. Revs.*, *44,205* (1949).

APÉNDICE C

CONSTANTES Y FACTORES DE CONVERSIÓN

§ C. 1 CONSTANTES MATEMÁTICAS

$e = 2{,}71828\ldots$

$\ln 10 = 2{,}30259\ldots$

$\pi = 3{,}14159\ldots$

§ C. 2 CONSTANTES FÍSICAS

Constante de la ley de los gases $R = 1{,}987_2$ cal $g\text{-mol}^{-1}\ ^\circ K^{-1}$
$= 82{,}05_7$ cm3 atm $g\text{-mol}^{-1}\ ^\circ K^{-1}$
$=$ 8,314, x 10^7 g $cm^2\ seg^{-2}\ g\text{-mol}^{-1}\ ^\circ K^{-1}$
$=$ 8,314, x 10^3 kg $m^2\ seg^{-2}\ kg\text{-mol}^{-1}\ ^\circ K^{-1}$
= 4,968, x 10^4 $lb_m\ ft^2\ seg^{-2}\ lb\text{-mol}^{-1}\ ^\circ R^{-1}$
= 1,544; x 103 ft $lb_f\ lb\text{-mol}^{-1}\ ^\circ R^{-1}$

Aceleración normal de la gravedad $g_0 =$ 980,665 cm seg^{-2}
$= 32{,}1740$ ft seg^{-2}

Constante de Joule (equivalente mecánico del calor) $J_c = 4{,}1840$ x 107 erg cal-t
$= 778{,}16$ ft ib, Btu^{-1}

Número de Avogadro $\tilde{N} = 6{,}02_3 \times 10^{23}$ moléculas $g\text{-mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann $\kappa = R/\tilde{N} =$ 1,380, x 10^{-16} erg $molécula^{-1}$ "K-t

Constante de Faraday $\mathcal{F} =$ 9,652 x 10^4 culombios-abs equivalente-g-t

Constante de Planck $h = 6{,}62_4$ x 10^{-27} erg seg

Constante de Stefan-Boitzmann $\sigma =$ 1,355 x 10^{-12} cal seg^{-1} cm-2 $^\circ K^{-4}$
$= 0{,}1712$ x 10^{-8} Btu $hr^{-1}\ ft^{-2}\ ^\circ R^{-4}$

Carga del electrón e = 1,602 x 10^{-19} culombios-abs

Velocidad de la luz $c = 2{,}99793$ x 10^{10} cm seg^{-1}

§ C. 3 FACTORES DE CONVERSIÓN

Para pasar cualquier magnitud física de unas unidades a otras, multiplicarla por el correspondiente valor que se indica en las tablas. Por ejemplo, supongamos que p vale 10 lb, in^{-2} y se quiere obtener su valor en dinas cm^{-2}. A partir de la Tabla C.3—2, se obtiene $p = 10 \times 6{,}8947 \times 10^4 = 6{,}8947 \times 10^5$ dinas cm-2 o g cm-1 seg^{-2}.

Además de las tablas que siguen, vamos a indicar ahora algunos factores de conversión frecuentemente utilizados:

Dada una magnitud en estas unidades	Multiplicar por	Para expresarla en estas unidades
Libras	453,59	Gramos
Kilogramos	2,2046	Libras
Pulgadas	2,5400	Centímetros
Metros	39,370	Pulgadas
Galones (U.S.)	3,7853	Litros
Galones (U.S.)	231,00	Pulgadas cúbicas
Galones (U.S.)	0,13368	Pies cúbicos
Pies cúbicos	28,316	Litros

TABLA C.3 – 1

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE F o MLt^{-2}

(Fuerza)

Dada una magnitud en estas unidades	Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades	g cm seg^{-2} (dinas)	kg m seg^{-2} (newtones)	lb_m ft seg^{-2} (poundals)	lb_f
g cm seg^{-2} (dinas)		1	10^{-5}	$7{,}2330 \times 10^{-5}$	$2{,}2481 \times 10^{-6}$
kg m seg^{-2} (newtones)		10^5	1	7,2330	$2{,}2481 \times 10^{-1}$
lb_m ft seg^{-2} (poundals)		$1{,}3826 \times 10^4$	$1{,}3826 \times 10^{-1}$	1	$3{,}1081 \times 10^{-2}$
lb_f		$4{,}4482 \times 10^5$	4,4482	32,1740	1

TABLA C.3–2

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE F/L^2 o $ML^{-1}t^{-2}$

(Presión, Densidad de **flujo** de **cantidad de** movimiento)

Dada una magnitud en estas unidades / Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades →	$g\ cm^{-1}\ seg^{-2}$ (dinas cm^{-2})	$kg\ m^{-1}\ seg^{-2}$ (newtones m^{-2})	$lb_m\ ft^{-1}\ seg^{-2}$ (poundals ft^{-2})	lb, ft^{-2}	$lb_f\ in^{-2}$ (psia)[a]	Atmósferas (atm)	mm Hg	in. Hg
$g\ cm^{-1}\ seg^{-2}$	1	10^{-1}	$6{,}7197 \times 10^{-2}$	$2{,}0886 \times 10^{-3}$	$1{,}4504 \times 10^{-5}$	$9{,}8692 \times 10^{-7}$	$7{,}5006 \times 10^{-4}$	$2{,}9530 \times 10^{-5}$
$kg\ m^{-1}\ seg^{-2}$	10	1	$6{,}7197 \times 10^{-1}$	$2{,}0886 \times 10^{-2}$	$1{,}4504 \times 10^{-4}$	$9{,}8692 \times 10^{-6}$	$7{,}5006 \times 10^{-3}$	$2{,}9530 \times 10^{-4}$
$lb_m\ ft^{-1}\ seg^{-2}$	$1{,}4882 \times 10^{1}$	1,4882	1	$3{,}1081 \times 10^{-2}$	$2{,}1584 \times 10^{-4}$	$1{,}4687 \times 10^{-5}$	$1{,}1162 \times 10^{-2}$	$4{,}3945 \times 10^{-4}$
$lb_f\ ft^{-2}$	$4{,}7880 \times 10^{2}$	$4{,}7880 \times 10^{1}$	32,1740	1	$6{,}9444 \times 10^{-3}$	$4{,}7254 \times 10^{-4}$	$3{,}5913 \times 10^{-1}$	$1{,}4139 \times 10^{-2}$
$lb_f\ in^{-2}$	$6{,}8947 \times 10^{4}$	$6{,}8947 \times 10^{3}$	$4{,}6330 \times 10^{3}$	144	1	$6{,}8046 \times 10^{-2}$	$5{,}1715 \times 10^{1}$	2,0360
Atmósferas	$1{,}0133 \times 10^{6}$	$1{,}0133 \times 10^{5}$	$6{,}8087 \times 10^{4}$	$2{,}1162 \times 10^{3}$	14,696	1	760	29,921
mm Hg	$1{,}3332 \times 10^{3}$	$1{,}3332 \times 10^{2}$	$8{,}9588 \times 10^{1}$	2,7845	$1{,}9337 \times 10^{-2}$	$1{,}3158 \times 10^{-3}$	1	$3{,}9370 \times 10^{-2}$
in. Hg	$3{,}3864 \times 10^{4}$	$3{,}3864 \times 10^{3}$	$2{,}2756 \times 10^{3}$	$7{,}0727 \times 10^{1}$	$4{,}9116 \times 10^{-1}$	$3{,}3421 \times 10^{-2}$	25,400	1

[a]Esta unidad se expresa abreviadamente por psia (libras por pulgada cuadrada absolutas) o psig (libras por pulgada cuadrada manométricas). La presión manométrica es igual a la presión absoluta menos la presión barométrica.

TABLA C.3 -3

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE FL o ML^2t^{-2}

(Energía, Trabajo, Momento)

Dada una magnitud en estas unidades,	Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en astas unidades-, g cm^2 seg^{-2} (ergios)	kg m^2 sao-2 (julios absolutos)	lb_m ft^2 seg^{-2}	ft i b ,	cal	Btu	hp-hr	kw-hr
g cm^2 seg^{-2}	1	10^{-7}	2,3730 x 10^{-6}	7,3756 x 10^{-8}	2,3901 x 10^{-8}	9,4783 x 10^{-11}	3.7231 x 10^{-14}	2,7778 x 10^{-14}
kg m^2 seg^{-2}	10^7	1	2,3730 x 10^1	7.37% x 10^{-1}	2,3901 x 10^{-1}	9,4783 x 10^{-4}	3,7251 x 10-7	2,7778 x 10^{-7}
lb_m ft^2 seg^{-2}	4.2140 x 10^5	4.2140 x 10^{-2}	1	3,1081 x 10^{-2}	1,0072 x 10^{-2}	3,9942 x 10^{-5}	1,5698 x 10^{-8}	1.17% x 10^{-8}
ft lb_f	1.3558 x 10^7	1,3558	32,1740	1	3.2493 x 10^{-1}	1,2851 x 10^{-3}	5,0505 x 10^{-7}	3,7662 x 10^{-7}
Calorías termoquímicas[a]	4,1840 x 10^7	4,1840	9,9287 x 10^1	3,0860	1	3.9657 x 10^{-3}	1,5586 x 10^{-6}	1.1672 x 10^{-6}
Btu	1,0550 x 10^{10}	1,0550 x 10^3	2,5036 x 10^4	778.16	2,5216 x 10^2	1	39301 x 10^{-4}	2,9307 x 10-4
Caballos da vapor-hora	2,6845 x 10^{13}	2,6845 x 10^6	6,3705 x 10^7	1,9800 x 10^6	6.4162 x 10^5	2,5445 x 10^3	1	7.4570 x 10^{-1}
Kilovatios-hora absolutos	3,6000 x 10^{13}	3,6000 x 10^6	8,5429 x 10^7	2,6552 x 10^6	8.6042 x 10^5	3.4122 x 10^3	1,3410	1

[a]Esta unidad, abreviadamente cal, se utiliza en las tablas de termodinámica química. Para convertir las magnitudes expresadas en calorías de la International Steam Table (abreviadamente I.T.cal) en esta unidad, multiplicar por 1,000654.

TABLA C.3 -4

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES* DE $ML^{-1}t^{-1}$ o FtL^{-2} o MOLES $L^{-1}t^{-1}$

(Viscosidad, Densidad por difusividad, Concentración por difusividad) .

Dada una magnitud en estas unidades ↓ / Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades →	$g\ cm^{-1}\ seg^{-1}$ (poises)	$kg\ m^{-1}\ seg^{-1}$	$lb_m\ ft^{-1}\ seg^{-1}$	$lb_f\ seg\ ft^{-2}$	Centipoises	$lb_m\ ft^{-1}\ hr^{-1}$
$g\ cm^{-1}\ seg^{-1}$	1	10^{-1}	$6{,}7197 \times 10^{-2}$	$2{,}0886 \times 10^{-3}$	10^{2}	$2{,}4191 \times 10^{2}$
$kg\ m^{-1}\ seg^{-1}$	10	1	$6{,}7197 \times 10^{-1}$	$2{,}0886 \times 10^{-2}$	10^{3}	$2{,}4191 \times 10^{3}$
$lb_m\ ft^{-1}\ seg^{-1}$	$1{,}4882 \times 10^{1}$	1,4882	1	$3{,}1081 \times 10^{-2}$	$1{,}4882 \times 10^{3}$	3600
lb, $seg\ ft^{-2}$	$4{,}7880 \times 10^{2}$	$4{,}7880 \times 10^{1}$	32,1740	1	$4{,}7880 \times 10^{4}$	$1{,}1583 \times 10^{5}$
Centipoises	10^{-2}	10^{-3}	$6{,}7197 \times 10^{-4}$	$2{,}0886 \times 10^{-5}$	1	2,4191
$lb_m\ ft^{-1}\ hr^{-1}$	4.1338×10^{-3}	$4{,}1338 \times 10^{-4}$	$2{,}7778 \times 10^{-4}$	$8{,}6336 \times 10^{-6}$	$4{,}1338 \times 10^{-1}$	1

[a]Cuando aparece moles en las unidades dadas y en las que se desea transformar, el factor de conversión para las correspondientes unidades de masa es el mismo.

TABLA C.3–5

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE $MLt^{-3}T^{-1}$ o $Ft^{-1}T^{-1}$

(Conductividad calorífica)

Dada una magnitud en estas unidades	Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades →	g cm seg^{-3} $°K^{-1}$ (ergios seg^{-1} cm^{-1} $°K^{-1}$)	kg m seg^{-3} $°K^{-1}$ (vatios m^{-1} $°K^{-1}$)	lb_m ft seg^{-3} $°F^{-1}$	lb_f seg^{-1} $°F^{-1}$	cal seg^{-1} cm^{-1} $°K^{-1}$	Btu hr^{-1} ft^{-1} $°F^{-1}$
g cm seg^{-3} $°K^{-1}$		1	10^{-5}	$4{,}0183 \times 10^{-5}$	$1{,}2489 \times 10^{-6}$	$2{,}3901 \times 10^{-8}$	5.7780×10^{-6}
kg m seg^{-3} $°K^{-1}$		10^5	1	4.0183	$1{,}2489 \times 10^{-1}$	$2{,}3901 \times 10^{-3}$	$5{,}7780 \times 10^{-1}$
Ib,,, ft seg^{-3} $°F^{-1}$		$2{,}4886 \times 10^4$	$2{,}4886 \times 10^{-1}$	1	$3{,}1081 \times 10^{-2}$	$5{,}9479 \times 10^{-4}$	1.4379×10^{-1}
lb_f seg^{-1} $°F^{-1}$		$8{,}0068 \times 10^5$	8,0068	$3{,}2174 \times 10^1$	1	$1{,}9137 \times 10^{-2}$	4,6263
cal seg^{-1} cm^{-1} $°K^{-1}$		$4{,}1840 \times 10^7$	$4{,}1840 \times 10^2$	$1{,}6813 \times 10^3$	$5{,}2256 \times 10^1$	1	$2{,}4175 \times 10^2$
Btu hr^{-1} ft^{-1} $°F^{-1}$		$1{,}7307 \times 10^5$	1,7307	6,9546	$2{,}1616 \times 10^{-1}$	$4{,}1365 \times 10^{-3}$	1

TABLA C.3–6

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE L^2t^{-1}

(Difusividad de cantidad de movimiento, Difusividad térmica, Difusividad molecular)

Dada una magnitud en estas unidades ↓ / Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades →	$cm^2\ seg^{-1}$	$m^2\ seg^{-1}$	$ft^2\ hr^{-1}$	Centistokes
$cm^2\ seg^{-1}$	1	10^{-4}	3,8750	10^2
$m^2\ seg^{-1}$	10^4	1	$3{,}8750 \times 10^4$	10^6
$ft^2\ hr^{-1}$	$2{,}5807 \times 10^{-1}$	$2{,}5807 \times 10^{-5}$	1	$2{,}5807 \times 10^1$
Centistokes	10^{-2}	10^{-6}	$3{,}8750 \times 10^{-2}$	1

TABLA C.3–7

FACTORES DE: CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES DE $Mt^{-3}T^{-1}$ o $FL^{-1}t^{-1}T^{-1}$

(Coeficientes de transmisión de calor)

Dada una magnitud en estas unidades →	Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades ↓	$g\ seg^{-3}\ °K^{-1}$	$kg\ seg^{-3}\ °K^{-1}$ (vatios m^{-2} $°K^{-1}$)	$lb_m\ seg^{-3}\ °F^{-1}$	$lb_f\ ft^{-1}\ seg^{-1}$ $°F^{-1}$	$cal\ cm^{-2}\ seg^{-1}$ “K-1	Vatios cm^{-2} “K-1	Btu $ft^{-2}\ hr^{-1}$ “F-1
$g\ seg^{-3}\ °K^{-1}$		1	10^{-3}	1.2248 x 10^{-3}	3,8068 x 10^{-5}	2,3901 x 10^{-8}	10^{-7}	1,7611 x 10^{-4}
$kg\ seg^{-3}\ °K^{-1}$		103	1	1.2248	3.8068 x 10^{-2}	2.3901 x 10^{-5}	10^{-4}	1,7611 x 10^{-1}
Ib, $seg^{-3}\ °F^{-1}$		8,1647 x 10^{2}	8.1647 x 10^{-1}	1	3.1081 x 10^{-2}	1,9514 x 10^{-5}	8,1647 × 10^{-5}	1,4379 × 10^{-1}
Ib, $ft^{-1}\ seg^{-1}\ °F^{-1}$		2,6269 x 10^{3}	2.6269 x 10^{1}	32.1740	1	6.2784 x 10^{-4}	2.6269 x 10^{-3}	4.6263
cal $cm^{2}\ seg^{-1}\ °K^{-1}$		4,1840 x 107	4,1840 x 10^{4}	5,1245 x 10^{4}	1,5928 x 103	1	4,1840	7.3686 x 103
Vatios $cm^{-2}\ °K^{-1}$		107	10^{4}	1,2248 x 10^{4}	3,8068 x 10^{2}	2,3901 × 10^{-1}	1	1,7611 x 10^{3}
Btu $ft^{-2}\ hr^{-1}\ °F^{-1}$		5,6782 x 10^{3}	5.6782	6,9546 .	2.1616 x 10^{-1}	1.3571 x 10^{-4}	5,6782 × 10^{-4}	1

TABLA C.3 -8

FACTORES DE CONVERSIÓN PARA MAGNITUDES QUE TIENEN LAS DIMENSIONES' DE $ML^{-2}t^{-1}$ o MOLES $L^{-2}t^{-1}$ o $FL^{-3}t$

(Coeficientes de transferencia de materia k_{xi})

Dada una magnitud en estas unidades,	Multiplicar por el valor de la tabla para convertirla en estas unidades+	g cm^{-2} seg- 1	kg m^{-2} seg^{-1}	lb_m ft^{-2} seg^{-1}	lb_f ft^{-3} seg	lb_m ft^{-2} hr^{-1}
g cm^{-2} seg^{-1}		1	10^1	2,0482	6,3659 x 10^{-2}	7,3734 x 10^3
kg m^{-2} seg^{-1}		10^{-1}	1	2,0482 x 10^{-1}	6,3659 x 10^{-3}	7,3734 x 10^2
Ib, ft^{-2} seg^{-1}		4,8824 x 10^{-1}	4,8824	1	3,1081 x 10^{-2}	3600
lb_f ft^{-3} seg		1,5709 x 10^1	1,5709 x 10^2	32,1740	1	1,1583 x 10^5
Ib, ft^{-2} hr^{-1}		1,3562 x 10^{-4}	1,3562 x 10^{-3}	2,7778 x 10^{-4}	8,6336 x 10^{-6}	1

*Cuando aparecen moles en las unidades dadas y en las que se desea transformar, el factor de conversión para las correspondientes unidades de masa es el mismo.

NOTACIÓN

Salvo que se indique otra cosa, los números entre paréntesis se refieren a las ecuaciones en las que aparecen los símbolos por primera vez o se da su deficición. Las dimensiones se expresan en función de masa (M), longitud (L), tiempo (t) y temperatura (T). Los símbolos en negritas corresponden a vectores y tensores, cuyas notaciones se tratan en el Apéndice A. No se incluyen en esta lista los símbolos que intervienen con muy poca frecuencia,. o que se utilizan en una sola sección.

A = área, L^2.

$A = U - TS$ = Energía libre de Helmholtz o «función de trabajo» (7.3—1). ML^2/t^2.

a = coeficiente de absorción (14.2—1), adimensional.

a = área interfacial por unidad de volumen de lecho (6.4—4), L^{-1}.

C_d = coeficiente de descarga (7.5—34), adimensional.

$\hat{C}_p$ = calor específico a presión constante por unidad de masa (8.1 —7), L^2/t^2T.

$\hat{C}_v$ = calor especifico a volumen constante por unidad de masa (8.3—6), L^2/t^2T.

c = concentración molar total (§ 16.1), moles/L^3

c = velocidad de la lux (14.1—1), L/t.

c_i = concentración molar de la especie i (16.1—2), moles/L^3

D = longitud característica utilizada en análisis dimensional o bien diámetro de la esfera o del cilindro, L.

D_p = diámetro de la partícula (6.4—6), L.

$\mathscr{D}_{AB}$ = difusividad binaria para el sistema A-B (16.2—1), L^2/t.

D_{AB} = difusividad binaria para el sistema A-B, basada en la energía libre como fuerza impulsora (18.4—14), L^2/t.

D_A^T = coeficiente de difusión térmica binaria para A en el sistema A-B (18.4—14), M/Lt.

$\mathscr{D}_{ij}$ = difusividad binaria para el sistema i—j (18.4-19) L^2/t.

D_{ij} = difusividad de la pareja ***i-j*** en un sistema de varios componentes, basada sobre la energía libre como fuerza impulsora **(18.4—8)**, L^2/t.

D_i^T = coeficiente de difusión térmica en un sistema de varios componentes para la especie ***i*** **(18.4—11)**, M/Lt.

$\mathscr{D}_{im}$ = difusividad binaria efectiva de ***i*** en una mezcla de varios componentes **(18.4—21)**, L^2/t.

d = diámetro molecular (1, **4—3)**, L.

$E = U + K + \Phi$ = energía total del fluido (10.1—15), ML^2/t^2.

E_v = velocidad total de disipación viscosa de energía mecánica **(7.3—1)**, ML^2/t^3.

e = 2,71828 . . .

e = emisividad **(14.2—3)**, adimensional.

e = densidad de flujo total de energía con relación a coordenadas estacionarias **(18.3—9)**, M/t^3.

e_v = factor de pérdidas por fricción en relación con la disipación viscosa (7.4 — 5), adimensional.

$F = F_n + F_t = F_k + F_s$ = fuerza de un fluido que actúa sobre un sólido adyacente (§§ 2.6, **6.3)**, ML/t^2.

$F^{(m)}$ = velocidad de adición de **cantidad** de movimiento a un sistema macroscópico debido a la transferencia de materia a través de las superficies que lo limitan **(21.4—7)**, ML/t^2.

F_{12} = factor de visión directa **(14.4—9)**, adimensional.

F_{12} = factor de visión indirecta **(14.4— 15)**, adimensional.

$\mathscr{F}_{12}$ = combinación del factor de visión y la emisividad **(14.5—4)**, adimensional.

f = factor de fricción o coeficiente de resistencia (6.1 —1), adimensional.

G = velocidad **másica** (6.4-10, M/tL^2.

G = $H - TS$ = energía libre de **Gibbs** o **«entalpia** libre» **(7.3—1)**, ML^2/t^2.

g = aceleración de la gravedad **(3.2—8)**, L/t^2.

g_i = fuerza total por unidad de masa que actúa sobre el componente ***i*** **(18.3—2)**, L/t^2.

g_c = factor de **conversión** gravitacional **(1.1—6)**, **adimensional.**

$H = U + pV$ = entalpia **(15.1—5)**, ML^2/t^2.

h, h,, h_{ln}, h_a, h_m = coeficientes de **transmisión** de calor **(9.1—2, § 13.1)**, M/t^3T.

h = constante de Planck **(14.1—2)**, ML^2/t.

h = altura (2.3—10), L.

i = $\sqrt{-1}$ (4.3-12).

J_e = equivalente mecánico del calor (8.1— 1 1), adimensional.

J_i = densidad de flujo molar de i con relación a la velocidad media de masa (16.1—8), moles/tL^2.

$J_i^\star$ = densidad de flujo molar de la especie i con relación a la velocidad media molar (16.1 —10), moles/tL^2.

j_i, $j_i^{(x)}$, $j_i^{(p)}$, $j_i^{(\rho)}$, $j_i^{(T)}$ = densidades de flujo de materia de la especie i con relación a la velocidad media de masa (16.1-7, 18.4—7), M/tL^2.

$j_i^\star$ = densidad de flujo de materia de la especie i con relación a la velocidad media molar (16.1—9), M/tL^2.

j_D = factor-j de Chilton-Colburn para transferencia de materia (Tabla 21.2—1), adimensional.

j_H = factor-j de Chilton-Colburn para transmisión de calor (Ec. 13.2—19), adimensional.

κ = constante de Boltzmann (1.4—1), ML^2/t^2T.

K = energía cinética (7.3—1), ML^2/t^2.

K = densidad de flujo adimensional de materia en la pared (19.3—28a).

k = conductividad calorífica (8.1—1), ML/t^3T.

k_T = relación de difusión térmica (18.4— 15), adimensional.

k_e = conductividad eléctrica (8.5—1), ohm^{-1} cm-r.

k_n'' = constante de velocidad de reacción química heterogénea (17.0—3), moles$^{1-n}/L^{2-3n}t$.

k_n''' = constante de velocidad de reacción química homogénea (17.0—2), moles $^{1-n}/L^{3-3n}t$.

k_x = coeficiente de transferencia de materia en un sistema binario (21 .1—8), moles/tL^2.

k_{xi} = coeficiente de transferencia de materia de la especie i en una mezcla de varios componentes (21.8—3), moles/tL^2.

L = longitud de un tubo u otra longitud característica, L.

l = longitud de mezcla de Prandtl (5.3—2), L.

M = peso molecular medio molar (Tabla 16.1 —1), M/mol.

M_A = peso molecular de A, M/mol.

$\mathfrak{M}$ = moles de substancia (22.1-4).

$\mathfrak{M}_i$ = moles del componente i (22.1-3).

m = parámetro del modelo de Ostwald-de Waele (1.2—3), las dimensiones dependen del valor numérico de n.

m = masa de una molécula (1.4—1), M.

m = masa de un sistema de flujo (7.1—1), M.

m_i = masa del componente i de un sistema de flujo (22.1 —1), M.

N = velocidad de rotación de un eje (3.7—25), t^{-1}.

N_i = densidad de flujo molar con respecto a coordenadas estacionarias (16.1—6), moles/L^2t.

n_i = densidad de flujo de materia con respecto a coordenadas estacionarias (16.1—5), M/L^2t.

n = concentración molecular o densidad de número (1.4 —2), L^{-3}.

n = parámetro del modelo de Ostwald-de Waele (1.2—3), adimensional.

n = constante de Deissler (5.3—4), adimensional.

$\tilde{N}$ = número de Avogadro (g-mol)$^{-1}$.

$\boldsymbol{P}$ = cantidad de movimiento (7.2—1), ML/t.

$\mathscr{P}$ = $p + \varrho g h$ (para ϱ y g constantes) (2.3—10), M/LT^2.

p = presión del fluido, M/Lt^2.

$p^{(r)}$ = presión radiante (14.3—2), M/Lt^2.

Q = velocidad volumétrica de flujo (2.3 —19), L^3/t.

Q = velocidad de flujo de energía a través de una superficie (8.1-1 y 15.1—2), ML^2/t^3.

$Q_{12}^{\rightarrow}$ = flujo de energía radiante desde una superficie 1 a una superficie 2 (14.4—5), ML^2/t^3.

Q_{12} = intercambio neto de energía radiante entre la superficie 1 y la superficie 2 (14.4—8), ML^2/t^3.

q, $q^{(c)}$, $q^{(d)}$, $q^{(x)}$ = densidades de flujo de energía relativas a la velocidad media de masa (8.1-6 para fluidos puros, 18.4-2 para mezclas), M/t^3.

R = constante de *los* gases, ML^2/t^2T mol.

R = radio de la esfera o del cilindro, L.

R_h = radio hidráulico (6.4—3), L.

R_A = velocidad molar de producción de la especie A (18.1 —10), moles/tL^3.

R_φ, R_T, R_{AB} = relaciones de densidad de flujo (21.5—40), adimensional.

r = distancia radial en coordenadas cilíndricas y esféricas, L.

r_A = velocidad de producción de la especie A (18.1—5), M/tL^3.

S = área de la sección transversal, L^2.

S = vector que representa el área de la sección transversal y su orientación (7.2—1), L^2.

S_e, S_n, S_v, S_c = manantiales de energía (9.2—1), M/Lt^3.

$s = R - r$ = distancia medida hacia el interior del fluido a partir de la superficie limitante en coordenadas cilíndricas (5.3—5), L.

s^+ = distancia adimensional medida hacia el interior del fluido en coordenadas cilíndricas (5.3— 11).

T = temperatura *absoluta*, T.

t = tiempo, t.

U = energía interna (10.1—2), ML^2/t^2.

U = coeficiente global de transmisión de calor (9.6-16); M/t^3T.

$\bar{u}$ = velocidad molecular media aritmética (1.4—1), L/t.

V = velocidad característica en análisis dimensional (3.7—1), L/t.

V = volumen, L^3.

v = velocidad media de masa (16.1—1), L/t.

v_i = velocidad de la especie i (16.1— 1), L/t.

v_s = velocidad del sonido (8.4—2), L/t.

v_∞ = velocidad de aproximación (2.6—1), L/t.

v^+ = velocidad adimensional (5.3— íO)

$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ = velocidad de referencia (5.3—9), L/t.

v^* = velocidad media molar (16.1—2), L/t.

W = velocidad de producción de trabajo sobre los alrededores (7.3—1), ML^2/t^3.

$\mathcal{W}$ = velocidad de flujo molar (22.1—4), moles/t.

$\mathcal{W}_A$ = velocidad de flujo molar de la especie A a través de una superficie (17.2-21, 21.1—7), moles/t.

w = vector que representa la velocidad de flujo de masa y su dirección (7.2—2), M/t.

w = velocidad de flujo de masa (7.1—2), M/t.

w_A = flujo de masa de la especie A a través de una superficie (22.1 —1), M/t.

x = coordenada rectangular, L.

x_i = fracción molar de la especie i (Tabla 16.1— 1), adimensional.

y = coordenada rectangular, L.

y_i = fracción molar de la especie i (21.3—1), adimensional.

Z = frecuencia de colisión de pared (1.4—2), $L^{-2}t.^{-1}$

z = coordenada rectangular, L.

$\alpha = k/\rho\hat{C}_p$ = difusividad térmica (8.1—17), L^2/t.

β = coeficiente térmico de expansión volumétrica (9.9—6*a*), T^{-1}.

$\Gamma(x)$ = la función gamma de x

Γ = velocidad de flujo de masa de una película descendente -por unidad de anchura de la pared mojada (2.2—20), M/Lt.

$\gamma = \hat{C}_p/\hat{C}_v$ (10.5—75), adimensional.

A = velocidad del tensor de deformación (3.6—1), t^{-1}.

$\Delta a = a_2 - a_1$, donde 1 y 2 se refieren a las dos superficies de control.

δ = espesor de la película descendente (2.2— 15), espesor ficticio de película (17.4-11 y 21.5—5), espesor de penetración (4.4—1), y espesor de capa límite (4.4—15), *L*.

$\boldsymbol{\delta}$ = tensor unidad (Apéndice A), adimensional.

δ_i = vector unitario (Apéndice A), adimensional.

ϵ, ϵ_{AB} = energía máxima de atracción entre dos moléculas (1.4—10, 16.4—16), ML^2/t^2.

ϵ = fracción de huecos (6.4—4), adimensional.

ζ = coeficiente de concentración de-expansión volumétrica (18.3—13), adimensional.

ζ = variable de posición adimensional, definida de diversas formas.

η = variable de posición adimensional, definida de diversas formas.

η = viscosidad no-newtoniana (3.6—2), M/Lt.

Θ = temperatura adimensional, definida de diversas formas.

θ = ángulo en coordenadas cilíndricas o esféricas (Fig. A. 6— 1), radianes.

θ_v, θ_T, θ_{AB} = factores adimensionales de corrección (21.4-12, 13 Y 14).

κ_1 = constante de Prandtl (5.3—5), adimensional.

κ_2 = constante de von Kármán (5.3-3); adimensional.

Λ = relaciones de difusividad (19.3-19, 20 y 21), adimensionales.

λ = longitud de onda de la radiación electromagnética (14.1—1), *L*.

λ = recorrido libre medio molecular (1.4—3), *L*.

μ = viscosidad (1.1-1, 3.2-11 a 16), M/Lt.

μ_0 = parámetro del modelo de Bingham (1.2—2*a*), M/Lt.

ν = frecuencia de la radiación electromagnética (14.1— 1), t^{-1}.

ν = μ/ρ = viscosidad cinemática (1.1—3), L^2/t.

ξ = variable de posición adimensional, definida de diversas formas.

Π = perfiles adimensionales (19.3-16, 17 y 18).

π = 3,14159...

$\boldsymbol{\pi}$ = tensor de presión (18.3—2), M/t^2L.

ρ = nm = densidad del fluido (1 .1—3), M/L^3.

ρ_i = concentración de masa de la especie i (16.1 —1), M/L^3.

σ, σ_{AB} = diámetro de colisión (1.4-10, 16.4—15), L.

σ = constante de Stefan-Boltzmann (14.2— 10), M/t^3T^4.

$\boldsymbol{\tau}$ = tensor de esfuerzo cortante [1.1—2, 3.2-8, 3.2-3 (componentes)], Mt^2/L.

τ_0 = parámetro del modelo de Bingham (1.2—2a), M/t^2L.

τ_0 = valor del esfuerzo cortante en una interfase fluido-sólido (5.3—7), M/t^2L.

Φ = energía potencial (7.3—1), ML^2/t^2.

Φ_v = función de disipación viscosa (10.1—21), t^{-2}.

$\boldsymbol{\Phi}$ = $\rho\boldsymbol{vv} + \boldsymbol{\pi}$ = densidad de flujo total de cantidad de movimiento con relación a coordenadas estacionarias (18.3—8), M/t²L.

ϕ = ángulo en coordenadas esféricas (Fig. A. 6—1), radianes.

ϕ_v, ϕ_T, ϕ_{AB} = factores de velocidad (21.5-37, 38 y 39), adimensional.

ψ = función de corriente (4.2-1 y Tabla 4.2-1); las dimensiones dependen del sistema coordenado.

Ω = velocidad angular (3.5—11), radianes/t.

Ω_μ = integral de colisión (1.4—18), adimensional.

Ω_k = integral de colisión (8.3— 13), adimensional.

$\Omega_\mathcal{D}$ = integral de colisión (16.4— 13), adimensional.

ω_i = fracción de masa de i (Tabla 16.1— 1), adimensional.

Líneas superiores[1]

$\sim$ por mol

$\wedge$ por unidad de masa

$-$ parcial molar (18.4-8)

$-$ tiempo ajustado

[1] Obsérvese que las señales $\wedge$, $\sim$ y $-$ (cuando se utilizan para magnitudes parciales molares) sirven para indicar las unidades de las magnitudes sobre las que están situadas. Por ejemplo, H [=]ML²/t², mientras que $\hat{H}$ [=]L²/t², $\bar{H}$ [=]ML²/t² mol, $\bar{H}_i$[=]ML²/t² mol.

Corchetes

$\langle a \rangle$	valor medio de a en una sección transversal de flujo (7.2— 1, 9.8-32j.
[=]	tiene las dimensiones de
( ), [ ], { }	utilizados en operaciones con vectores; véase Apéndice A.

Índices superiores

#	reducida con relación a 1 atm (§ 1.3)
0	valor a l atm u otro estado de referencia (§ 1.3).
●	coeficiente de transferencia corregido para velocidad finita de transferencia de materia (21.4-4, 5 y 6).
*	reducida con respecto a una dimensión característica (3.7—1).
	desviación respecto del valor de tiempo ajustado (5.1—6).
(t)	turbulento (5.2-5).
(l)	laminar (5.2-8).
(m)	magnitud que atraviesa una superficie de transferencia de materia.

Subíndices

A, B	especies de un sistema binario (§ 16.1)
a	fuerza impulsora media aritmética o coeficiente de transferencia con ella relacionado (13.1-3).
b	valor global o de «mezcla en taza» de la corriente (9.8-33).
c	en el punto crítico (§ 1.3).
i, j, k	especies en un sistema de varios componentes (§ 16.1).
ln	fuerza impulsora media logarítmica o coeficiente de transferencia con ella relacionado (13.1-4).
loc	coeficiente local de transferencia (13.1-5).
m	coeficiente medio de transferencia para un objeto sumergido (13.1-6).
r	reducida con relación al valor crítico (§ 1.3).
tot	magnitud total en un sistema macroscópico (7.1-1).
0	magnitud evaluada en una superficie
1,2	magnitud evaluada en las secciones transversales «1» y «2» (7.1-1).
1	fuerza impulsora en la sección transversal « 1 » 0 coeficiente de transferencia con ella relacionado (13.1—2).

Grupos adimensionales frecuentemente utilizados (véase también la Tabla 21.2-1)

Br = número de Brinkman (9.4-11).
Fr = número de Froude (3.7-15).
Gr = número de Grashof para transmisión de calor (9.9— 17).
Gr_{AB} = número de Grashof para transferencia de materia (18.6-13).
Nu = número de Nusselt para transmisión de calor (§ 13.2).
Nu_{AB} = número de Nusselt para transferencia de materia (§ 21.2)
Pr = número de Prandtl (8.3-16).
Re = número de Reynolds (3.7-14).
Sc = número de Schmidt (18.6— 12).
St = número de Stanton (Fig. 13.2—2).

Operaciones matemáticas

D/Dt = derivada substancial (3.0-2, A.3—15).

$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ = la función de error de x.

$\exp x = e^x$ = la función exponencial de x.

$\ln x$ = logaritmo de x en base e.

$\log x$ = logaritmo de x en base 10.

$\Gamma(x, u) = \int_0^u t^{x-1} e^{-t}\, dt$ = la función gamma incompleta.

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ = la función gamma (completa).

∇ = operador «nabla» o «del» (véase el Apéndice A).

ÍNDICE ALFABÉTICO DE AUTORES

Abbot, C. G.. **14-29**
Ackermann. G., **21-24**
Acrivos, A., 7-34. **10-12,** 19-18, 22-28
Adamson, T. C., **19-11**
Alberty, R. A., **1-16, 16-22, 17-2**
Amundson. N. R., 22-28
Andrew. S. P. S.. **19-37**
Anzelius, A., 22-22
Aris, R., 17-25, **17-29**
Arnold, J. H., 19-5

Baars, G. M.. **18-31**
Babcock, B. D., 7-34
Babo, L., von. **1-19**
Baldwin, L. V.. **22-16**
Batchelor, G. K., 5.22
Bateman, H., 22-22
Becker, H. A., **6-16**
Beckers, H. L., **12-11, 13-15**
Beckmann. W., **10-26**
Bedingfield, C. H., Jr., **18-4, 21-17**
Benedict, M., **19-15**
Bermett, G. W., **18-37**
Bernhardt, E. C., 2-34, Il-21
Berry, V. J.. Jr., **16-16**
Bird, B.. **7-29**
Bird. R. B., **1-22,** 2-36, 2-37, **3-10,** 3-26, **3-5**1, 4.4, **4-8, 4-31,** 5-26, **6-26, 7-1,** 7-4. 8-7. **8-16, 8-17,** 8-25.9.48, **10-42, 10-45, 11-10,** 15-5, 16.4, **16-12, 16-14, 16-19, 16-20, 16-21,** 18.12, **18-13,** 18.17, **18-18, 18-19,** 18-27, 19.37. B-3, B-4
Birkhoff, G., **4-16**
Blasius. H., 4-24, **13-24, 19-25**
Boas, A.. **19-15**
Boer, J. de, **14-8**
Boussinesq, T. V., **5-8**
Bowman, J. R., **19-15**
Bridgman, P. **W., 8-21**
Brinkman, H. C., 4.29, **6-18, 9-16, 11-10.**
Broer, L. J. **F.,** 23-52, 9-8
Bromley, L. A., **8-19**
Brown, H.. **18-24**
Brown, H. E., **13-31**
Buckingham, E.. **2-18**
Buddenberg. J. **W., 1-25, 1-31**
Burroughs, D. B.. 1.18
Bussmann, K.. **19-25**

Calvert, S., 2-22
Carley, J. F., 2-34
Carman, E. H., **8-20,** 8-25
Carman, P. C, 4-29
Carr, N. D... **1-18**
Carslaw, H. **S.,** ll-l, **11-5, 11-6, 11-7, 11-8, 11-10, 11-14, 11-23, 14-31, 18-6, 19-1, 19-8** 22.27
Cash, F. M., 2-34
Cichelli, M. T., **19-15**
Coe, J. R... Jr.. 1-8
Colburn. **A. P., 3-12, 15-30, 18-35, 21-2, 21-4, 21-13,** 21-24, 22.8
Comings, E. W., **1-19, 8-12,** 8-13, 8-25
Condon, E. U., **3-10**
Corcoran, W. H.. 5-9, **5**13
Corrsin. S., **12-11, 12-12, 20-2, 20-8**
Cottington, R. L., 1-8
Cowling, T. G.. **1-22, 16-19, 18-20**
Crank., J.. **18-6, 19-1, 19-7, 19-35**
Crawford, B. **L., Jr., 10-45, 18-12**
Curtiss, C. F., **1-22, 1-25, 3-10,** 3-26. 4-8 **4-31, 8-7, 8-16, 8-17, 10-42, 10-45, 16-12, 16-19, 16-21, 18-12, 18-13, 18-17, 18-18, B-3**

Chambré. P. L.. **19-18**
Chandrasekhar, **S., 14-25**
Chang, K. C., **21-24**
Chang, P., 16-23, **16-24**
Chapman, S., **1-22,** 16-19
Chilton, T.. H.. **21-13**
Christiansen, C., **14-31**
Christiansen. E. B.. **6-16**
Chu, B.-T., 10-8
Churchill, R. V.. **11-8, 11-10, 11-14,** Il-15
Churchill, S. W.. 13-22

Danckwerts. P. **V., 19-7, 19-32, 19-35**
Daniels, F.,, 1-16,, 14-29,, 16-22,, 17-2
Darnell, W. H., 2-34
Deissler, **R. G., 5-8, 5-12, 12-7, 12-10,** 12-14, **13-18, 20-5**
Denbigh. K. G., **18-12**
Dougherty, E. L., **18-17**
Douglas, W. J. M., **13-22**
Drake, R. **M.. Jr., 9-26, 11-16,** 13-2
Drew, T. B:, 2-36, 6.18, 18.4, **18-35, 21-17, 21-24**
Drickamer, H. G.. 17-4, **18-17, 19-36**
Duffie, J. A.. **14-29**
Dwight, H. B., 4-4

Eagle, A., **9-31**
Eckert, E. R. G.. 9-26, **11-16,** 13-2, **13-24**
Eirich, F. R., **2-18,** 2-36, 3-35
Eisenberg, **M., 19-**Il
Emde, F.. 4-7. **19-27**

Emmert, R. E., 17-4
Engen, J. M.. 2-22
Ergun, S., **6-20,** 6-22
Erk, S., 13-2, **13-5,** 13-30
'Eucken, A., 8-18
Eyring, H., 1-13, **1-27,** 1-29, 8-22, 16-23

Fairbanks, D. F.. 19-14
Falkenhagen, H., 6-28
Ferguson, R. M., 9-31
Feshbach, H., A-3, A-8, **A-15,** A-16, **A-21,** A-26
Feyk, J. A., **19-25**
Foreman, R. W., **18-15**
Fox, E. A., 18-31
Frank-Kamenetskii, 16-26
Franz, R.. 28-24
Fredrickson, A. G., 2-37, 3-30, 3-52, 7-31
Friedlander, S. K., 19-11
Frössling, N.. **13-22**
Furry, W. H., 18-15
Fürth, R., 16-22

Gamson, B., 13-25
Garner, F. H., **17-25**
Genereaux, R. P., **6-18**
Gex, V. E., 18-31
Gibson, R. E., 1-19
Gilliland, E. R., 6-16
Glasstone. S., **1-27,** 16-23
Godfrey, T. B., 1-8
Goldstein, S., **4-9,** 5-2, **9-31, 11-16, 12-2,** 12-3
Görtler, H., 5-28
Graetz, L., 13-12
Gregg, J. L., **10-26**
Grew, K. **E.,** 18-15
Grigull, U., **8-19,** 8-22, 16-14, 16-20, 16-24
Grimley, S. S., 2-8
Gröber, H., **13-2,** 13-5, 13-30
Groot, S. R. de, 18-12
Groothuis, H., **17-25**
Grossman, L. M., 7-34
Guggenheim, E. A., 18-25

Hagen, G.. 2-14
Hall, J. G., 22-16
Hallman, T. M., 9-34, 11-12, **12-11,** 12-15, 13-16
Hammerton, D., 17-25
Hanratty, T. J.. 2-22
Hardy, **R.** C., 1-8
Hawkins, G. A., 13-2
Heitler, W., 14-1
Herning, **F.,** 1-27
Higbie, R.. **17-24,** 21-36
Hildebrand. F. B., 19-34
Hinze, J. O., 5-22
Hirschfelder, J. O., **1-22,** 1-25, **3-10,** 8-7, **8-16, 8-17, 8-18, 8-25. 10-42, 10-45, 16-12, 16-19, 16-20, 16-21, 18-12,** 18-13, **18-17, 18-18,** B-3, **B-4**
Hoelscher, H. E., 21-48
Hohenemser, K.. 3-34
Hoopes, J. W.. ir.. 2-36
Hottel, H. C, **14-7, 14-17, 14-18,** 14-22. 15-36
Hougen, 0. A.. 1-16, 1-19, **8-11,** 8-22. 13-25, **15-4,** 11-28, 17-29, **18-19,** 21-18, 22-4, 22-7, **22-8. 22-22.** A-35
Houpeurt. A., 4-29
Howarth, L., **5-14, 12-3**
Hsu, H.-W., 18-19, **18-27,** 19-11
Hu, S., 6-16
Hughes. R. **R., 6-16**

Ibbs, T. L., **18-15**
Ince, S., **3-11**

Jaeger, J. C., **11-1, 11-5, 11-6, 11-7, 11-8, 11-10, 11-14, 11-23, 14-31, 18-6, 19-1, 19-8. 22-27**
Jahnke, E., **4-7,** 19-27
Jakob, M., **8-17,** 8-22. 9-7, 9-26, 9-28, **9-30, 11-10, 12-14, 13-2, 13-12, 13-37. 14-18, 14-22, 14-31**
Johnston, H. L., **1-9.** 1-26
Johnstone, R. E., 3-38
Jones, A. L., **18-15**
Jones. R. C.. **18-15**
Joos, 'G., **14-8**
Junk, W. A., **8-12, 8-13,** 8-25

Kalitinsky, A., **15-36**
Kannuluik. W. G.. 8-20. 8-24
Karim, S. **M., 3-10**
Kármán, T. von, **5-8,** 5-9, **5-14,** 5-22, **6-10,** 6-25
Katz, D. L., 5-26
Kays, W. M., **2-15,** 7-29, **13-19**
Kennard, E. H., **1-20**
Kern, D. Q., **15-33**
Kincaid, J. F., 1-29
King, L. V., 13-37
Kintner, R. C., **6-16,** 6-29
Kirkwood. J. G.. **10-45, 18-12**
Kistler. **A.** L.. **12-11**
Klein, J., **11-10**
Klibanova, Ts. M.. 16-26
Kmak, W. S., **18-17**
Knoll, W. H., **18-31**
Knudsen, J. **G.,** 5-26
Knudsen, M., **2-15**
Kobayashi, R., **1-18**
Kobe. K. A., **B-3**
Kober, H., **4-14**
Koeller, R. C., 16-16
Kramers, H., 32-34, **11-14,** 17-25, 17-34, **18-31**
Kreyger, P. J., **11-14,** 17-34

Laar, J. van. **11-10**
Ladenberg, R., 6-28
Laidler, K. J., **1-27,** 16-23
Laird, A. D. K. 2-22
Lamb, H., 2-25, 2-36, **3-10,** 3-25, 3-55, 4-1, **4-10, 4-31, 6-16, 16-22**
Landau, L., 5-22. 18-20
Lange. N. A., 1-9
Lapple, C. E., 6-14, **6-16,** 6-28, 15-35
Laufer, J., **5-12**
Lee, C. **Y., 16-26,** 17-8
Lenoir, J. M., **8- 12, 8-13,** 8-25
Leva, M., 6-18
Lévêque, M. A., **11-14, 13-12**
Lewis, W. K., 21-24
Li, J. C. M., 16-23, 16-24
Libby. P. A., **10-26**
Liepmann, H. W., **10-26**
Lifshitz, E. M., 5-22. 18-20
Lightfoot, E. N.. 17-16

London, A. L., 13-19
Lorenz, L., 8-24, **10-26**
Ludford. G. S. S., 10-26
Lyche, B. C., ll-10
Lynn, R. E., Jr., **B-3**
Lyon, R. N.. 13-17

Madelung, E., 3-55
Marble, F. E., **19-11**
Marshall, W. R., Jr., **13-22,** 13-27, 15-19, **15-23,** 19-36, **22-17**
Martinelli, R. C., 13-17, **13-18**
Mason, E. A., **1-25,** 8-19, B-3
Matz, W., **21-2,** 22-1
Mayer, J. E., **14-10**
Mayer. M. G. **(Mrs.), 14-10**
McAdams, W. H., 6-8. 13-2, **13-14,** 13-26, **13-28, 13-30, 13-31, 13-32, 14-7, 14-17, 14-25**
McAfee, K. B., **17-31**
McCabe, W. L.. 6-7. **6-10,** 6-18
McConnell, A. J., A-8, A-26
McKelvey, J. M., II-21
McKloskey, K. E., **1-9,** 1-26
Meter, D. **M.,** 5-26
Metzner, A. B., 1-13, 6-26
Michels, A. M. J. F., 1-19
Mickley, H. S., **19-24,** 19-25, 19-27, 21-24
Milberger, E. C., **18-15**
Mills, R. R.. Jr.. **12-11**
Milne-Thomson, L. M., 4-10
Mises, R. von, **10-26**
Moelwyn-Hughes. E. A.. 17-2
Moody. I.. F.. 6-7
Moon, P., A-14
Morduchow, M.. **10-26**
Morse, P. M.. A-3. A-8, **A-15,** A-16, A-21, A-26
Müller, W., 4-8, **4-31**
Murray, R. L., **19-1,** 19-35
Muskat, M., 4-29

Nagata, S., 4-28
Nernst, W., 18-35
Nijsing, R. A. T. 0.. 19-32
Nusselt, W., 13-30, 22-25

O'Brien, V., 12-11
Odishaw, H.. **3-10**
Oldroyd, J. G.. 2-36, 3-35, 3-52
Onsager, L., **18-12**
Opfell, J. B., 5-9, **5-13,** 12-5, 20-4
Owens, E. J., **8-11, B-3**

Pai, S. **I.,** 4-25, **5-25**
Partington. J. R., 1-30
Paton, J. B.. 2-34
Patterson, G. N., 2-15
Perry, J. H., 2-15. **6-14,** 7-20, **15-18, 15-33,** 21-2, **21-28, 22-8**
Pettyjohn. E. S.. 6-16
Philippoff, W., **1-14**
Piercy, N. A. V.. 19-34
Pigford, R. L., 2-8. 7-34, **10-43,** 11-14, **13-11, 13-21, 15-19, 15-23. 17-4, 17-8, 17-22. 17-34, 17-37, 18-14, 19-8, 19.10, 20-4, 21-2, 21-22, 21-33, 21-40, 22-1, 22-8, 22-17**
Pipes, L., A-26
Planck. M., **14-1, 14-8, 14-11**
Pohlhausen, E., **13-24,** 19-25, 19-28
Poiseuille, J. L., 2-14
Pomerantsev. V. V., 16-26
Powell, R. E., 8-22
Prager, W., 3-34
Prandtl, L., 5-8
Prengle, R. S.. 2-22, 5-3
Present, R. D., 16-19
Preston, J. H., **19-34**
Prigogine, **I., 18-12**

Rabinowitsch, B., 2-36
Ragatz. R. A., **1-17, 8-11, 8-22. 13-25, 15-4, 17-28, 17-29. 21-18, 22-4, 22-7, 22-8**
Ramm, W. M.. 21-2
Ranz, W. E.. 6-18, **13-22,** 13-27
Ree, R. H.. 1-13
Ree, T., **1-13**
Reid, R. C.. 8-19, 8-22, 16-14, 16-20, 16-24
Reiner, M.. **1-10, 2-18,** 3-35, 3-37
Reynolds, T. W., **22-16**
Riedel, L., 8-22
Rivlin, R. S., 3-35
Riwlin, R. **(Miss), 3-37**
Rosenhead, L., 3-10
Roseveare, W. E., 8-22
Roshko, A., **10-26**
Ross, R. C., 19-24. 19-25, **19-27,** 21-24
Rossini, R. D., **B-3**
Rossum. J. J. van, 2-38
Rothfeld, L. B., 18-9
Rothfus, R. R., **2-22,** 5-3, 5-26
Rouse, H., 3-11

Sage, B. H., 5-13, 12-5, 20-4
Saxena. S. C.., 8-19
Saxton, R. **L.,** 18-17
Schenk, J., **11-10**
Schiller, L., 6-28
Schlichting, H. 3-16, 3-25, **3-27, 3-38,** 4-22, 4-24, **4-25, 5-2, 5-8, 5-13, 5-24, 5-28, 6-8, 6-13, 6-18, 6-25. 11-16. 11-18,** 12-5. 12-6. **13-21,** 13-23. **18-31, 19-17, 19-18, 19-25**
Schmidt, E.. **10-26**
Schrage, R. W.. 13-30
Schuh. H.. **19-19,** 19-34
Scott, E. J., 19-36
Seban, R. A., **13-17**
Sherwood, **T.** K.. 2-8, **8-19,** 8-22, 13-21, 16-14, **16-20, 16-24. 17-8,** 17-37, **18-14, 19-8. 19-10, 20-4. 20-9, 21-2, 21-22, 21-33, 21-40,** 22-1, **22-22**
Shimazaki, T. T., **13-17**
Short, B. E.. 13-31
Sieder, E. N.. **13-11,** 13-13
Siegel, R.. 9-34, **11-12, 12-11,** 12-15, **13-16**
Sisko, A. W., 2-39
Slattery, J. C., 1-14, 2-25, 3-30, 3-52, **4-11, 6-16, 16-14**
Sleicher. C. A., **13-15**
Smith. D. M.. 22-25
Smith; J. L., 6-7, **6-10, 6-18**
Sneddon, 1. **N.,** 11-15, 19-1
Sparrow, E. M., 9-34, **10-26,** 11-12, 12-11, 12-15, **13-16**
Spencer, D. E.. **A-14**
Spitzer, L., **Jr.,** 18-20

Spou, E. **L. (Mrs.), 8-25,** B-3
Sprenkle, R. E., 7-20
Squire, H. B., 12-3
Squires, P. H.. 2-34
Squyen. A. L., 19-24, **19-27,** 21-24
Stearn, A. E., 1-29
Steinour, H. H., 6-16
Stewart, R. W., 5-22
Stewart, W. E., 3-26. **18-19,** 19-24. **19-25, 19-27,** 19-29, 21-24, 21-36, 2143
Stokes, C. G., 2-25
Streeter, V. L., 2-25, 4-13
Strom, J. R.. 6-29
Sutherland, W., **16-23**
Swindells, J. F.., **1-8**

Tate, G. E., 13-11. 13-13
Taylor, G. **I.,** 3-27, 5-8, **5-14,** 5-27, 12-6
Thiele, E. W., 17-25
Thodos, **G., 8-11,** B-3
Thomas. G. B., 3-2. 8-5, 17-24
Thring, **M. M.,** 3-38
Tichacek, L. J., **18-17**
Tobias, C. W., 19-11
Tollmien, W., 5-28
Tolman, R. C., 14-10
Toor, H. L., ll-10
Towle, W. L., 20-9
Townsend, A. A.. 5-2, **5-15,** 5-22
Treybal, R. E., 21-2, **21-22,** 22-1, 22-23
Tribus, M., **11-10,** 13-15
Truesdell, C., 3-35
Tung, L. **H., 17-4,** 19-36
Tuve, G. L., 7-20

Uyehara, 0. A.. 1-17

Villat, H., 2-25
Vusse, J. C. van de, 18-31

Warburg, E.. 1-19
Watson, K. M., 1-16, **1-17,** S-ll. 8-22. **13-25,** 15-4, 17-28, **17-29, 18-19,** 21-18, **22-4,** 22-7. 22-8, B-3
Weatherford,' W. E., Jr., **19-15**
Westwater, J. J., 13-32
Wheeler, A., 17-25
Whitman, W. G., **21-18**
Wiedemann, G., 8-24
Wilke, C. R., 1-25, 1-31, **16-24, 16-26, 17-8, 18-19,** 19-11, 19-14
Williams, B., 2-22
Wright, W. A., **18-37**
Wylie, C. R., **4-13**

Yamagata, **K.,** ll-10
Yang, K. T., ll-2
Yokoyama. T.. 4-28
Yoshida, F., 13-25
Yoshioka, N., 4-28
Young, J. D., 19-18

Zipperer, L.. 1-27'

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

A
Absorción de energía radiante,
superficies sólidas, 14-4
fluido, 14-26
Absorción de gases,
con reacción química, 17-14, 17.37. 19-8, 19-32
en burbujas descendentes, 17-24
en columnas de relleno, 22-8
en tanque agitado con reacción, 17-16
en película descendente, 17-20, 17-30,
Aceleración normal de la gravedad, A-37 .
Adimensional, tiempo, 5-1, 12-3, 20-1
Adimensional enfriamiento, 9-26, 9-47
Adimensionales de transferencia de materia,
efecto sobre el termómetro de bulbo húmedo,
efecto sobre la evaporación de líquidos, 21-33,
efecto sobre los coeficientes de transferencia, 21-22, 21-24, 21-36, 21-40
Amortiguamiento,
de las oscilaciones de un manómetro, 7-23
de un controlador de temperatura, 15-25
Análisis dimensional,
de las ecuaciones de variación, 3-38, 10-31, 18-28
grupos análogos para transferencia de calor y materia, 21-12
para coeficientes de transferencia de materia 21-10
para coeficientes de transmisión de calor. 13-8, 13-20,
para convección libre junto a una lámina caliente, 16-23
para el flujo alrededor de esferas, 6-11
para el flujo en un tubo, 6-3. 6-29
para el vórtice de un tanque agitado, 3-40
para factores de fricción, 6-3, 6-11, 6-29
para flujo no-newtoniano, 3-48, 6-29
para mezclas binarias, 18-28
teorema de Buckingham. 6-5. 13-10
Analogía de Reynolds. 12-9
Analogías,
coeficiente8 de transferencia de calor y materia, 21-9
coeficientes de transferencia pata elevadas velocidades de transferencia de materia, 21-22
densidades de flujo turbulento, 20-3
ecuaciones de variación de tiempo ajustado. 20-3
entre balances macroscópicos, 15-9
entre conducción de calor y difusión, 19-2, 21-12
entre difusividades, 16-11
entre ecuaciones de variación, 18-8
entro una columna dè adsorción y *un cam*biador de calor de corrientes cruzadas, 22-25
entre una columna de relleno y un cambiador de calor de contracorriente, 15-11, 22-8
entre un manómetro amortiguado, un controlador de temperatura. y la puesta en marcha de un reactor químico, 7-23, 15-22, 22-17
entre transporte de calor y cantidad de movimiento, 13-14
grupos adimensionales, 21-12
relaciones de Chilton-Colburn, 13-14, 21-13
teoría de la capa limito. 19-18, 21-40
teoría de película, 21-24
Anemómetro de alambre caliente, 1337
Autodifusión,
en gases. 16-14, 16.21
en líquidos, 16-23

Balance de cantidad de movimiento *(véase también* Ecuación de movimiento),
balance aplicado a una envoltura, 2-3
balance macroscópico. 7-3, 22-4
Balance de energía *(véase también* Balance de energía mecanica; Ecuación de energía),
balan- aplicados a una envoltura, 9-2
ecuación diferencial general, 10-2, 18-6, 18-9
para sistemas de varios componentes. 18-6. 22-4
para un sistema macroscópico, 15-2, 22-4
Balance de materia *(véase también* Ecuación de continuidad),
aplicado a una envoltura., 17-3
para sistemas macroscópicos, 7-2. 15-9, 22-1
Balance de energía mecánica,
deducción pata casos especiales. 7-6, 7-34
isotérmicos, 7-4
no isotérmicos, 1 5 - 4
para sistemas de varios componentes. 22-4
Balances aplicados a una envoltura. 2-3, 9-2, 17-3
Balances globales *(véase* Balances macroscópicos)
Balances macroscópicos,
en sistemas de varios componentes,' 22-1
pata flujo isotérmico, 7-1
para flujo no isotérmico, 15-1
resumen tabulado, 15-9

Boquilla,
flujo **compresible,** 15-26, **15-32**
flujo con reacción **química,** 22-13
Burbujas, absorción desde, 17-24

Caída de presión *(véase* **Factor de fricción; Pérdidas por fricción)**
Cambiadores de calor,
coeficiente global de transmisión de calor, 13-5
de corrientes cruzadas, 22-25
de corrientes paralelas-contracorriente, **15-33**
de tubos concéntricos, 15-11, 15-29, **15-30**
Capa límite (métodos integrales), 4-19
con reacción química, 19-15
flujo a lo largo de una lámina plana, 4-22, **10-16, 19-15**
flujo viscoso isotérmico, 4-19
para estado no estacionario, 4-3, 11-24, 19-3, 19-11
para la difusión en sistemas de varios componentes, 19-11
para sistemas de difusión, 19-11
transmisión de calor, 11-16
Capa límite (soluciones «exactas»), 19-18
coeficientes de transferencia para elevadas velocidades de transferencia de materia, **21-40**
convección libre, **10-23**
deducción de las analogías de **Chilton-Colburn,** 19-28,
por el **método de Picard** 19-34
resultados **tabulados, 19-23, 19-25, 19-27, 19-28,** 19-29
transferencia simultánea de **calor,** materia y cantidad de movimiento, **19-18**
capa térmica límite, Il-17
Catalizadores, difusión en, **15-26**
Centrífuga, 18-24. **18-33**
Cilindros,
conducción no estacionaria del calor, **11-6, 11-21, 11-23,** C1-24
factor de eficacia, **17-29**
factor de fricción para **el** flujo a través de, **13-21**
flujo ideal alrededor de, **4-14, 4-27**
generación de calor, **9-3,** 9-8, **9-44**
pérdidas de calor por **convección** libre desde. **13-26,** 13-28, **14-24**
pérdidas de calor por **convección** forzada. desde. **13-21, 10-36**
perdidas de energía radiante desde, **14-24**
reacción autocatalítica en, **19-34**
Coeficiente de **absorción, 14-4**
Coeficiente de extinción, **14-27**
Coeficiente de fricción deslizante, **16-22**
Coeficiente de resistencia *(véase* Factor de fricción)
Coeficiente de **Soret, 18-16**
Coeficiente global de transferencia de materia, **21-20**
Coeficiente global de'transmisión de calor, 9-23, **13-5**
Coeficientes de transferencia *(véase también* Coeficientes de transmisión de calor; **Coeficientes** de transferencia de materia; Factores de fricción),
factores de corrección para altas velocidades de transferencia de materia, 21-22
resumen de factores de corrección, 21.43
sistemas de varios componentes, **21-45**
tabla de magnitudes **análogas, 21-12**
teoría de **capa límite. 21-40**
teoría de **película. 21-24**
teoría de **penetración,** '21-36
Coeficientes de **transferencia** de materia,
analogía con **transmisión** da **calor, 21-12**
coeficientes globales, **21-20**
correlaciones para bajas **velocidades** de **transferencia de materia, 21-8**
definición, 21-2
factores de conversión **A-46**
para altas velocidades de **transferencia** de materia, 21-22
para dos **fases, 21-18**
para sistemas **de varios componentes, 21-45**
según la **teoría** de **capa límite, 21-40**
según la **teoría** de **película, 21-24**
según la **teoría de penetración. 21-36**
utilización en el **análisis** de **una columna** de **absorción, 22-8**
Coeficientes de transmisión de calor,
análisis dimensional. 10-3
definición, **13-2**
definición **para altas velocidades de transferencia** de materia. **21-22, 21-24. 21-36. 21-40**
efecto de altas **velocidades de transferencia** da materia, **21-22. 21-24. 21-36. 21-40**
factores de **conversión, A-45**
globales, 9-23. 13-5
orden de **magnitud, 13-5**
para convección **libre. 13-25**
para lechos de **relleno. 13-24**
para objetos **sumergidos, 13-20**
para tubos, **13-5, 13-7**
para vapores **condensantes. 13-29**
relación con el **factor de fricción, 13-14, 13-16, 13-23**
Columna de pared **mojada,**
coeficientes de **transferencia** de materia, **21-50**
transferencia de **materia, 20-5**
Columnas de relleno *(véase también* Medios **porosos; Absorción de gases),**
absorción de gases, **22-8.** 49-32
conductividad **calorífica efectiva, 9-17**
ecuación de **Blake-Kozeny, 6-21**
ecuación de **Burke-Plummer,** 6-22
ecuación de **Ergun,** 6-22
estado no estacionario, **22-18,** 22-25, 22-27
factor de fricción, **6-17**
factores *j,* 13-24, **21-48**
Composición de mezcla **homogénea, 21-7**
Concentración, definiciones, M-4, 16-7
Concentración global (media), **21-6**
Concentración media:
en una **película** estancada, **17-6**
para el flujo en una conducción. **21-16**
Condensación,
coeficientes de transmisión de calor, **13-29,** 13-38
de una mezcla de **vapores, 18-35**
efecto de un gas estancado, **18-20**
Condiciones límite,
limitación de las analogías entre transferencia de calor y materia, **19-18, 21-25**
para conducción de calor, 9-2

para difusión, 17-4
para flujo viscoso,, 2-3, 2-36. 16-22
Conducción axial de calor en un reactor quhnico. 9-16
Conducción de calor,
a través de paredes compuestas, 9-21
bidimensional, 11-14
calentamiento periódico de la superficie terrestre, 11-23
en el flujo laminar?. 11-11, 11-12
en estado no estacionario, 11-1, 11-21
-en una aleta de enfriamiento, 9-26, 9-47
mttodo variacional, 11-24
soluciones de producto, 1 J-23
Conductividad calorífica,
conductividad calorífica crítica, tabla, A-34
corrección de Eucken, 8-18
definición, 8-4
de gases monoatómicos, 8-14
de gases poliatómicos, 8-18
de líquidos, 8-21
de la mezcla gaseosa, 8-19
de remolino, 12-5
de sólidos, 8-23
efectiva, 9-17
en mezclas de difusión, 8-14
factores de conversión, A-43
gráficos generalizados, 8-11, 8-13
valores experimentales, 8-7, 8-8, 8-9, 8-10
Conductividad calorífica efectiva de materiales granulares, 9-17
Conductividad eléctrica, 8-24, 9-3, 9-8,
de un alambre caliente, 9-3, 9-7
relación con la conductividad calorífica, 8-23
variación con la temperatura, 9-8
Constante de Boltzmann. A-37
Constante de Faraday, 17-38
Constante de la ley de los gases, 17-37
Constante de Planck, 14-4, A-38
Constante de Stefan-Boltzmann, 4-11, A-37
Constantes físicas, A-37
Constante solar, 14-19
Convección natural (*véase* Convección libre)
Coordenadas curvilíneas,
componentes de un tensor, A-25
componentes de un vector, k23
ecuación de continuidad, EJ3
ecuación de energía, 10-10, 10-11
ecuación de movimiento, 3-15, 3-16, 3-17, 4-9
expresiones con intervención de la función de corriente, 4-9
modelos no-newtonianos, 3-33
resumen de operaciones vectoriales y tensoriales, A-28, A-29
tensor esfuerzo, 3-20, 3-21
vector densidad de ílujo de energía, 10-9
Corrección de Eucktn. 8-18
Cuerpo gris, 14-4
Cuerpo negro,
definición, 14-4
intercambio de energía radiante, 14-13
ley de Planck. 14-9

Delta' de Kronecker. A-7
Densidad de Aujo
con respecto a coordenadas estacionarias, 18-8, 18-13
de cantidad de movimiento, 1-5, 5-7, 18-12
de energías 8-5, 12-4, 18-12
de entropía, 10-44
definición, 1-5
de materia, 16-6, 18-14, 20-3
en sistemas de varios componentes, 18-8, 18-10
turbulento, 5-7, 12-4, 20-3
Densidad de flujo de calor (*véase* Densidad de flujo de energía)
Densidad de flujo de cantidad de movimiento, 1-5
con respecto a ejes fijos, 18-8
fluidos newtonianos, 18-12
fluidos no-newtonianos, 3-44
tabla de componentes, 3-20, 3-21
turbulento, 5-7
Densidad de flujo de energía,
con respecto a coordenadas fijas, 18-8, 18-13
densidad de flujo de energía radiante, 10-27
en coordenadas curvilíneas, 10-9
en mezclas, 18-12
ley de Fourier, 8-5
turbulento, 12-4
Densidades de flujo de materia,
definiciones, 16-9
para sistemas de varios componentes, 18-14
resumen tabulado, 16-8
Derivadas con respecto al tiempo, 3-3, A-14
Derivada siguiendo el movimiento (*véase* Derivada substancial)
Derivada substancial, 3-3, A-14
Determinantes, A-7
Diámetro molecular,
a partir de las propiedades de transporte, 8-26
para esferas rígidas, 1-21. 18-16. 16-18
Diferenciación,
de integrales, 2-37, A-20
de tensores, A-19
de vectores, A-21
en coordenadas curvilíneas, A-28. A-29
Diferenciación de integrales, A-21
Diferencia media de temperatura
definiciones, 13-3
en cambiadores de calor, 15-12, 18-36
Difusión,
con polimerización catalítica, 18-34
con reacciones heterogéneas, 17-1 I, 17-34, 18-27, 18-39
con reacciones homogéneas, 17-2, 17-14, 17-37, 18-1, 19-7, 19-8, 19-15, 19-32, 19-34, 19-35
con una zona de reacción móvil, 19-8
de barrido, 19-15
de presión, 18-11, 18-24, 18-33. 18-34
desde una fase gaseosa hacia una película descendente, 17-20
desde un manantial puntual, 17-36
ecuaciones de Stefan-Maxwell, 18-18
en estado no estacionario, 19-3
en flujo turbulento, 20-1
tn sistemas dè varios componentes, 18-1
entre dos fases, 19-36
tn una partícula de un catalizador, 15-25
en un reactor catalítico, 21-47
en un sistema autocatalítico. 19-34
en un sistema binario, 16-10, 18-16
forzada, 18-11, 18-25, 18-33, 18-34, 18-35, 18-37

Difusión,
fuerzas impulsoras, 18-11, 18-15
interdifusión equimolar, 18-6
mecanismos, 16-3, 18-11
térmica, 18-11, 18-22, 18-32
Difusión de barrido, 19-15
Difusión de presión,
contribución a la densidad de flujo de materia, 18-15
en una centrífuga, 18-24, 18-33
Difusión en sistemas de varios componentes,
coeficientes de transferencia, 21-45
con reacción heterogénea, 18-27
de mezclas gaseosas ternarias, 18-34, 18-39
densidad de flujo de materia, 18-14
difusividad binaria efectiva, 18-19, 18-33, 21-45
ecuaciones de Stefan-Maxwell, 18-18
fenómenos de estado no estacionario, 19-11,
Difusión forzada,
contribución a la densidad de flujo de materia, 18-15
en sistemas iónicos, 18-25, 18-33, 18-34, 18-35, 18-37
Difusión térmica,
contribución a la densidad de flujo de materia, 18-15
factor, 18-16
relación, 18-16, 18-17
separación, 18-22
Difusividad,
binaria efectiva para mezclas, 18-19, 21-46
de electrolitos, 18-35
definición en sistemas binarios, 16-10
definición en sistemas de varios componentes, 18-14
ecuación de Nerst-Einstein, 16-22
ecuación de Stokes-Einstein, 16-22
efectiva en medios porosos, 17-25
factores de conversión para, A-44
medida de, 17-8, 17-36, 19-7, 19-36
relación con la movilidad, 16-22, 18-15
teoría para gases, 16-13, 16-16
teoría para líquidos, 16-22
valores experimentales, 16-12, 16-13
variación con temp. y presión, 16-13
Difusividad de remolino, 20-4, 20-8
Difusividad efectiva en materiales granulares, 17-27
Difusividad binaria efectiva, 18-19
utilización en el cálculo de coeficientes de transferencia, 21-45
utilización en la evaporación de mezclas de varios componentes, 19-13
Difusividad térmica, 8-6, 16-11
Discos,
factor de eficacia, 17-34
factor de fricción para, 6-25
flujo radial entre, 3-37, 3-46, 3-55
intercambio de energía radiante entre, 14-30
Disipación de energía, *(véase también* Disipación viscosa),
eléctrica, 9-3, 941. 10-8, 18-20
nuclear, 9-10, 9-43
química, 9-16, 9-45
viscosa, 3-12, 9-14, 10-6
Disipación eléctrica, 9-3, 9-41, 10-8, 18-20
Disipación viscosa,
en el flujo laminar en una rendija, 10-38
en el flujo no-newtoniano, 9-44
en la ecuación de energía de tiempo ajustado, 12-4
en la ecuación de energía mecánica, 3-13
en las ecuaciones de energía, 10-5, 10-8
en sistemas macroscópicos de flujo, 7-5, 7-7
entre cilindros coaxiales, 10-17, 10-37
entre superficies móviles, 9-14, 9-44, 9-45
en turbulencia. 5-28
Divergencia, 3-5, A-12
en coordenadas curvilíneas, A-28, A-29
integral de volumen, A-20

Ecuación de Bernoulli,
factor de pérdidas por fricción y, 7-9
fluidos viscosos no isotérmicos, 15-4
para fluidos no viscosos, 4-31
para fluidos viscosos isotérmicos, 7-4
para mezclas viscosas, 22-4
relación con la ecuación de movimiento, 7-4, 76, 7.34
Ecuación de Blake-Kozeny, 6-21
Ecuación de Buckingham-Reiner, 2-17
Ecuación de Burke-Plummer, 6-22
Ecuación de continuidad (fluidos puros), 3-4
en coordenadas curvilíneas, 3-14
para fluidos incompresibles, 3-5
para flujo turbulento, 5-7
para medios porosos, 4-29
relación con el balance macroscópico de materia, 7-2
Ecuación do continuidad (mezclas),
densidad constante, 18-3
densidad molar constante. 18-3
en coordenadas curvilíneas, 18-5, 18-6
mezclas binarias, 18-1
mezclas de varios componentes. 18-7
Ecuación de Corrsin,
para turbulencia en mezclas, 20-8
para turbulencia no isotérmica, 12-12
Ecuación de difusión *(véase también* Ecuación de continuidad para mezclas),
analogía con conducción de calor, 19-2
par8 mezclas binarias, 18-1, 18-5, 18-6
Ecuación de energía, 10-2
en coordenadas curvilíneas, 10-10, 10-11
en sistemas de radiación, 14-25
formas más utilizadas, 10-7, 10-14, 10-15
para mezclas, 18-6
relación con el balance macroscópico de energía, 15-4
tabla de formas equivalentes, 18-9
Ecuación de energía mecánica, 3-12, 10-5, 10-14, 10-15
Ecuación de entropía. 10-44
Ecuación de Ergun, 6-22
Ecuación de Euler, 3-11
Ecuación de Kozeny, 6-21
Ecuación de Laplace, 4-13, 11-14, 19-2
Ecuación de movimiento,
de Euler. 3-12
de Navier-Stokes, 3-1 1
en coordenadas curvilíneas. 3-16, 3-17
otras formas,. 3-52
para convección libre, 10-12, 18-9
para fluidos putos, 3-6

para flujo turbulento, 5-7
para mezclas dc varios componentes, 18-6
relación con la ecuación de energía mecánica, 3-12
relación con el balance macroscópico de cantidad de movimiento, 74
Ecuación de Navier-Stokes, 3-11
Ecuación de Nerst-Einstein, 16-22
Ecuación de Reiner-Riwlin, 3-37
Ecuación de Stokes-Einstein, 16-22
Ecuación de von Kármán-Howarth, 5-22, 13-12, 20-8
Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 4-12, 4-13
Ecuaciones de conservación (*véase* Ecuaciones de variación; Balances macroscópicos)
Ecuaciones de Prandtl de capa límite, 4-25, 10-24, 11-16, 19-19
coeficientes de transferencia a partir de, 21-40
Ecuaciones de Stefan-Maxwell, 18-18, 18-27, 18-38, 18-39
Ecuaciones de variación (*véase también* Ecuación de continuidad; Ecuación de movimiento; Ecuación de energía)
análisis dimensional. 3-38, 10-31. 18-28
de tiempo ajustado, 5-6, 12-3, 20-1
en coordenadas curvilíneas, 3-13, 10-9, 18-5
para convección libre, 10-12, 10-23, 10-33, 18 10
para flujo isotérmico, 3-1
para flujo no isotérmico, 10-1
para mezclas. 18-1, 18-6
resumen, 10-13, 10-14, 10-15
Efecto de difusión-termo, t8-13
Efecto Dufour, 18-11
Efecto Soret, 18-11
Efectos relativistas, 18-20
Efecto Weissenberg, 3-35
Eficacia de una aleta de enfriamiento, 9-28
Eficacia de uaa maquina solar, 14-29
Emisión de energía radiante,
en el interior do un fluido, 14-27
en superficies sólidas, 14-1
Emisividad,
definición, 14-5
tabla de valores. 14-7
Energia cinética, ecuación de variación para, 10-14, 10-15, 18-9
Energía de activación para viscosidad, 1-27
Energía interna. ecuación do variación, 10-6, 18-9
Energía potencial,
de interacción intermolecular, 1-22, 16-19
en el balance de energía, 15-2
en la ecuación de energía, 10-5
Enfriamiento por transpiración, 10-20, 10-37, 10-39, 19-33, 21-3
Ensanchamiento, pérdidas por fricción, 7-12
Entropia. ecuación de variación, 10-44
Equivalente mecánico del calor, 8-7, A-37
Error de un termopar, 9-29
Esferas,
conducción de calor, 942
difusividades de líquidos, 16-22
efectos de pared, 6-28
enfriamiento de, 11-7
enfriamiento por transpiración, 10-20, 10-37, 10-39
evaporación de una gota. 17-32, 21-14, 21-34, 21-51
factor de fricción, 6-3, 6-11
flujo ideal alrededor de. 4-28
flujo laminar, 2-25, 6-14
flujo reptante alrededor de. 2-25
flujo reptante con deslizamiento, 16-22
flujo reptante entre, 3-51
flujo viscoso alrededor de, 4-11
ley de Stokes, 2-28
número do Rcynolds, 2-25
resistencia de forma y fricción, 2-27
transferencia de materia; 21-13
transmisión de calor por convección forrada. 13-22
transmisión de calor por convección libre, 13-26
velocidad final 2-28, 6 3
Esferas concéntricas,
conducción de calor, 9-10, 9-41
flujo radial entre, 3-50
flujo tangencial entre, 3-51
refrigeración por transpiración, 10-20,10-39
Esfuerzos de Reynolds, 5-7
Espesor de cantidad de movimiento, 425.
Espesor de concentración. 19-16
Espesor de desplazamiento. 4-25
Espesores de capa límite,
espesor de cantidad de movimiento, 4-25
espesor de concentración, 19-16
espesor de desplazamiento, 4-25
espesor de energía, 11-19
Evaporación,
con elevada velocidad de transferencia de materia, 21-33
de gotas, 17-32. 21-14. 21-34. 21-51
en estado no estacionario, 19-3, 19-11, 21-53
en psicrometría, 21-15, 21.34
mezclas de evaporación constante. 18-37
Evaporación de gotas, 17-33, 21-14, 21-34, 21-51
Eyectores, 7-14

Factor de eficacia, 17-25, 17-34, 17-37
Factores de ángulo, 14-16
Factores de conversión, A-38
equivalente mecánico del calor. 8-6
factor gravitacional, 1-6
Factores de fricción,
definición, 6-2, 21-22
efecto de elevadas velocidades de transferencia de materia sobre, 21-22, 21-24, 21-36, 2140
para el Rujo a través de un cilindro, 13-21
para el flujo no-newtoniano, 6-26, 6-29
para esferas, 6-11
para flujo compresible, 15-7, 15-13, 15-29, 15 30
para tubos concéntricos, 6-29
para una lámina plana, 6-25
para una rendija, 6-25
para un disco que gira, 6-25
para un tubo, 6-3, 6-26
relación con el factor de pérdidas por fricción, 7-9
relaciones de Chilton-Colburn, 13-14, 13-17, 19-23

Factores de pérdidas por fricción, definición, 7-9
Factores de visión, 14-16
Factores *j*, 13-14, 13-24, 21-13, 21-48
Factor gravitacional de conversión, 1-6
Fenómenos no estacionarios
columnas de relleno, 22-18, 22-25, 22-27
conducción de calor, 11-1
controlador de temperatura, 15-22
difusión con reacción química, 19-7
difusión de interfase, 19-36
en capas límite, 4-2, 11-24, 19-3, 19-11
en tanques agitados, 15-19, 15-36, 18-31, 22-25, 22-27
evaporación, 19-3, 19-11, 21-53
expansión de un fluido compresible, 15-26
flujo no-newtoniano junto a una pared, 4-4, 4-27
oscilaciones de un manómetro, 7-23
puesta en marcha de un reactor, 22-17
reactores químicos en serie, 22-28
Fluido de Reiner-Philippoff, 1-14
coordenadas curvilíneas, 3-34
Fluido dilatante, 1-11
Fluido newtoniano, 1-4, 3-9
expresiones para el tensor esfuerzo, 3-20, 18-12
Fluido pseudoplástico (*véase también* Modelo de Ostwald-de Waele; Modelo de Ellis), definición, 1-11
Fluidos de Reiner-Riwlin, 3-34
Fluidos reopécticos, 1-15
Fluidos tixotrópicos, 1-15
Fluidos viscoelásticos, 1-15
flujo en tubos, 3-52
Flujo adyacente de fluidos inmiscibles, 2-22
Flujo compresible (*véase también* Gases ideales)
a través di aparatos de medida, 15-17
a través de tubos, 15-13, 15-29, 15-30, 15-35
balances macroscópicos, 15-9
ecuación de continuidad, 3-4, 3-14
ecuación de energía, 10-7, 10-10
ecuación de movimiento, 3-11
en un tubo de Venturi, 15-32
expansión en estado no estacionario, 15-26
grupos adimensionales, 10-40
mezcla de gases ideales, 15-15, 15-30
onda de choque, 10-26
potencia necesaria para el flujo, 15-13
temperatura de estancamiento, 15-36
tensor esfuerzo, 3-21
velocidad del sonido en, 10-42
velocidad límite da descarga, 15-3, 15-32
Flujo de Knudsen, 2-15
Flujo de Poiseuille, 4-4
Flujo deslizante alrededor de una esfera, 16-22
Flujo deslizante en un tubo, 2-36
Flujo en un orificio, 7-18, 15-17
Flujo incompresible,
ecuación de Bernoulli, 7-4, 7-6
ecuación de continuidad, 3-4
ecuación de energía, 10-11
variación de entalpia, 15-4
ecuación de movimiento, 3-11, 3-15, 3-17
ecuaciones de variación, 10-16
Flujo isentrópico, 15-5
Flujo laminar (*véase también* Flujo reptante; Convección forzada; Convección libre: Flujo no-newtoniano; Ecuación dc movimiento)
balance de cantidad de movimiento aplicado a una envoltura, 2-3
capa límite, 4-19, 11-16, 19-15, 19-18
con conducción de calor, 9-30, 11-10, 11-12
con difusión, 17-20, 17-34
con reacción química, 17-37, 19-15
en estado no estacionario, 4-1, 4-4, 4-27
función de corriente, 4-8
Flujo no-newtoniano
análisis dimensional, 3-48
calentamiento por disipación viscosa, 9-44
ecuación de Rabinowitsch, 2-36
ecuación de Reiner-Riwlin, 3-37
efecto Weissenberg, 3-35
en medios porosos, 6-29
en tubos, 2-16, 2-34, 2-39
en tubos concéntricos, 2-37
en una película descendente, 2-34
factor de fricción para tubos, 6-26
fluidos de Reiner-Riwlin, 3-34
flujo tangencial en tubos concéntricos, 3-35
junto a una pared que se pone bruscamente en movimiento, 4-5, 4-27
modelos en coordenadas curvilíneas, 30-33
pérdidas por fricción, 7-30
principio variacional, 3-55
teoría de Eyring, 1-29
transmisión de calor en tubos, 9-46, 9-48
velocidades medias, 7-30
Flujo potencial,
de calor 11-14
de Ruidos. 4-12, 4-14, 4-16
Flujo reptante,
alrededor de una esfera, 2-25, 6-15
deducción de la ley de Stokes, 4-11
en el viscosímetro de plato y cono, 3-32
entre dos esferas. 3-51
principio variacional para, 3-55
Flujo turbulento en un chorro! 5-28
Fórmula de Blasius, para el flujo turbulento en tubos, 6-8
Fórmula de Leibnitz, para la diferenciación de una integral,
en tres dimensiones, A-21
en una dimensión, 2-37
Fórmulas de Eyring,
para conductividad calorífica, 8-21
para difueividad, 16-23
para flujo no-newtoniano. t • 13
para viscosidad, 1-27
Fotón, 14-3
Fracción de huecos, 6-19
Frecuencia de radiación, 14-3
Fuerza centrífuga,
en el flujo tangencial en tabos concéntricos, 3-26
en la difusión de presión, 18-24, 18-33
en la ecuación de movimiento. 3-16
en un vórtice forzado, 3-28
Fuerza de Coriolis, 3-16
Fuerza de reacción. 3-7
sobre un codo, 7-16
Fuerzas de flotación.
análisis dimensional. 10-33, 18-30
en el flujo entre paredes paralelas. 9-36
en el flujo junto a una lámina calentada, 10-23

en la ecuación de movimiento, 10-12, 18-9
sobre objetos sumergidos, 2-27, 6-3
Fuerzas intermoleculares, 10-23, 16-19
Función de corriente, 4-8, 4-11, 4-12
Funciones de correlación de turbulencia, 5-14, 12-12, 20-5
Funciones de Lennard-Jones, A-36

Gases ideales (*véase* Flujo compresible)
ecuación de difusión, 18-6
ecuación de energía, 10-7
números de Prandtl, 8-17, 8-18
procesos adiabáticos, 10-30, 15-7
propiedades de transporte, 1-20, 8-14, 16-16
Gradiente, A-11
en coordenadas curvilíneas, A-28, A-29
Gráficas generalizadas,
para conductividad calorífica, 8-11, 8-13
para difusividad, 16-14
para viscosidad, 1-17, 1-18
Grupos adimensionales,
como relaciones de «fuerzas», 10-35
comparación entre transferencia de calor y materia, 21-12
factores *j*, 13-23, 21-12, 21-13
factores de fricción, 6-2
factores de pérdidas por fricción, 7-9, 7-10
número de Brinkman, 9-16, 9-44, 10-18, 10-32, 13-9
número de Eckert, 10-32, 10-40
número de Froude, 3-40, 10-32
número de Grashof, 9-39, 10-33, 13-26
número de Mach, 10-29, 10-40
número de Nusselt, 13-9, 21-10
número de Prandtl, 8-18, 8-25, 10-32, 13-9, 13-26
número de Reynolds, 2-8, 2-22, 2-25, 3-40, 6-26, 10-32, 13-9
número de Schmidt, 16-21, 18-30, 21-12
número de Stanton, 13-14, 21-12
relación L/D, 13-19

Hipótesis de semejanza de von Kármán, 5-8, 12-6, 20-4

Integración,
de tensores, A-21
de vectores, A-20
Intensidad de turbulencia, 5-6
Interdifusión equimolar, 18-6, 19-2
Interfase, resistencia a la transferencia, 13-29, 17-4, 19-36
Invariantes, 3-33, A-25
Isótopos, fuerzas intermoleculares para, 16-20

Lámina plana,
coeficientes de transferencia a elevadas velocidades de transferencia de materia, 21-40
convección libre, 10-23, 13-28
deducción de las analogías de Chilton-Colburn, 19-28
disolución y reacción química, 19-15
factor de fricción, 6-25
teoría de capa límite para, 4-21, 11-16, 19-20, 21-40
transmisión de calor desde, 11-16, *13.22*
laplaciana, A-13, A-11
en coordenadas curvilíneas, A-28, A-29
Ley de Darcy, aplicación al flujo no-newtoniano, 6-29
Ley de Fourier, 8-5
en coordenadas curvilíneas, 10-9
extensión a mezclas, 18-13
Ley de Hagen-Poisseuille, deducción, 2-14
factor de fricción y, 6-8
Ley de Kirchhoff, 14-6
Ley de Lambert, 14-13
Ley de la resistencia de Prandtl, 6-26
Ley del desplazamiento de Wien, 14-12
Ley del enfriamiento de Newton, 9.3, 13-3
Ley de Newton,
de la viscosidad, 1-4, 3-10
de enfriamiento, 9-3, 13-3
para el flujo alrededor de una esfera, 6-15
Ley de Planck de la radiación, 14-9
Ley de Stefan-Boltzmann, 14-8, 14-9, 14-11
Ley de Stokes, 2-28
corrección para deslizamiento, 16-22
deducción, 4-11
efectos de pared, 6-28
factor de fricción, 6-15
Ley de Wiedemann-Fanz-Lorena, 8-24
Líneas de corriente, 4-13
Líneas equipotenciales. *4-13*
Longitud de entrada,
de cantidad de movimiento, 2-16
térmica, 13-15
Longitud de mezcla,
y densidad de flujo de calor, -12-6
y densidad de *flujo* de cantidad de movimiento, 5-8
y densidad de flujo de materia, 20-4
Longitud de *mezcla* de Prandtl, S-g. 12-6, 20-4

Magnetohidrodinámica, 18-20
Manantiales caloríficos,
de origen eléctrico, 9-3, 9-41, 9-42, EO-8, 18-20
de origen nuclear, 9-10, 9-43
de origen químico, 9-16, 9-45, 18-10
de origen viscoso, 9-14, 9-44, 10-17
en la ecuación de energía, 18-8
Materiales granulares (*véase* Medios porosos; Columnas de relleno)
Medidores de flujo,
capilar, 2-34
de orificio, 7-18, 15-17
tubo de Venturi, 15-18, 15-30, 15-32
Medios porosos (*véase también* Columnas de relleno)
ecuaciones básicas, 4-29
flujo compresible, 4-29. 4-30
flujo no-newtoniano, 6-29
ley de Darcy. 4-29. 6-29, A-19
Metales líquidos.
coeficientes de transmisión de calor. 13-17
conductividad calorífica, 8-9
viscosidad, 1-9
Mezcla (*véase también* Tanques agitados),
de dos corrientes de gases ideales, 15-15
en un eyector liquido-líquido, 7-14
Mezclas (*véase también* Reacciones químicas; Difusión; Procesos de separación; Coeficientes de transferencia de materia).

Mezclas
balances macroscópicos, 22-1
coeficientes de transferencia. 2 I-I
concentraciones, 164
conductividad calorífica, 8-19
densidades da flujo, 16-8, 18-7
difusión en sistemas de varios componentes, 18-27, 18-38, 18-39
difusión térmica, 18-15, 18-17
difusividad binaria efectiva, 18-19, 19-14
ecuaciones de variación, 18- I
interacciones moleculares, 16- 19
peso molecular medio, 16-7
propiedades pseudocríticas, l-l 9
velocidades medias, 16-6, 16-5
viscosidad, 1-19. 1-25
Modelo de Ellis, 1-14
flujo en un tubo, 2-34
parámetros, 1-13
transmisión de calor en un tubo, 9-45, 948
Modelo de la ley de la potencia (*véase* Modelo de Ostwald-de Waele)
Modelo de Ostwalddc Waele, 1-12
coordenadas curvilíneas, 3-34
flujo en las proximidades de una pared móvil, 4-3. 4-27
flujo 'en medios porosos, 6-29
flujo en tubos, 2-38, 6-29
parámetros, 1-13
Movilidad, 16-22, 18-16
Movimiento irrotacianal, 4-12

Nomenclatura, 947
Notación,
para concentraciones, 16-7
para densidades de flujo de materia, 16-8
para las correcciones de altas velocidades de transferencia de materia. 21-13
para problemas análogos de transferencia de calor y materia. 21-12
Número de Avogadro, A-38
Número de Brinkmann, 9-15 944, 10-18
Numero de Eckert. 10-32, 10-40
Número de Froude, 340, 6-5, 6-13, 18-31
Número de Grashof (transferencia de materia), 18-30, 21-11, 21-12
Número de Grashof (transmisión de calor), 9-39. 10-33, 13-26. 21-12
Numero de Mach, 10-29, 1040
Número de Nusselt (transferencia de materia), 21-10, 21-12
Número de Nusselt (transmisión de calor), 13-9, 21-12
Numero de Prandtl, 10-32, 13-9, 13-26
valores según la teoría cinética de gases, 8-18, 8-25
Numero de Reynolds,
en análisis dimensional, 340
para flujo no-newtoniano. 6-26
para flujo tang. en tubos concéntricos, 3-26
para tubos concéntricos, 2-22
para una esfera, 2-25
para una película descendente, 2-8
Número de Schmidt, 16-21, 18-30, 21-12
Número de Sherwood (*véase* Número de Nusselt para transferencia de materia)

Objetos sumergidos,
coeficientes de transferencia de materia, 21-8
coeficientes de transmisión de calor, 13-4, 13-20
fuerza de flotación, 217, 6-3
fuerza resistente, 2-27, 6-12
Onda de choque, 10-26
Operador nabla, A-11, A-27. A-28, A-29
Oscilaciones de un manómetro, 7.23

Paredes compuestas, conducción de calor en, 9-21
Paradoja de d'Alembert, 14-16
Pelkula descendente.
con viscosidad variable, 41-93
difusión con reacción química, 17-37
difusión desde una fasegaseosa, 17-20, 21-36
disolución de la pared,17-34
en el vaciado de un vaso. 2-38
en sistemas condensantes, 13-30, 13-3
espesor de, 2-7,
flujo laminar, 24
flujo no-newtoniano, 2-34
no isotérmica, 10-19
sobre un cono, 3-54
transmisión de calor, 10-43
Película estanca&&
condensación, 18-20, 18-35
difusión, 17-4, 17-31
enfriamiento por transpiración, 10-20, 10-37, 10-39
evaporación, 17-36
película esférica no isotérmica, 17-9
teoría de película. 17-8, 21-24, 21-53
Perfiles de concentración.
a partir de balances de envoltura, 17-3
a partir de la teoría de capa límite, 19-11 19-15, 19-18
a partir de la teoría de película, 21-25
a partir de' la teoría do penetración, 21-36
a partir de las ecuaciones de variación, 18-20
por analogía con perfiles de temperatura, 19-2, 21-12
Perfiles de temperatura,
a partir de balances de envoltuta, 9-2
a partir de las ecuaciones de variación, 10-13
en el flujo potencial bidimensional. 1 1-14
teoría de capa límite. 11-16, 19-18
teoría de película, 21-24
teoría de penetración, 21-36
Perfiles de velocidad,
8 partir de balances de envolturas. 2-3
a partir de las ecuaciones de variación, 3-23
en convección libre, 9-36. LO-23
teoria de capa limite, 4-19, 19-18, 21-40
teoría de pellcula. 21-24
Pérdidas por fricción,
análisis dimensional, 7-7
en el flujo no-newtoniano, 7-30
en un ensanchamiento brusco, 7-12
Plástico de Bingham. 1-12
en coordenadas curvilíneas, 3-34
Rujo axial en tubos concéntricos, 2-37
flujo en una película descendente, 2-34
flujo en un tubo, 2-16
flujo tangencial en tubos concéntricos, 3-36
velocidades medias para el flujo en un tubo, 7-30

parámetros, 1-12
Polarización de concentración, **18-26,** 18-33
Polarización de electrodo, **18-26, 18-33**
Potencia necesaria,
en un tanque agitado, 6-27
para flujo compresible en una tubería, **15-13, 15-29**
para flujo incompresible en una tubería, 7-1 **1**
Potencial complejo, 4-13
Potencial de Lennard-Jones,
funciones **para** el cálculo de propiedades de transporte, A-36
parámetros a partir de las propiedades críticas, 1-23
para **moléculas** diferentes, 16-19
para' **moléculas** semejantes, 1-23
tabla de **parámetros.** A-34
Potencial de velocidad; 4-12
Primera ley de **Fick,**
generalización, 18-14
resumen tabulado, 16-10
velocidad volumétrica media, 16-27
Principios variacionales, 3-54, ll-18
Principio variacional de Helmholtz, 3-55
Problema de Graetz-Nusselt, **14-10,** 13-17
Procesos de separación,
absorción de gases, 17-24, 19-32, 22-8
absorción en películas descendentes, 17-20, 17-30, 17-37
difusión forzada, 18-25
difusión de barrido, **19-15**
difusión de presión, 18-24, 18-33
difusión térmica, 18-22
helio a partir de gas natural, 17-31
Procesos irreversibles, 3-13, **10-6**
ecuación de entropia, **10-44**
termodinámica de, 18-11
Productos **diádicos, A-16**
Propiedades críticas,
de mezclas, 1-19
fuerzas intermoleculares **y,** 1-23
tabla, A-34
Propiedades de transporte ***(véase también*** Viscosidad; Conductividad ***calorífica;*** **Difusividad;** Relación de difusión **térmica),**
teoría cinetica de gases, **1-20, 8-14,** 16-16
teoría cinetica de **líquidos,** 1-27, 8-21, 16-32
Psicrómetro, 21-15, 21-34
Punto de estancamiento, **4-16,** 4-27

Radiación,
distribución de Planck, 14-9
efecto en psicrometria, 21-51
en la ecuación de energía, 14-26
entre cuerpos negros, 14-13
entre cuerpos no negros, 14-20
escudos de, 14-22, 14-30
espectro de, 14-2
ley de Beer, 14-27
ley de Lambert, 14-13
ley del desplazamiento de Wien, 14-12
ley de Stefan-Boltzmann, 14-8
transporte de energla ***en*** medios absorbentes, 14-25
Radiación de cavidad, 14-5
Radio **hidráulico** medio,
en lechos de relleno, 6-17
para flujo laminar, 6-26
para flujo turbulento? 6-9. 6-26
para perdidas por **fricción,** 7-9
para transmisión de calor, 13-14
Reacciones químicas,
autocatalíticas, 19-34
constantes de velocidad para, 17-2
controladas por difusión, 17-13
desprendimiento de calor, 9-16, 18-10, 22-6
en capas limite, **19-15**
en el flujo a **través** de una boquilla, 21-13
en flujo turbulento, 20-3
en los balances macroscópicos, 22-6
en sistemas de difusión, **17-11, 17-33, 18-39**
en una película descendente, 17-37
factor de eficacia para, 17-25
heterogéneas, 17-2, **17-11, 17-34, 18-27, 18-39**
homogtneas, **17-2,** 17-14, 17-37, 19-7, **19-8, 19-15, 19-32, 19-34,** 19-35
orden de, 17-2
termino de la ecuación de continuidad, **18-2**
Reacciones químicas heterogéneas,
definición, 17-2
en sistemas binarios de difusión, **17-11**
en sistemas ternarios de difusión, 18-27
Reacciones químicas homogéneas,
definición, 17-2
en la capa límite, 19-15
en sistemas autocatalíticos., 19-34
en sistemas binarios de **difusión, 17-14, 19-7,** 19-8. 19-32
en una **película** descendente, 18-1
Reactores químicos,
balance de energía, 22-6
conductividad axial de calor, 9-17
efectos de **la** transferencia de materia, **21-47**
operación en estado no estacionario, 22-28
Recorrido libre medio,
y fenómenos de transporte, 1-21, **8-14,** 16-17
y ondas de **choque.** 10-29
Relaciones de **Chilton-Colburn,**
deducidas por el **método** de capa limite, **19-28**
para columnas de relleno, 13-24, 21-48
para transferencia de calor y cantidad ***de*** movimiento:. **13-14.** 13-16
para **transferencia** de calor y materia, **21-13, 21-17,** 21-47
Rendija,
factor de fricción, 6-25
flujo laminar, 2-30
relación con una sección anular, 2-37
Reología ***(véase*** Flujo no-newtoniano), 1-10
Resistencia,
coeficientes de transferencia de materia, 21-20
coeficientes de transmisión de calor, 9-23, **13-5**
flujo de calor a **través** de paredes compuestas, **9-21**
interfacial, 13-29 .17-4 .19-36
resistencia de **forma, 2-27,** 6-11
resistencia de fricción, 2-27. 6-11
Rotación de un liquido,
forma de la superficie, 3-27
vórtice. **3-40,** 4-28
Rotacional, **A-12**
en coordenadas curvilíneas, A-28, A-29
integral de superficie, A-21

Segunda ley de Fick,
analogía con conducción de calor, 19-2
deducción. 18-6
desviaciones en evaporación, 19-6
Símbolos, A-47
Sistema autocatalitico, tamaño crítico de, 19-34
Sistemas de varios componentes (*véase* Mezclas)
Superficie específica, 6-19

Tanque agitado,
absorción de un gas con reacción química, 17-16
análisis dimensional, 3-40, 6-27
calentamiento de un fluido, 10-32, 15-19, 15-36
control de temperatura, 15-19, 15-36
mezcla de fluidos miscibles, 18-31
mezcla imperfecta, 22-27
potencia comunicada,, 6-27
profundidad de vórtice, 3-40
reacción irreversible de segundo orden, 22-25
transmisión de calor por convección forzada, 10-32
Temperatura,
de estancamiento., 15-36
de mezcla adiabática, 9-36
errores de medida, 9-29, 14-29, 21-51
fluctuaciones, 12-1
Temperatura global (media), 9-36
Temperatura media,
para el fluio en un tubo., 9-36
para la emisividad efectiva, 14-30
Tensores,
coordenadas curvilineas, A-22
diadas unitarias, A-l 7
diferenciación, A-l 9
invariantes, 3-33, A-25
multiplicación, A-18
tensores unitarios, A- 16
Tensor esfuerzo, 3-8
en coordenadas curvilineas, 3-21, 3-22
en flujo turbulento, 5-7
para fluidos newtonianos, 3-9
para fluidos no-newtonianos, 3-33
simetría, 3-47
Teorema de Buckingham, 6-5, 13-10
Teorema de Gauss-Ostrogradskii, A-20
Teorema del análisis dimensional, 6-5, 13-10
Teorema de Stokes. A-21
Teoría cinética,
de gases a baja densidad, 1-20, 8-14, 16-16
de líquidos, 1-27, 8-21, 16-22
Teoría cinética de Chapman-Enskog,
para la conductividad calorífica, 8-16
para la difusividad, 16-19
para la viscosidad, 1-22
Teoría de película del transporte de interfase, 21-24
comparación con otras teorías, 21-43, 21-44
con propiedades de transporte variables, 21-53
Teoria de penetración,
cálculo de coeficientes de transferencia, 21-36
comparación con otras teorias, 21-43, 21-44, 21-45
difusión en una película descendente, 17-20, 17-37

Termodinámica de los procesos irreversibles, 10-44, 18-12
Tiempo de vertido, 7-20, 7-31, 7-33
Transferencia de materia por convección forzada,
análisis dimensional, 18-28, 21-8
analogías con transmisión de calor, 19-2, 21-8
coeficientes de transferencia de materia, 21-2
coeficientes globales de transferencia de materia, 21-20
efecto de altas velocidades de transferencia de materia, 21-22, 21-24, 21-36, 21-40
en lechos granulares, 21-47
Rujo a lo largo de una lámina plana, 19-15, 19-18, 21-43, 21-44
película descendente, 17-20, 17-34, 17-37
Transferencia de materia por convección libre,
análisis dimensional, 18-30
analogia con transmisión de calor, 21-11, 21-12
Transferencia simultánea de calor y materia,
analogias, 21-12
densidad de fluio de energía. 18-13
en el enfriamiento por transpiración, 10-20, 10-37, 10-39, 19-33, 21-3
en la condensación en película, 18-20 18-35
flujo a lo largo de una lámina plana, 19-18
Transferencia simultánea de calor. materia y cantidad de movimiento,
propiedades físicas medias, 21-46, 21-53
relaciones de Chilton-Colburn, 13-14, 13-17
sistemas de varios componentes, 21-45
teoría de capa limite, 21-40
teoría de película, 21-24
teoria de penetración, 21-36
Transmisión de calor por convección forzada,
análisis dimensional, 10-31, 10-40, 13-8
coeficientes de transmisión de calor, 13-8, 13-20, 13-24
coeficientes globales de transmisión de calor, 9-23, 13-5
con disipación viscosa, 9-14, 9-44, 10-17
definición, 9-30
efecto de altas velocidades de transferencia de materia, 21-22, 21-24, 21-36, 21-40
en el enfriamiento por transpiración, 10-20, 10-37, 10-39, 19-33, 21-3
en lechos granulares, 9-18, 13-24
en películas descendentes, 10-43
en tanques agitados, 10-32
en tubos, 9-30, 9-46, II-I 1, 11-12, 12-14, 13-36
flujo a lo largo de una lámina plana, 10-16, 11-23, 19-18
problema de Graetz-Nusselt, Il-10
Transmisión de calor por convección libre,
análisis dimensional, 10-33, 10-41
coeficientes de transmisión de calor, 13-25
definición, 9-30
Rujo entre paredes paralelas, 9-36
junto a una lámina vertical, 10-23
pérdida de calor desde esferas, 13-36
pérdida de calor desde tubos, 13-28, 13-38, 14-24
Tubos circulares,
coeficientes de transferencia de materia, 21-8, 21-50
coeficientes de transmisión de calor, 13-6, 13-8

coeficientes globales de transmisión de calor, 9-24
difusión turbulenta, 20-5
ecuación de Rabinowitsch, 2-36
factores de fricción, 6-2, 6-3, 6-26
flujo compresible, 15-13, 15-29, 15-30, 15-36
flujo con deslizamiento, 2-36
flujo con paredes rugosas, 6-8
flujo laminar, 2-10, 3-23
flujo laminar no estacionario, 4-4
Rujo no-newtoniano, 2-16, 2-34
flujo turbulento, 5-2, 5-10, 5-25, 6-8
flujo viscoelástico, 3-52
longitud de entrada, 2-15
transferencia turbulenta de materia, 20-5
transmisión laminar de calor, 9-30, II-II, 11-12
transmisión no-newtoniana de calor, 9-46, 9-48
transmisión turbulenta de calor, 12-6
Tubos concéntricos,
conducción de calor en, 9-43
factores de fricción para flujo turbulento, 6-29
flujo con movimiento axial del cilindro interior, 2-34
flujo laminar en, 2-18
flujo laminar no estacionario, 4-31
flujo no-newtoniano, 2-37
flujo radial, 3-50
fluio tangencial con calentamiento viscoso. ío-17
flujo tangencial de Bingham, 3-36
flujo tangencial newtoniano, 3-25, 3-46
número de Reynolds ,nara, 2-21, 3-26
perfiles de velocidad, 5-26
relación con una rendija plana, 2-37
transporte de energía radiante, 14-30
Tubo de Venturi, 15-17, 15-30, 15-32
Turbulencia (véase *también* Coeficientes de transferencia)
distribuciones logarítmicas, J-l 1, 12-10, 20-5
ecuaciones de Corrsin, 12-12, 20-8
en torres de relleno, 6-22
en tubos, 5-2, 5-10, 6-8
factor de fricción para tubos, 6-26
factores de fricción para tubos concéntricos, 6-29
funciones de correlación, 5-14, 12-11, 20-8
homogénea, 5-15, 12-11, 20-8
intensidad de, 5-6
isotrópica, 5-6, 5-15
magnitudes fluctuantes, 5-3, 12-3, 20-3
microescala de Taylor, 5-22
radio hidráulico medio, 6-9
teorías semiemplricas, 5-8, 12-5, 20-3
Unidades y factores de conversión, A-37
Vectores,
comprobación de identidades, A-l l
coordenadas curvilíneas, A-22
notación A-3
operaciones diferenciales, A-l |
operaciones elementales, A-4, A-9
producto diádico, A-16
vectores unitarios, A-8
Velocidad,
en sistemas de difusión, 16-5
media en una conducción, 2-14, 7-3
media en mezclas, 16-5
molecular, 1-20
superficial, 6-18, 13-24
Velocidad del sonido, 10-42
conductividad calorífica y, 8-23
Velocidad final, 2-28, 6-3
Velocidad másica, 6-2 1, 13-25
Velocidad media,
de moléculas de un gas a baja densidad, 1-20
en mezclas, 16-4
en tubos concéntricos, 2-21
en una película descendente, 2-7
para el flujo en un tubo, 2-14
para el flujo no-newtoniano, 7-30
Velocidad media de masa, 16-4
Velocidad media molar, 16-5
Velocidad molecular, 1-32
Velocidad superficial, 6-18
Velocidad volumétrica media, 16-5
Vertido de liquidos, 2-38, 7-20, 7-31, 7-33
Viscosidad, 1-4, 3-10, 10-12
cinemática, 1-6
de gases a baja densidad, 1-20
de mezclas, 1-19, 1-26
de remolino, 5-8
determinación, 2-15
factores de conversión, A-42
global, 3-10, 10-12
gráfica generalizada, 1-17, 1-18
tabla de viscosidades críticas. A-34
teoría de Eyring, 1-27
valores experimentales, 1-8
variación con la temperatura y la presión, 1-16
Viscosímetros,
correcciones, 7-31
de cilindros coaxiales, 3-45
de plato y cono, 3-30, 3-52
Vórtice,
en el vaciado de un tanque, 3-48
en un tanque agitado, 3-40
forzado, 3-29, 4-28
libre, 4-28

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
BIBLIOTECA DE POSGRADO

018-95029